

## 비선형시스템의 새로운 통계적 선형화방법

이장규

서울대학교 제어계측공학과

이연석<sup>o</sup>

서울대학교 제어계측공학과

A New Statistical Linearization Technique  
of Nonlinear System

Jang Gyu Lee

Seoul National Univ.

Yeon Seok Lee

Seoul National Univ.

## ABSTRACT

A new statistical linearization technique for nonlinear system called covariance matching method is proposed in this paper. The covariance matching method makes the mean and variance of an approximated output be identical real functional output, and the distribution of the approximated output have identical shape with a given random input. Also, the covariance matching method can be easily implemented for statistical analysis of nonlinear systems with a combination of linear system covariance analysis.

Keyword : nonlinear error analysis, stochastic linearization.

## 1. 서 론

비선형시스템 제어기의 설계를 위하여서는 먼저 그 제어대상시스템의 정확한 성능분석이 필요하며, 또한 이미 구성된 시스템의 성능을 향상시키기 위하여서는 그 시스템의 성능분석이 요구된다. 특히, 시스템이 불확실성을 지니고 있을 경우에는 그 입력력에 대한 통계적인 특성의 파악이 중요한 문제이다.

시스템의 통계적특성은 시스템의 상태변수가 정규분포를 갖는다고 가정하여 분석된다. 정규분포는 평균값과 분산의 2개의 변수만으로 그 특성이 결정되므로 다루기가 편리한 잇점이 있으며, 자연계의 대부분의 불확실한 정보들이 정규분포로 모델링될 수 있고, 또한 여러가지의 불확실한 정보들의 합은 정규분포로 근사될 수 있다는 등의 장점들이 매우 많다. 그러나 시스템에 비선형요소가 포함되어 있을 경우에는 선형요소와는 달리 해석적인 방법으로 그 특성을 분석하기가 매우 어렵다. 물론 일부 비선형요소에 대하여서는 해석적인 방법을 사용할 수도 있지만 그것은 소수의 문제들에 제한된다. 따라서 비선형요소의 통계적특성은, 일정한 통계적인 특성을 지니는 입력들을 이용한 반복된 시뮬레이션으로부터 얻어진 출력들의 통계적인 특성에 따라 분석되는 몬테칼로모사법을 이용한다[1]. 그러나, 몬테칼로모사법은 시스템의 반복적인 모사실행으로 인하여 많은 시간 및 계산량이 소요되는 단점이 있다. 따라서 비선형요소들의 통계적특성을 분석하는 보다 빠른 방법이 요구되었다.

비선형요소의 통계적인 특성분석에 있어서 몬테칼로모사법의 단점때문에 이를 사용하기가 어려운 경우에는 비선형요소를 선형화시켜 분석하는 방법을 사용할 수 있다. 이러한 경우에는 대부분 테일러다항식을 사용하여 비선형요소를 선형화시킨 다음, 이를 선형시스템과 같은 방법으로 그 특성을 분석하는 것이 일반적이다. 그러나 이는 테일러다항식에서 사용되는 동작점의 선택에 따라 그 특성이 변화하고, 또한 불확실성에 의한 변화량이 그 동작점부근에서 비교적 선형적인 특성을 나타내게 될 경우에만 어느정도의 의미있는 결과를 얻을 수 있다는 단점이 있다. 물론 전개식의 차수를 증가시켜 정확성을 얻는 방법이 있기는 하지만, 이러한 방법은 추가되는 계산량에 비하여 그리 큰 정확성을 얻지 못한다. 이러한 단점을 해결하기 위한 방법으로 통계적인 선형화방법이 연구되었다.

