

# 외부가압 원추형 공기베어링의 특성에 관한 연구

(A Study on the Characteristics of an Externally Pressurized

Conical Gas Bearing)

## 박 상 신 · 한 동 철\*

### 1. 서 론

최근의 전자 및 광학기기 분야에 있어서의 눈부신 발전은 다면경 가공기나 초정밀 절삭, 연삭기와 같은 초정밀 가공기계의 개발과 실용화에 힘입은 바 크다. 이러한 초정밀 가공기의 성능을 좌우하는 핵심 요소로서 주축계를 들 수 있으며, 비교적 소형 경량의 공작물을 가공하는 기계의 주축용 베어링으로는 볼 베어링이나 오일 베어링을 대신하여 공기베어링이 점차 널리 사용되고 있다.

일반적으로 주축으로 사용되는 베어링은 원통형 레이디얼 베어링과 원관형 스티스트 베어링이 결합된 형식이 주류를 이루나 이러한 베어링은 스티스트 판과 축의 직각도가 가공오차가 존재하기 때문에 가공하기는 쉬우나 회전시에 이의 영향에 의해 회전 정밀도 유지가 어렵다는 단점을 지니고 있다. 이러한 단점을 보완하기 위하여 사용되는 베어링에는 원추형 (conical) 베어링과 구면형 (spherical) 베어링이 쓰이고 있다. 이러한 원추형 베어링과 구면형 베어링은 가공오차를 베어링과 축의 현압 연마로써 없애줄 수 있으며 베어링이 축방향 하중과 경방향 하중을 동시에 지지하여 줌으로써 기계 전체의 부피를 줄이고 회전 정밀도를 향상시켜 주는 것으로 알려져 있다. 그러나 구면의 베어링 간극을 정확히 가공하기 어려운 단점이 있어 축과 베어링을 현압연마하여 가공한 후에 두부품을 중심선상에서 분리 시키므로써 요구되는 간극을 얻을 수 있는 원추형 베어링이 많이 쓰이고 있다.

현재까지 원추형 베어링의 연구는 D. Faddy<sup>[1]</sup> 과 Xia Heng Qing<sup>[2]</sup> 등에 의해서 행해졌으나 Xia Heng Qing 은 포켓을 갖는 오일 베어링에 대한 연구이며 Faddy 는 그루브를 갖는 동압 공기 베어링에 대한 연구였다. 따라서 외부 가압 원추형 공기 베어링을 이론적으로 해석하여 설계 자료를 얻는 것이 필요하게 되었다.

본 연구는 급기공을 갖는 외부 가압 원추형 공기 베어링의 특성의 이론적인 고찰로 접근기 가정하에 해석 되었다.

급기공은 자성형 급기공으로 베어링 면에 일정한 간격으로 놓여져 있다. 이러한 급기공을 갖는 베어링의 해석에서는 각 급기공으로 공급되는 유량사이의 영향계수를 이용하는 방식<sup>[3]</sup>과 급기에 의한 유동의 영향을 차분화된 지배 방정식에 대입하는 방식<sup>[4]</sup> 등이 있으나 본 논문에서는 윤활 틈새내의 질량 유동의 연속성을 이용하여 압력분포를 계산하는 직접 수치 해법 (direct numerical method)<sup>[5]</sup>을 사용하였다. 공기 베어링 문제에 있어서 직접 수치 해법은 가장 효율적인 방법이나<sup>[5]</sup>, 최근에는 극소 공기막을 갖는 윤활 문제에 주로 적용되었다.<sup>[6,7]</sup>

\* 서울대학교 기계설계학과 대학원

\*\* 서울대학교 기계설계학과

본 연구에서는 직접 수치 해법을 이용하여 원추형 베어링의 유막내의 압력 분포를 계산하고 이 합력인 하중지지 용량이 축방향 하중과 경방향 하중을 지지하는 특성을 이론적으로 검토하여 외부 가압 원추형 베어링의 특성수를 파악하여 설계자료를 제시하고자 한다.

