

# 부분 기여도 함수를 이용한 소음/진동원 검출에 있어서의 우선순위 결정에 관한 연구

°박 정석\*, 김 광준\*\*

(The Rank Determination for the Source Identification  
Utilizing Partial Coherence Function Technique)  
(Jung-Seok Park, Kwang-Joon Kim)

## 1. 서론

소음/진동 문제를 해결하는데 있어서 우선은 소음/진동원들의 위치를 알아내고 그들 중에 비중이 가장 큰 소음/진동원을 파악하는 것이 중요하다. 다입력/단일출력 모형을 이용한 소음/진동원 규명에 대한 방법에는 주파수 응답함수를 이용하는 방법(frequency response function approach)과 부분 기여도 함수(partial coherence function)를 이용하는 방법등이 있는데, 입력들 사이의 상호상관(correlation)이 없는 경우에는 전자의 방법을 사용하여 출력에 가장 큰 비중을 차지하는 소음/진동원을 알아낼 수 있으나 상호상관이 존재하는 경우에는 후자의 방법을 사용하게 된다 [1].

그러나 후자의 방법을 적용함에 있어서도 기본적으로 소음/진동원들의 위치를 알아야 하는 것 이외에 그들 사이의 원인-효과관계(causaling), 또는 우선순위(rank)를 우선적으로 아는 것이 중요한데 이는 입력들 사이의 우선순위를 어떻게 두느냐에 따라 해석 결과가 다르게 나타나기 때문이다 [1,2,3].

본 연구에서는 부분 기여도 함수를 이용하여 소음/진동원을 규명할 때 그들 사이의 우선순위를 결정하는 방법을 제시하고 2입력/1출력 모형에 대해 적용하여 보았다.

## 2. 이론

그림 1과 같이 입력이 정상 불규칙 과정(stationary random record)이거나, 과도 불규칙 과정(transient random record)으로서 입력들 간에 부분적으로 상호상관이 있는 다입력/단일출력 선형계 모형을 고려해 보기로 한다.

외부잡음  $n(t)$ 가 입력 및 출력신호와 상호상관이 없다는 가정하에서,  $q$ 개의 입력  $x_i(t)$ 와 출력  $y(t)$ 를 측정할 수 있다면 입력과 출력 사이의 관계를 식(1)과 같이 표시할 수 있다 [4].

$$G_{yy}(\omega) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q H_i^*(\omega) G_{ij}(\omega) H_j(\omega) + G_{nn}(\omega) \quad (1)$$

여기서

$G_{yy}(\omega)$  : 출력의 자기 스펙트럼 (auto spectrum)  
 $G_{ii}(\omega)$  : 입력  $x_i$ 의 자기 스펙트럼  
 $G_{nn}(\omega)$  : 외부잡음의 자기 스펙트럼  
 $G_{ij}(\omega)$  : 입력  $x_i$ 와  $x_j$ 사이의 상호 스펙트럼  
 $H_i(\omega)$  : 입력  $x_i$ 와 출력사이의 주파수 응답함수  
 $H_i^*(\omega)$  :  $H_i(\omega)$ 의 공액 복소수

식(1)에서의 주파수 응답함수들은 다음 식(2)와 같은  $q$ 개의 선형 방정식으로부터 구해질 수 있다.

$$G_{iy}(\omega) = \sum_{j=1}^q G_{ij}(\omega) H_j(\omega) \quad (i = 1, 2, \dots, q) \quad (2)$$

한편 단일입력/단일출력 모형에서 입력과 출력사이의 관련성을 판단하는 척도로서 기여도 함수(coherence function)를 사용하듯이 다입력/단일출력 모형에서는 식(3)과 같이 정의되는 다중 기여도 함수(multiple coherence function)를 사용하며 측정된 입력들과 출력만으로 계산될 수 있다 [4,5].