통계적인 선형화방식은 비선형요소의 출력과 선형시스템의 출력과의 오차가 최소제곱평균치를 갖도록 하는 선형시스템을 구하는 방법으로서 Booton이 처음으로 제안하였다[2]. 이 방법은 비선형요소의 랜덤입력사슬함수(random input describing function)를 이용하여 표현될 수 있으며[3], CADET라는 이름의 프로그램까지 개발되어 사용되기도 한다[4,5]. 그러나 이러한 방법도 테일러전개방법과 마찬가지로 입력의 불확실성이 분포하는 분산정도가 비선형성에 비하여 비교적 적을 경우에만 그 오차가 적으며, 또한 입력이 정규분포를 지니는 경우에만 해석적으로 구할수 있는 단점을 지니고 있다. 특히 입력과 출력이 서로 상관관계가 없을 경우에는 출력의 분산이 0으로 나타나 치명적인 오차가 발생하게 되며, 전반적으로 실제 출력의 분산보다 그 크기가 적게 나타나는 단점이 있다. 따라서 이러한 방법으로 얻은 결과는 실제시스템의 오차범위보다 작은 값을 지시하므로 강인성분석등의 오차해석에 불합리한 점이 많다.

본 연구에서는 이러한 선형화 기법을 사용하지 않고 비선형요소의 출력으로부터 직접 평균치와 그 분산을 구하는 방법을 사용하여, 분석의 결과가 실제시스템의 오차범위에 근접하도록 하는 선형화시키는 공분산정합법(covariance matching method)을 제안하고자 한다. 본 연구의 내용은 비선형요소의 통계적인 특성분석의 새로운 방법인 공분산정합법을 2장에서 설명하고, 3장에서는 시뮬레이션의 결과를, 4장에서는 그

값론을 서술하도록 하였다.

## 2. 비선형요소의 통계적선형화 방법

비선형시스템의 통계적인 특성분석을 위한 비선형요소의 선형화는 그 선형화의 오차를 적게하는 것이 매우 중요하다. 여기에서는 시스템의 오차해석에 있어서의 관심의 대상이 되는 상태변수의 평균과 분산을 정확하게 지시할 수 있는 선형화 방법에 대하여 살펴본다. 식(1)과 같이 주어지는 비선형요소를 선형적으로 근사시키는 방법을 살펴보자.

$$y = f(x) \tag{1}$$

여기에서 입력  $x$ 는 평균  $m$ 과 분산  $\sigma^2$ 를 갖는 랜덤입력이라 하고, 이때의 출력을 통계적인 특성에 따라 선형화시키는 방법으로서 식(2)와 같이 평균값  $M$ 과 랜덤요소의 합으로 표현하는 방법을 고려할 수 있으며, 이때의 랜덤요소는 입력의 랜덤요소인  $(x-m)$ 이 출력에 선형적으로 나타난다고 가정한다.

$$\bar{y} = M + N \cdot (x-m) \tag{2}$$

식(1)의 비선형요소를 식(2)와 같은 형태로 근사시킬 때의 근사식의 평가지표를 실제출력  $y$ 의 평균값과 근사식의 출력  $\bar{y}$ 와의 평균과 분산이 서로 같도록 선택하면 식(2)에서의  $M$ 과  $N$ 은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$E\{y\} = E\{\bar{y}\} = E\{M + N \cdot (x-m)\} \\ = M$$

$$E\{(y - E\{y\})^2\} = E\{(\bar{y} - E\{\bar{y}\})^2\} \\ = N^2 \cdot E\{(x-m)^2\}.$$

$$M = E\{\bar{y}\} = E\{y\} \tag{3}$$

$$N^2 = \frac{E\{(y - E\{y\})^2\}}{E\{(x-m)^2\}} = \frac{E\{y^2\} - M^2}{E\{(x-m)^2\}} \tag{4}$$