### 2. 지배 방정식

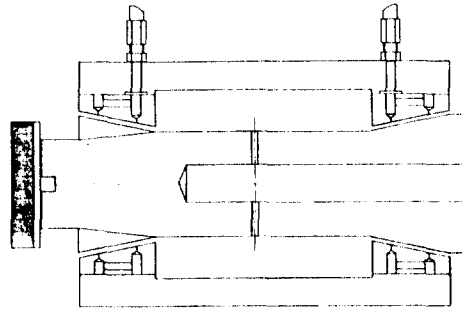


Fig. 1 System of shaft mounted on conical bearings

위 그림 1 은 원추형 베어링을 사용한 주축계의 그림이다. 그림에서 알 수 있듯이 베어링 면에 압력이 작용하면 반경 방향의 분력과 축방향의 분력이 생겨 축방향 하중과 경방향 하중을 동시에 지지하게 된다. 이의 베어링 부의 구성도는 그림 2 에 나타나 있다.

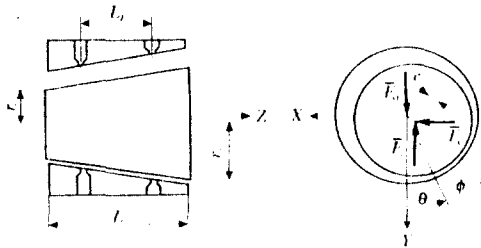


Fig. 2 Schematic diagram of the bearing

여기서  $r_1$  는 최소반경이고  $r_2$  은 최대반경을 나타내고  $L$  은 베어링의 길이를 나타낸다. 급기공의 직경은  $2r_2$  이고 베어링의 길이 방향으로 1 : 2 : 1 의 위치에 놓여져 있는 2 원 급기공 형태이다.

베어링 내의 압력분포를 구하기 위하여, 공기막 틈새의 미소체적 요소의 관성력, 압력, 마찰력 그리고 외부의 힘장 상이의 힘의 균형에서부터 유도된 Navier-Stokes 방정식으로부터 레이놀즈 방정식을 유도하면 다음과 같다.<sup>[8]</sup>

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu U \frac{\partial}{\partial x} (\rho h) \quad (1)$$

여기서 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p &= p_a & \text{at } z &= -L/2 \\ p &= p_a & \text{at } z &= +L/2 \end{aligned} \quad (2)$$

식 (1) 을 수치해석상의 round-off error 를 줄이고 수치들의 활용범위를 일반화 하기 위하여,  $r = r(z)$  로 표시되고  $\theta = x/r_o$ ,  $\xi = z/r_o$ ,  $P = p/p_a$ ,  $H = h/C$ ,  $\Lambda(z) = 6\mu r_o \omega / p_a C^2$  라는 설계 변수들을 이용하여 무차원화 하고 매트릭스로 표시하면 다음과 같다.

$$\nabla \cdot (PH^3 \nabla P - \Lambda(z)PH) = 0 \quad (3)$$

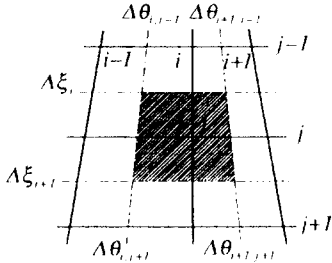


Fig.3 Configuration of control surface for grid point

이 식 (3) 을 그림 3 에서와 같이 공기 유통이 이루어지는 표면상의 임의의 점 (i, j) 를 둘러싼 검사 표면에 대하여 적분한다.

$$\int_{S_{ij}} \nabla \cdot (PH^3 \nabla P - \Lambda(z)PH) dS_{ij} = 0 \quad (4)$$

여기에 Gauss' divergence theorem 을 적용하면,

$$\int_{ij} (PH^3 \nabla P - \Lambda(z)PH) \cdot u \, dl = 0 \quad (5)$$

여기서  $u$  는 검사표면에서 바깥쪽으로 향하는 단위 벡터이다.