$$\gamma_{y,x}^2(\omega) = 1 - \frac{G_{nn}(\omega)}{G_{yy}(\omega)} \quad (3)$$

다중 기여도 함수는 0과 1사이의 값을 갖는데, 관심 있는 주파수 영역에서 1에 가까운 경우에는 고려한 입력들에 의해서 대부분의 출력이 발생하는 것이고, 그렇지 않은 경우에는 다른 중요한 입력이 생략되었거나, 계가 비선형성을 갖는 경우등을 생각할 수 있다. 즉, 다중 기여도 함수는 현재 소음/진동원으로 간주한 입력들이 모형에 적합한지의 여부를 판단하는 기준을 제공한다.

### 2-1. 주파수 응답함수를 이용하는 방법

입력들 사이의 상호상관이 없는 경우에는 식(1)에서 상호 스펙트럼항들이 제거되어 다음과 같이 각각 표시될 수 있다.

\* 한국과학기술원 생산공학과

\*\* 한국과학기술원 기계공학과

$$G_{yy}(f) = \sum_{i=1}^q |H_i(f)|^2 G_{ii}(f) + G_{nn}(f)$$

$$= \sum_{i=1}^q \gamma_{iy}^2(f) G_{yy}(f) + G_{nn}(f) \quad (4)$$

여기서

$$\gamma_{iy}^2(f) = \frac{|G_{iy}(f)|^2}{G_{ii}(f) G_{yy}(f)} \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

식(4)에서  $\gamma_{iy}^2(f)$ 는 각각의 입력과 출력 사이의 기여도 함수를 나타내고,  $\gamma_{iy}^2(f) G_{yy}(f)$  ( $i=1, 2, \dots, q$ )는 기여도 출력 스펙트럼(coherent output spectrum)으로서 입력이 출력에 차지하는 파워양을 나타낸다. 즉 측정된 입력들과 출력만으로 기여도 출력 스펙트럼을 계산한 뒤 각각을 비교함으로써 출력에 가장 많은 영향을 미치는 소음/진동원을 알아낼 수 있다.

## 2.2. 부분 기여도 함수를 이용하는 방법

입력들 간의 상호상관이 부분적으로 존재하는 경우 입력들 사이의 원인-효과관계를 알 수 있으면 그림1.은 그림2.와 같이 나타낼 수 있다. 그림2.는  $x_1(t)$ 이  $x_2(t)$ 에,  $x_1(t)$ 과  $x_2(t)$ 가  $x_3(t)$ 에, 같은 방법으로  $x_1(t)$ 부터  $x_{(i-1)}(t)$ 까지가  $x_i(t)$ 에 영향을 준다는 가정하에 각각의 신호에서 영향을 주는 신호들의 선형성분들을 제거한 것을 입력으로 간주한 모형이다. 즉, 그림2.와 같은 모형에서는 입력들 사이의 상호상관이 존재하지 않게 되며 각각의 입력이 출력에 차지하는 파워를 식(5)와 같이 구할 수 있다.[4]

$$G_{iy,(i-1)}(f) = \gamma_{iy,(i-1)}^2(f) G_{yy,(i-1)}(f) \quad (i = 1, 2, \dots, q) \quad (5)$$

여기서  $G_{iy,(i-1)}(f)$ 는  $i$ 번째 입력으로부터 입력  $x_1(t)$ 에서 입력  $x_{(i-1)}(t)$ 까지의 선형성분을 제거한 신호가 출력에 차지하는 파워를 나타내고  $\gamma_{iy,(i-1)}^2(f)$ 는 부분 기여도 함수로서 입력  $x_{(i-1)}(t)$ 와 출력  $y(t)$ 사이의 관련성을 나타내며 식(6)과 같이 정의된다.

$$\gamma_{iy,(i-1)}^2(f) = \frac{|G_{iy,(i-1)}(f)|^2}{G_{ii,(i-1)}(f) G_{yy,(i-1)}(f)} \quad (i = 1, 2, \dots, q) \quad (6)$$

따라서 식(5)를 이용하여 구한 기여도 출력 스펙트럼을 관심있는 주파수 범위에서 각각 비교함으로써 출력에 가장 많은 비중을 차지하는 소음/진동원을 알 수가 있다.