식(3)과 식(4)와 같이 구한  $M$ 과  $N$ 을 이용하여 식(2)와 같은 형태의 근사식을 구할 수 있다. 이와 같은 형태의 근사식은 식(1)의 비선형식을 선형화시킨 것과는 다르다. 실제로  $M$ 은  $m$ 과  $\sigma$ 의 복잡한 비선형식으로 표현되며  $N$ 도 마찬가지이다. 다만 비선형요소의 출력  $y$ 를 비랜덤요소와 랜덤요소로 구분하여 표현하되 입력의 평균과 랜덤요소의 합수로 표현하였을 따름이다. 그러나 시스템에 비선형요소가 포함되어 있을 경우에는 이러한 형태로 비선형요소를 표현하여 선형시스템에서와 같은 방법으로 시스템의 오차분석을 공분산해석으로 직접 처리할 수 있는 장점을 지니게 된다. 특히 기존의 테일러다항식을 이용한 선형화 방법이나 CADET 등이 지니는 단점들을 모두 해결할 수 있으며, 보다 정확한 비선형요소의 오차분석결과를 나타낸다. 또한 CADET에서와 마찬가지로 입력의 분산형태가 정규분포를 지니고 있을 경우에는  $M$ 과  $N$ 을 모두 해석적인 방법으로 구할 수 있으며, 다음에서는 몇가지 형태의 비선형요소에 대하여 해석적으로 이들을 구하는 방법을 살펴보도록 하겠다.

### 2.1 멱급수다항식 ( polynomial nonlinearity )

식(5)와 같이 주어지는 멱급수다항식의 선형화변수  $M$ 과  $N$ 을 구하여 보자. 이와 같은 비선형요소의  $M$ 과  $N$ 은 식(3)과 식(4)를

랜덤요소에 대하여 직접 적분하여 구할 수 있다.

$$y = \sum_n c_n \cdot x^n, \quad x \sim N(m, \sigma^2) \tag{5}$$

$$M = E\{y\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_n c_n \cdot x^n \right) \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \cdot dx \tag{6}$$

$$N^2 \cdot \sigma^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_n c_n \cdot x^n \right)^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \cdot dx - M^2 \tag{7}$$

여기에서 식(6)과 식(7)의 적분을 직접 계산하는 것은 상당히 복잡한 작업이다. 따라서 식(8)과 같은 직교성을 지닌 Hermite polynomial을 사용하면 이와 같은 적분을 대수적인 계산으로 용이하게 수행할 수 있다[3].

$$H_0(u) = 1$$

$$H_1(u) = u$$

$$H_2(u) = u^2 - 1$$

$$H_3(u) = u^3 - 3u$$

$$H_{k+1}(u) = u \cdot H_k(u) - k \cdot H_{k-1}(u)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_j(u) \cdot H_k(u) \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot du = \begin{cases} k! , & \text{if } j = k \\ 0 , & \text{if } j \neq k \end{cases} \tag{8}$$

식(8)과 같이 주어지는 Hermite polynomial을 이용하기 위하여 식(6)과 식(7)에서의 적분식내에서  $x$ 를  $\sigma u + m$ 으로 치환하여 정리하면 대수적인 계산만으로  $H_0(u)$ 의 계수를 구할 수 있다. 이와 같이 구한  $H_0(u)$ 의 계수는 Hermite polynomial의 직교성에 따라 식(6)과 식(7)에서의 적분값이 된다.

$$M = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_n c_n \cdot (\sigma \cdot u + m)^n \right) \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \sigma \cdot du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_k d_k \cdot H_k(u) \cdot H_0(u) \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot du$$

$$= d_0 \tag{9}$$

$$N^2 \cdot \sigma^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_n c_n \cdot (\sigma \cdot u + m)^n \right)^2 \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \sigma \cdot du - M^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_k s_k \cdot H_k(u) \cdot H_0(u) \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot du - M^2$$

$$= s_0 - M^2 \tag{10}$$

### 2.2 삼각함수 ( Trigonometric nonlinearity )

비선형요소가 삼각함수로 나타나는 경우에는 앞의 다항식의 형태보다는 좀 더 복잡하게 구해진다. 식(11)과 같이 나타나는 삼각함수에 대하여  $M$ 과  $N$ 을 구하여 보도록 하자. 이는 Bessel함수의 직교성을 이용할 수도 있지만[3] 여기에서는 복잡성을 피하기 위하여 간단한 경우에서의 제안된 방법의 사용을 보이기로 한다.