식 (5) 를 다음과 같이 점 (i, j) 를 둘러싼 4면에 대해서 적분하는 이산화 방법을 취한다.

$$\begin{aligned} &+ \left[ \left( PH^3 \frac{\partial P}{\partial \theta} - \Lambda(z)PH \right)_{i+1/2, j} \frac{\Delta \xi_{j+1}}{2} + \left( PH^3 \frac{\partial P}{\partial \theta} - \Lambda(z)PH \right)_{i+1/2, j-} \frac{\Delta \xi_j}{2} \right] \\ &- \left[ \left( PH^3 \frac{\partial P}{\partial \theta} - \Lambda(z)PH \right)_{i-1/2, j} \frac{\Delta \xi_{j+1}}{2} + \left( PH^3 \frac{\partial P}{\partial \theta} - \Lambda(z)PH \right)_{i-1/2, j-} \frac{\Delta \xi_j}{2} \right] \\ &+ \left[ \left( PH^3 \frac{\partial P}{\partial \xi} \right)_{i, j+1/2} \frac{\Delta \theta_{i+1, j+1} + \Delta \theta_{i+1, j}}{4} + \left( PH^3 \frac{\partial P}{\partial \xi} \right)_{i, j-1/2} \frac{\Delta \theta_{i, j+1} + \Delta \theta_{i, j}}{4} \right] \\ &- \left[ \left( PH^3 \frac{\partial P}{\partial \xi} \right)_{i, j+1/2} \frac{\Delta \theta_{i+1, j-1} + \Delta \theta_{i+1, j}}{4} + \left( PH^3 \frac{\partial P}{\partial \xi} \right)_{i, j-1/2} \frac{\Delta \theta_{i, j-1} + \Delta \theta_{i, j}}{4} \right] = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 하첨자중 1/2 은 두 절점 사이의 중간위치를 의미한다. 그러므로 이 첨자가 붙은 부분에서는 압력과 간극의 함수가 국소영역에서 선형성을 가정하여 압력과 간극 모두 두 절점의 평균치를 취하게 된다. 식 (6)을 중앙 차분식에 의하여 근사식으로 표시하고 정리하면 다음과 같이 간단한 형태의 대수 방정식을 얻을 수 있다.

$$(C_1 + C_2 + C_3 + C_4) P_{i,j} \quad (7)$$

$$= C_1 P_{i,j+1} + C_2 P_{i+1,j} + C_3 P_{i,j-1} + C_4 P_{i-1,j} - C_5 + C_6$$

이고, 여기서 각각의 계수들은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{P_{i+1/2, j}}{2\Delta\theta_{i+1, j}} \left\{ H_{i+1/2, j}^3 \Delta \xi_{j+1} + H_{i+1/2, j}^3 \Delta \xi_j \right\} \\ C_2 &= \frac{P_{i, j+1/2}}{4\Delta \xi_{j+1}} \left\{ H_{i, j+1/2}^3 (\Delta \theta_{i+1, j+1} + \Delta \theta_{i+1, j}) + H_{i, j+1/2}^3 (\Delta \theta_{i, j+1} + \Delta \theta_{i, j}) \right\} \\ C_3 &= \frac{P_{i, j-1/2}}{2\Delta \theta_{i, j}} \left\{ H_{i, j-1/2}^3 \Delta \xi_{j+1} + H_{i, j-1/2}^3 \Delta \xi_j \right\} \\ C_4 &= \frac{P_{i, j-1/2}}{4\Delta \xi_j} \left\{ H_{i, j-1/2}^3 (\Delta \theta_{i+1, j-1} + \Delta \theta_{i+1, j}) + H_{i, j-1/2}^3 (\Delta \theta_{i, j-1} + \Delta \theta_{i, j}) \right\} \\ C_5 &= \frac{\Lambda_j P_{i+1/2, j}}{2} \left\{ H_{i+1/2, j} \Delta \xi_{j+1} + H_{i+1/2, j} \Delta \xi_j \right\} \\ C_6 &= \frac{\Lambda_j P_{i-1/2, j}}{2} \left\{ H_{i-1/2, j} \Delta \xi_{j+1} + H_{i-1/2, j} \Delta \xi_j \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

급기공이 위치한 절점에 대하여는

$$\int_{ij} (PH^3 \nabla P - \Lambda(z)PH) \cdot u \, dl + Q_{S_{ij}} = 0 \quad (9)$$