그러나 그림2.와 같은 모형에서는 입력들의 우선순위가  $x_1, x_2, \dots, x_q$  순으로 있다고 가정된 모형이므로 만약 우선순위가 다른 경우에는 앞의 경우와는 다른 결과를 얻게 된다. 즉 입력들 간에 상호상관이 존재하여 부분 기여도 함수를 이용한 소음/진동원 규명시, 입력들 사이의 우선순위를 먼저 결정하여야만 올바른 결과를 얻을 수 있게 된다.

## 3. 입력들간의 우선순위 결정

상호상관이 존재하는 두 신호 사이에서 원인-효과 관계를 알 수 있다면, 이를 다입력/단일출력 모형의 우선순위 결정에 확장하여 적용할 수 있으므로 그림3.과 같이 질량, 스프링, 점성댐퍼로 구성된 1자유도 모형을 고려해 보기로 한다. 외부에서 가해주는 힘을  $F(t)$ 라 하고, 그에 해당하는 변위를  $x(t)$ 라 하면 힘과 변위 사이의 주파수 응답함수는 다음과 같이 2경우로 정의될 수 있다.

$$H_1(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1}{K - M\omega^2 + jC\omega} \quad (7)$$

$$H_2(\omega) = \frac{F(\omega)}{X(\omega)} = K - M\omega^2 + jC\omega \quad (8)$$

식(8)은 식(7)과 역수관계로서 힘을 변위로 나눈 주파수 응답함수이며,  $H_1(\omega)$ 과  $H_2(\omega)$ 를 주파수에 따라 각각 나타내면 그림4., 그림5.와 같다. 식(7)의 임펄스 응답함수(impulse response function)는 역 푸리에 변환(inverse fourier transform)으로부터 다음과 같이 표현된다[6,7].

$$h_1(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{M\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \text{SIN}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) U(t) \quad (9)$$

여기서

$$U(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}, \quad \zeta = \frac{C}{2\sqrt{MK}}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

한편 식(8)의 역 푸리에 변환은 주파수 영역에서 발산하므로 존재하지 않게 되나 실제 컴퓨터에서는 유한개의 이산신호를 처리하게 되므로 식(7)과 식(8)에 대한 역 푸리에 변환은 그림6., 그림7.과 같이 나타난다. 그림6.은 식(9)에 대응되는 것이며 그림7.은 유한영역  $-\omega_c$ 에서  $\omega_c$ 까지 역 푸리에 변환한 식(10)으로 표현된다.

$$h_2(t) = \int_{-\omega_c}^{\omega_c} (K - M\omega^2 + jC\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$= 2 \left( K - M\omega_c^2 + \frac{2M}{t^2} - \frac{C}{t} \right) \frac{\text{SIN}(\omega_c t)}{t}$$

$$+ 2 \left( C\omega_c - \frac{2M\omega_c}{t} \right) \frac{\text{COS}(\omega_c t)}{t} \quad (10)$$

$F(t)$ 를 원인,  $x(t)$ 를 효과라 할 때, 그림6.과 그림7.로부터 원인-효과 관계를 만족하는 임펄스 응답 함수에서는 "-" 시간영역에서 신호가 발생하지 않으나 원인-효과관계가 뒤바뀐 식(10)과 같은 임펄스 응답함수에서는 "+" 시간영역에서도 비등한 수준의 신호가 "-" 시간대에서도 생기는 것을 알 수 있다. 즉 상호상관이 존재하고 원인-효과관계를 모르는 두 신호사이에서 임펄스 응답함수를 각각 구한 뒤, "-" 시간영역에서의 신호를 비교해 봄으로써 두 신호 사이의 원인-효과관계를 결정할 수 있겠다.

#### 4. 시뮬레이션

그림8.과 같은 2입력/1출력 모형에서 입력들은 분산이 1인 랜덤신호로서 그림3.과 같은 선형계  $H_{1y}$  ( $M=1$  kg,  $C=3.1416$  N-sec/m,  $K=986.96$  N/m) 와  $H_{2y}$  ( $M=1$  kg,  $C=1.885$  N-sec/m,  $K=8882.644$  N/m)를 각각 통과한 뒤, 입력신호와 상호상관이 없고 출력신호의 rms 값의 5%정도의 크기를 갖는 외부잡음과 합쳐져 최종적으로 출력  $Y(t)$ 가 만들어지게 하였다. 이때 입력들 사이의 상호상관을 주기 위하여 입력  $X_1(t)$ 가 선형계  $H_{1y}$  ( $M=1$  kg,  $C=3.77$  N-sec/m,  $K=3947.84$  N/m) 를 통과한 뒤 입력  $X_2(t)$ 에 첨가되도록 하였다. 또한 신호 처리 과정에서 샘플링 시간은 0.025 sec로 하고 평균은 9번을 행하였다.

그림9.는 측정이 가능한 입력  $X_1(t)$ ,  $X_2(t)$ 와 출력  $Y(t)$ 에 대한 자기 스펙트럼을 나타내고 있으며, 그림 10.은 입력들과 출력, 입력과 외부잡음 사이의 기여도 함수 및 다중 기여도 함수를 보여 주고 있다. 그림10.(d)는 입력  $X_1(t)$ 와 외부잡음 사이의 기여도 함수를 나타내고 있는데 상호상관이 적음을 알 수 있다. 출력의 자기 스펙트럼으로부터 관심있는 주파수 영역을 피크가 발생하는 5Hz, 10Hz, 15Hz 부근이라 할 때, 다중 기여도 함수가 0~18Hz 사이에서 1의 값에 가까운 것에 비추어 관심있는 주파수 영역에서 출력의 대부분은 두 입력신호에 의해서 발생한 것임을 알 수 있다. 또한 입력  $X_1(t)$ 와 출력 사이의 기여도 함수로부터 출력의 5Hz, 10Hz 부근은  $X_1(t)$ 로 인해 발생한 것이고, 입력  $X_2(t)$ 와 출력 사이의 기여도 함수로부터 10Hz, 15Hz 부근의 피크는  $X_2(t)$ 에 의해서 주로 발생한 것임을 알 수 있다.

그러나 입력  $X_1(t)$ 와  $X_2(t)$ 사이의 기여도 함수로부터 10Hz 부근에서 두 입력 사이의 상호상관이 다른 주파수에 비해 크게 나타나므로 출력의 10Hz 부근의 피크는 입력  $X_1(t)$ 로 인한 것인지, 또는 입력  $X_2(t)$ 로 인한 것인지를 판단할 수가 없다. 즉, 5Hz 부근과 15Hz 부근에서는 입력 사이의 상호상관이 적으므로 주파수 응답함수를 이용하여 출력에 더 많은 비중을 차지하는 입력을 알아 낼 수 있으나, 10Hz 부근에서는 두 입력 사이의 높은 상호상관으로 인하여 부분 기여도 함수를 이용해야 함을 알 수 있다.

따라서 10Hz 부근에서는 그림11.과 같은 두 개의 모형을 고려할 수 있겠다. 그림11.(a)는  $X_1(t)$ 가  $X_2(t)$ 보다 우선순위가 있다고 가정하였을 때의 모형이고, 그림11.(b)는 반대로 가정하였을 때의 모형이다. 그림12.와 그림13.은 그림11.(a)와 그림11.(b)에 대한 각각의 기여도 출력 스펙트럼이다. 그림12.와 그림13.으로부터 우선순위를  $X_1(t)$ 로 두느냐, 또는  $X_2(t)$ 로 두느냐에 따라 10Hz 부근에서의 결과는 전혀 상반되게 나옴을 알 수 있다. 따라서 그림11.의 (a)와 (b), 두 모형에서 어느 모형이 타당한지를 규명하기 위하여 입력  $X_1(t)$ 와  $X_2(t)$  사이의 임펄스 응답함수를 구하여 보았다. 그림14.는 두 입력 사이의 임펄스 응답함수를 나타낸 것으로서 "-" 시간영역에서의 신호를 비교