이므로

$$(C_1 + C_2 + C_3 + C_4) P_{i,j} \quad (10)$$

$$= C_1 P_{i,j+1} + C_2 P_{i+1,j} + C_3 P_{i,j-1} + C_4 P_{i-1,j}$$

$$- C_5 + C_6 + Q_{S_{ij}}$$

이다. 여기서 그림 4 와 같은 자성형 급기공으로부터 공급되는 급기량  $Q_{S_{ij}}$  는 압축성 유체의 동엔트로피 과정에 대한 식으로부터 구한다.<sup>[9]</sup>

$$Q_{S_{ij}} = \Gamma_s \cdot P_s \cdot H_{i,j} \cdot \left( \frac{2\kappa}{\kappa+1} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \quad (11)$$

$$\frac{P_{i,j}}{P_s} \leq \left( \frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

$$= \Gamma_s \cdot P_s \cdot H_{i,j} \cdot \left( \frac{2\kappa}{\kappa-1} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \left( \frac{P_{i,j}}{P_s} \right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left( \frac{P_{i,j}}{P_s} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{P_{i,j}}{P_s} > \left( \frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

여기서  $\Gamma_s$  는 무차원 급기계수로써 다음과 같이 정의 된다.

$$\Gamma_s = \frac{24\pi\mu C_d r_s \sqrt{RT}}{\rho_o C^2} \quad (11)$$

위에서 설명된 이산화된 평정식의 경계조건은 다음과 같다.

$$P_{i,0} = 1$$

$$P_{i,0} = 1 \quad (12)$$

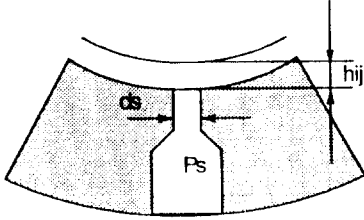


Fig. 4 Geometry of inherent restrictor

### 3. 외부가압 원추형 공기베어링의 모델링

그림 2 에서의 보여진 베어링계의 윤활 틈새함수를 무차원 형태로 표시하면

$$H = 1 - \epsilon \cos(\theta - \phi) \quad (13)$$

로 나타낼 수 있다.

식 (13)에 의하여 각 절점에서의 윤활틈새가 얻어지면 각 검사표면의 경계에서의 윤활틈새는 평균 계단 틈새 함수 (mean-step thickness function) 의 가정에 의하여 구해진다.<sup>10)</sup> 이는 틈새의 평균화 작용으로써 베어링 표면에 그루브 (groove) 와 같은 틈새의 변화요인이 있을 경우에도 응용할 수 있다.

공기막의 압력에 의하여 축에 작용하는 베어링 반력은 베어링 표면의 미소면적에 작용하는 압력을 베어링 표면 전체에 걸쳐서 적분한 것과 같다. 따라서 압력에 의한 반력의 성분들을 구하여 지배방정식과 같이 무차원화 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{F}_x = & \frac{r_o}{2L} \int_0^{2\pi} \int_{-L/2r_o}^{L/2r_o} (P-1) \cos\beta \sin\theta d\xi d\theta \\ & + \frac{r_o^2}{(r_i+r_o)L} \int_0^{2\pi} \int_{-L/2r_o}^{L/2r_o} (P-1) \sin\beta \sin\theta \xi d\xi d\theta \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_y = & \frac{r_o}{2L} \int_0^{2\pi} \int_{-L/2r_o}^{L/2r_o} (P-1) \cos\beta \cos\theta d\xi d\theta \\ & + \frac{r_o^2}{(r_i+r_o)L} \int_0^{2\pi} \int_{-L/2r_o}^{L/2r_o} (P-1) \sin\beta \cos\theta \xi d\xi d\theta \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_z = & \frac{r_o}{2\pi(r_o-r_i)} \int_0^{2\pi} \int_{-L/2r_o}^{L/2r_o} (P-1) \sin\beta d\xi d\theta \\ & + \frac{r_o^2}{2\pi(r_o^2-r_i^2)} \int_0^{2\pi} \int_{-L/2r_o}^{L/2r_o} (P-1) \sin\beta \xi d\xi d\theta \end{aligned} \quad (16)$$