해 볼 때  $X_1(t)$ 가  $X_2(t)$ 에 영향을 주는것임을 알 수 있으며, 이로부터 그림11.(a)의 모형과 그림12.의 결과로 해석하는 것이 타당함을 알 수 있는데, 이는 처음에 입력  $X_1(t)$ 에 우선순위를 준 것과 일치한다. 따라서 출력 스펙트럼에서 10Hz 부근의 피크는 입력  $X_1(t)$ 로 인해 발생하는 것임을 알 수 있다.

#### 5. 결론

본 연구에서는 다입력/단일출력 모형을 이용한 소음/진동원 규명시, 입력들 사이에 상호상관이 존재하여 부분 기여도 함수를 사용하는 경우 입력들 사이의 우선순위를 결정한 방법을 제시하였다.

먼저 질량, 스프링, 감쇠와 등으로 구성된 구조물에서 발생한, 원인-효과관계에 있는 두 신호 사이에서 원인-효과관계를 만족할 때와 그 반대 경우의 임펄스 응답함수를 유한 개의 이산신호를 처리하는 컴퓨터를 이용하여 구하였을 때에 나타나는 특성을 알아 보았으며, 이로부터 신호들 사이에서 원인-효과관계를 만족 못하는 경우 임펄스 응답함수의 "-" 시간영역에서도 "+" 시간영역에서와 비등한 수준의 신호가 발생하는 것을 알 수 있었다. 또한 우선순위를 알고 있는 2입력/1출력 모형에 이를 적용하여 봄으로써 제시한 방법이 우선순위를 올바르게 결정할 수 있음을 알 수 있었다.

#### \* 참고 문헌

1. M.E. Wang and Malcolm J. Crocker, "On the Application of Coherence Techniques for Source Identification in a Multiple Noise Source Environment," J. Acoust. Soc. Am. 74(3), 861-872, 1983.
2. J.S. Bendat and A.G. Piersol, Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis (Wiley, New York, 1980).
3. J.S. Bendat, "Modern Analysis Procedures for Multiple Input/Output Problems," J. Acoust. Soc. Am. 68(2), 498-503, 1980.
4. J.S. Bendat and A.G. Piersol, RANDOM DATA : Analysis and Measurement Procedures, (Wiley, New York, 1986).
5. J.S. Bendat, "Solutions for the Multiple Input/Output Problems," Journal of Sound and Vibration, " 44(3), 311-325, 1976.
6. A. Papoulis, The Fourier Integral and Its Applications (McGraw-Hill, New York, 1962).
7. E. Oran Brigham, The Fast Fourier Transform (Prentice-Hall, 1974).

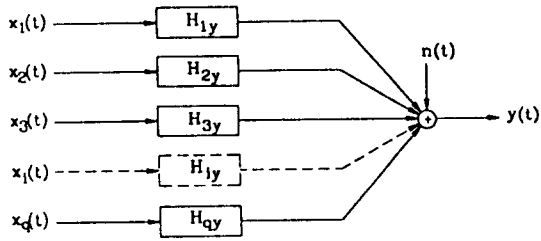


그림 1. 임의의 입력들에 대한 다입력/단일출력 모형

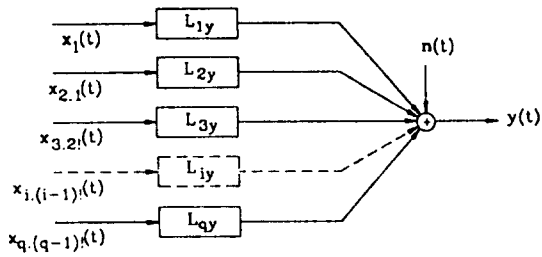


그림 2. 우선순위를 고려한 다입력/단일출력 모형

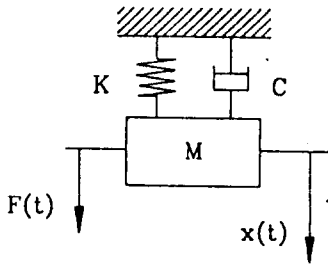


그림 3. 1자유도계 모형

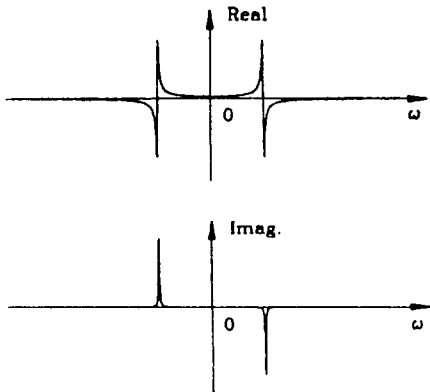


그림 4. 주파수 응답함수 :  $H_1(\omega)$

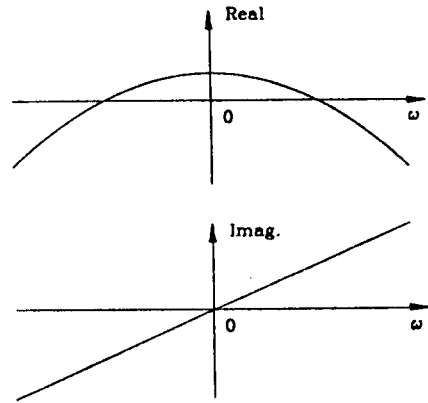


그림 5. 주파수 응답함수 :  $H_2(\omega)$

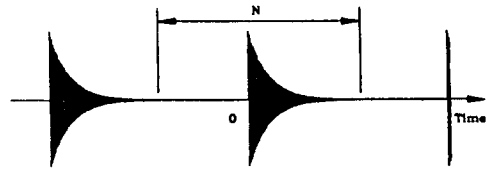


그림 6. 원인-효과관계를 만족하는 임펄스 응답함수

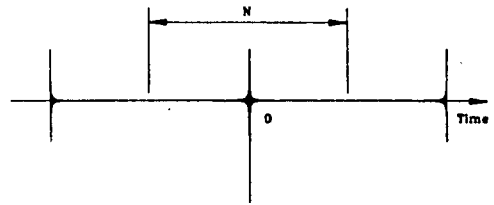


그림 7. 원인-효과관계가 뒤바뀐 임펄스 응답함수

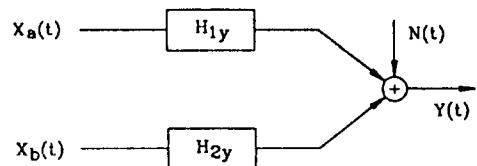


그림 8. 2입력/1출력 모형

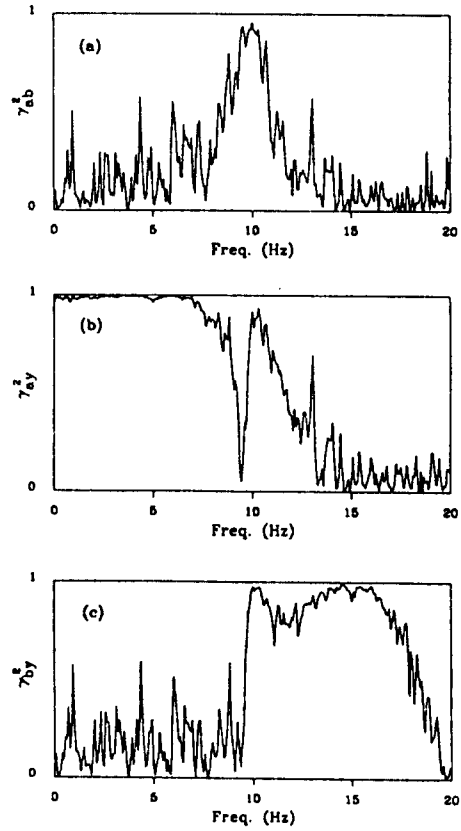