따라서 무차원 베어링 반력은

$$\bar{F} = \frac{F}{\rho_o(r_i+r_o)L} = \left\{ (\bar{F}_x)^2 + (\bar{F}_y)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

이고 이 무차원 반력  $\bar{F}$  의  $y$  축에 대한 작용각은

$$\phi_p = \tan^{-1} \left( \frac{\bar{F}_x}{\bar{F}_y} \right) \quad (18)$$

압축성 계수  $\Lambda(z)$  와 급기계수  $\Gamma_s$ , 급기압력  $P_s$  가 일정할 때, 합력  $\bar{F}$  의 작용각  $\phi_p$  는 편심률  $\epsilon$  과 자세각  $\phi$  의 함수이다. 보통 정적 평형상태에서는 작용각  $\phi_p$  는 0 이고 압력의  $x$  방향 성분의 합은 0 이 되며, 베어링 반력이 외부 하중과 평형을 이루는 정적 평형상태의 편심률과 자세각을 Newton-Raphson 알고리즘을 이용하여 구하였다.

### 4. 해석결과

본 연구에서는 반경비  $r_i/r_o = 4/5$ , 베어링 길이  $L/r_o = 8/5$ , 최대반경에서의 압축성 계수  $\Lambda = 1.0$ , 급기공의 갯수는 원주를 따라서 같은 간격으로 12 개의 2 입급기 형태의 원추형 베어링에 대해서 계산하였다. 지배방정식의 비선형성은 반복계산으로 비선형성을 없애주는 단순 반복계산법을 방식을 채택하였다.

그림 5 는 급기압력을 2, 3, 4, 5 기압으로 바꾸어 가면서 무차원 급기계수에 대한 반경방향의 무차원 하중지지 용량의 변화를 나타내는 그래프이다. 이는 편심률이 0.1 인 경우에 대해서 계산한 결과로 그래프에서 알 수 있듯이 급기계수에 대한 무차원 하중지지 용량은 일정한 압력에 대하여 급기계수를 구성하는 베어링의 설계변수들에 최대의 강성을 얻을 수 있는 조합이 존재함을 알 수 있다. 그러므로 높은 정적 강성을 얻기 위해서는 급기압력을 크게 할 필요가 있으며, 이 값이 결정되면 급기계수를 구성하는 설계변수들, 특히 급기구의 직경과 베어링 틈새를 조절하여 최대의 하중지지 용량이 나타나는 급기계수의 값을 조합하여야 한다.

그림 6 은 급기압력을 변화시켰을 때의 급기계수와 축방향의 하중지지 용량의 변화를 나타내는 그래프이다. 급기계수가 1 이하에서는 log-log 좌표계에서 선형적으로 변화하므로 설계현상은 지수함수적으로 증가함을 알 수 있다. 그러나 급기계수가 1 이상이 될 때는 점적으로 증가율이 줄어들음을 알 수 있다. 그러나 축방향 하중에 대해서는 외부하중과 평형을 이루는 정적 평형위치를 구하면 이 값들이 달라지고, 정적 위치가 변화한다는 것은 베어링 틈새를 변화시키는 결과를 낳게 되므로 반경방향 하중까지도 변화되는 결과를 초래할 것이다.

그림 7 은 급기계수에 대한 무차원 용량을 표시한 그래프이다. 무차원 용량도 급기계수가 1 이하일 때는 지수함수적인 증가 현상을 보이나 급기계수가 커지면서 무차원 용량의 변화율이 줄어들음을 알 수 있다.