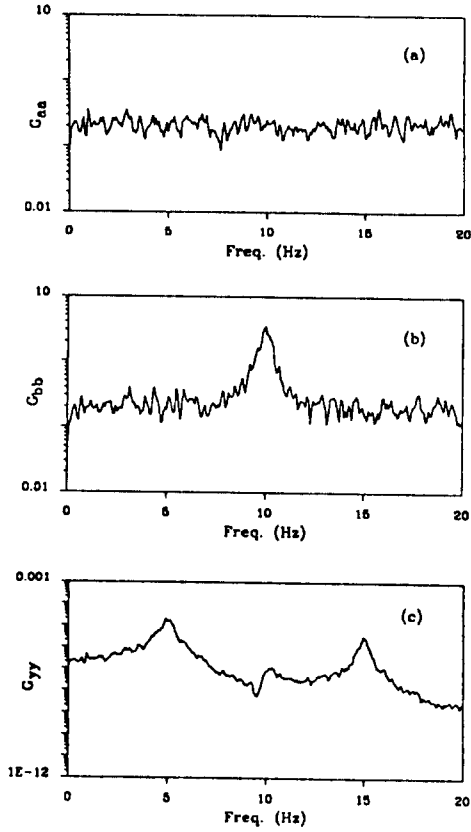
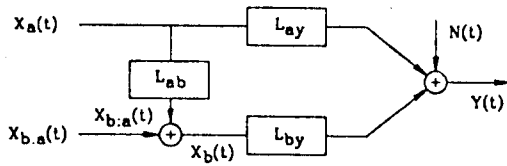
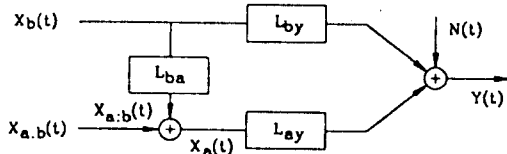


그림 9. 입력과 출력의 자기 스펙트럼

- (a)  $X_a(t)$ 의 자기 스펙트럼
- (a)  $X_b(t)$ 의 자기 스펙트럼
- (a)  $Y(t)$ 의 자기 스펙트럼



(a)  $X_a(t)$ 가  $X_b(t)$ 보다 우선순위가 있는 모형 1



(b)  $X_b(t)$ 가  $X_a(t)$ 보다 우선순위가 있는 모형 2

그림 11. 우선순위에 따른 모형

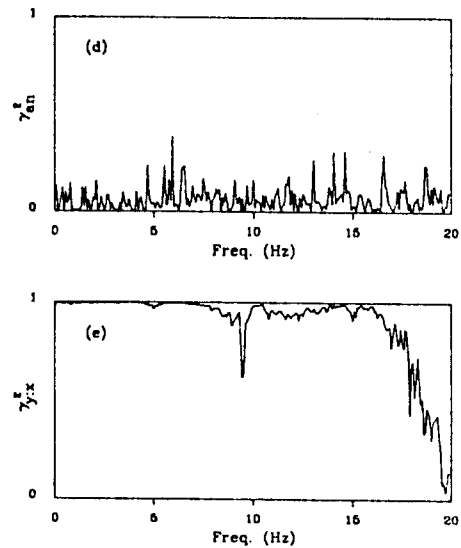


그림 10. 기여도 함수 및 다중 기여도 함수

- (a)  $X_a(t)$ 와  $X_b(t)$ 사이의 기여도 함수
- (b)  $X_a(t)$ 와  $Y(t)$ 사이의 기여도 함수
- (c)  $X_b(t)$ 와  $Y(t)$ 사이의 기여도 함수
- (d)  $X_a(t)$ 와  $N(t)$ 사이의 기여도 함수
- (e) 다중 기여도 함수