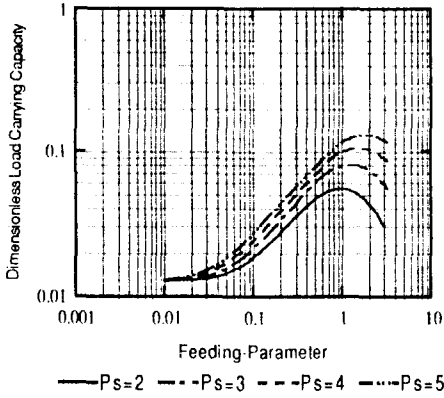


Fig.5 Feeding paramter .vs.  $\bar{F}_y$

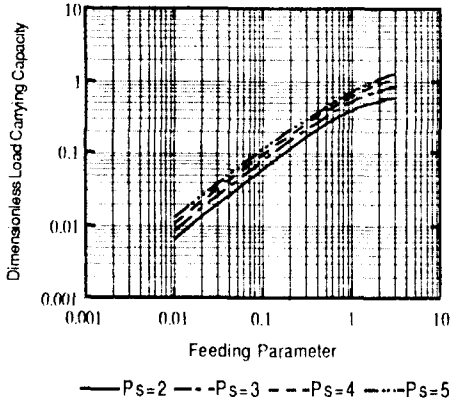


Fig.6 Feeding paramter .vs.  $\bar{F}_z$

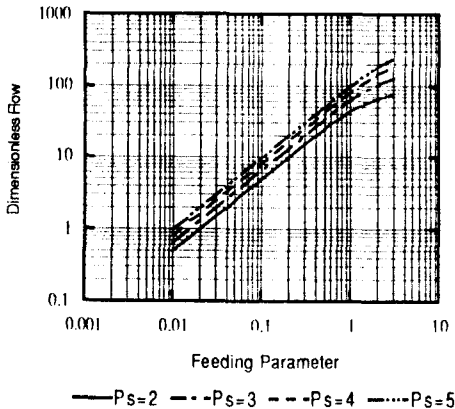


Fig.7 Feeding paramter .vs. dimensionless flow

## 5. 결 론

외부 가압 원추형 공기베어링의 특성을 점접기 가정을 도입하여 이론적으로 해석한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 외부 가압 원추형 공기베어링의 정적 특성수들은 점접기 가정하에서 적접 수치 해법을 이용하여 효과적으로 계산되어질 수 있다.
2. 무차원 하중지지 용량의 최대값을 나타내는 급기계수가 존재하며, 이는 베어링의 설계변수들을 조합하여 얻어질 수 있다.

## 참고문헌

1. D. Faddy, " The Effect of Flow on the Journal and Thrust performance of Statically Loaded Opposed Conical Bearings ", Proc., Gas Bearing Symposium, Univ. of Southampton, Paper 32, April, 1969.
2. Xia Heug Qing, Hua Shao Jie, Fang Xiao Li, Yu Yan Ping, " The Analysis of Static and Dynamic Characteristics in a Hybrid Conical Sliding Bearing with Shallow Pocket ", Proc. of the International Conference on Hydrodynamic Bearing - Rotor System Dynamics, September, 1990.
3. Majundar, B.C., " On the General Solution of Externally Pressurized Gas Journal Bearings ", J. Lub. Tech., Trans. ASME, Vol.94, No.4, 1972, pp.291-296.
4. Elrod, H.G. and Glanfield, G.A., " Computer Procedure for the Design of Flexibly Mounted Externally Pressurized Gas Lubricated Bearings ", Proc. 5th Gas Bearing Symposium, Univ. of Southampton, Paper 22, 1971.
5. Castelli, V. and Pirvics, J., " Review of Numerical Methods in Gas Bearing Film Analysis ", J. Lub. Tech., Trans. ASME, Vol.90, No.4, 1968, pp.777-792.
6. Kawabata, N., " Numerical Analysis of Reynolds Equation for Gas Lubrication in High  $\Lambda$  Region ", JSME Int. Journal, Vol.30, No.263, 1987, pp.836-842.
7. 황 평, 박 상신, 장 인배, 한 동철. " 극소 공기막을 갖는 공기 베어링의 적접 수치해법을 이용한 정적 해석 ", 대한기계학회 춘계학술대회, 1989.
8. Oscar Pinkus, Beno Sternlicht, **Theory of Hydrodynamic Lubrication**, McGraw-Hill, 1961.
9. A. H. Shapiro, "Compressible Fluid Flow", Vol.1, The Ronald Press Company, New York, N. Y., 1953.
10. Reizo, Kaneko, "Discretization Method for Numerical Solution on Hydrodynamic Lubrication", 潤滑, Vol.29, No.9, 1984, pp.633-638.