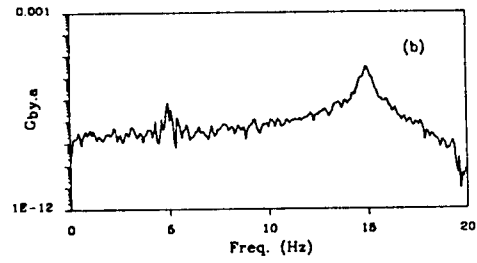
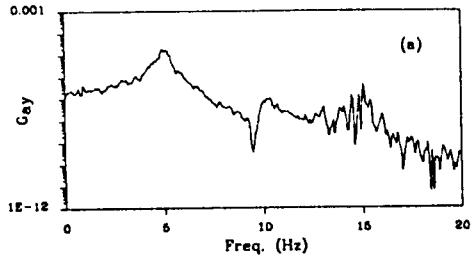


그림 12. 모형 1 에 대한 기여도 출력 스펙트럼  
 (a)  $X_a(t)$  의 기여도 출력 스펙트럼  
 (b)  $X_a(t)$  의 선형성을 제거한  $X_b(t)$  의 기여도 출력 스펙트럼

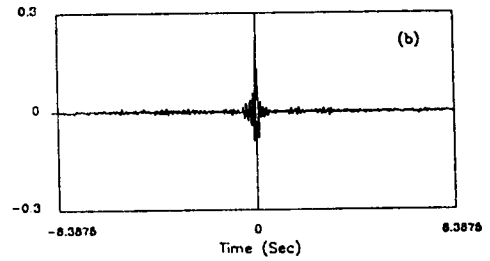
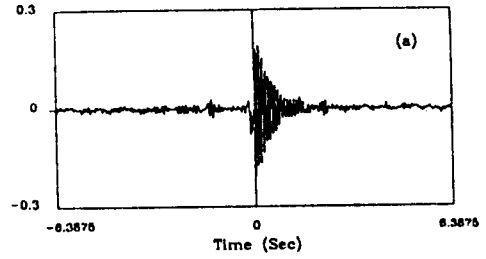


그림 14. 임펄스 응답함수  
 (a)  $X_a(t)$  에 우선순위를 둔 경우의 임펄스 응답함수  
 (b)  $X_b(t)$  에 우선순위를 둔 경우의 임펄스 응답함수

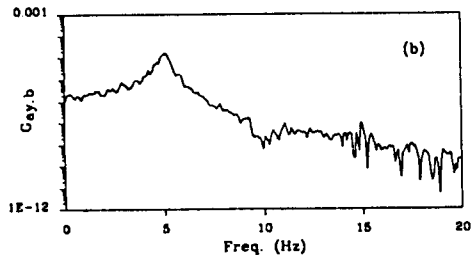
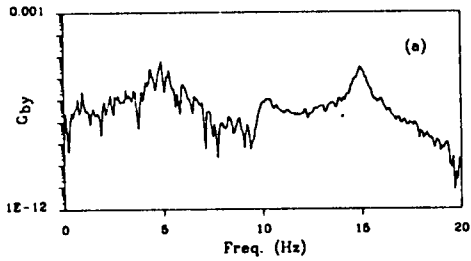


그림 13. 모형 2 에 대한 기여도 출력 스펙트럼  
 (a)  $X_b(t)$  의 기여도 출력 스펙트럼  
 (b)  $X_b(t)$  의 선형성을 제거한  $X_a(t)$  의 기여도 출력 스펙트럼