$$y = \cos(x), \quad x \sim N(m, \sigma^2) \tag{11}$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \right) e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x-m}{\sigma} \right)^2} dx$$

$$= e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \cdot \cos(m)$$

$$E\{y^2\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \right)^2 e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x-m}{\sigma} \right)^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot e^{-2\sigma^2} \cdot \cos(2m)$$

$$N^2 \cdot \sigma^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot e^{-2\sigma^2} \cdot \cos(2m) - e^{-\sigma^2} \cdot \cos^2(m)$$

2.3 구간적 선형함수 ( Piecewise-linear function )

구간적으로 선형적인 특성을 지니는 비선형요소로는 포화함수, 양자화함수, 불감대를 지닌 함수등으로 제어계에 자주 사용되는 형태가 많다. 이들을 식(2)와 같은 형태로 표현하기 위하여 M과 N을 구할 때에는 정규분포함수의 특성을 이용하면 유리한 점이 많다. 이를 위하여 식(12)와 같은 보조함수들을 정의하여 표현하기로 하자.

$$PF(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$PI(x) = \int_{-\infty}^x PF(s) ds \tag{12}$$

$$GI(x) = \int_{-\infty}^x PI(s) ds$$

식(12)와 같은 보조함수들을 사용하여 식(13)과 같이 표현되는 포화함수를 식(2)와 같은 형태로 표현하여 보도록 하자.

$$y = \begin{cases} x, & \text{if } |x| \leq a \\ a \cdot \text{sign}(x), & \text{if } |x| > a \end{cases}, x \sim N(m, \sigma^2) \tag{13}$$

$$M = \sigma \cdot \left[ GI\left(\frac{a+m}{\sigma}\right) - GI\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) \right] - m$$

$$N^2 \cdot \sigma^2 = a^2 - (\sigma^2 + m^2 - a^2) \cdot M_1 + 2\sigma \cdot m \cdot M_F - a \cdot M_{BF}$$

$$M_1 = PI\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) - PI\left(\frac{-a-m}{\sigma}\right)$$

$$M_F = PF\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) - PF\left(\frac{-a-m}{\sigma}\right)$$

$$M_{BF} = \left[ \frac{a-m}{\sigma} \right] \cdot PF\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) - \left[ \frac{-a-m}{\sigma} \right] \cdot PF\left(\frac{-a-m}{\sigma}\right)$$

이상과 같이 비선형요소애 단일입력이 인가되었을 경우의 선형화과정을 살펴보았다. 단일입력이 인가된 경우에는 식(3)과 식(4)와 같이 얻을수 있는 M과 N으로서 식(2)의 형태를 얻을 수 있었으나, 입력이 여럿일 경우에는 그리 단순하지는 않다. 그 예로서 여러개의 입력을 지니는 식(14)와 같은 비선형요소를 식(15)와 같은 형태로 각 입력의 랜덤요소가 출력의 랜덤요소애 선형적으로 표현될 수 있도록 하는 문제를 고려하여 보도록 하자.

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x \sim N(m, P) \tag{14}$$

$$\bar{y} = M + N^T \cdot (x - m) \tag{15}$$

먼저 출력 y의 평균값 M은 식(14)의 평균값과 식(15)의 평균값을 같게하여 직접 구할 수 있다. 즉, 단일입력일 때의 식(3)과 같이 식(15)에서의 M도 식(16)과 같이 주어진다. 또한 N도 역시 식(4)에서와 같이 구하기 위하여 실제출력의 분산과 근사식의 출력의 분산을 같게 하여 정리하면 식(17)과 같이 주어진다.

$$M = E\{y\} = \frac{1}{2\pi |P|} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot e^{s^T} \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot \dots \cdot dx_n \tag{16}$$

$$s = -\frac{1}{2} (x - m)^T \cdot P^{-1} \cdot (x - m)$$

$$E\{(y - M)^2\} = E\{(\bar{y} - E\{\bar{y}\})^2\} = E\{(M + N^T \cdot (x - m) - M)^2\} = N^T \cdot P \cdot N \tag{17}$$

그러나 식(17)과 같이 주어지는 N을 구하는 문제는 쉽지 않다. 식(17)에서보면 미지수인 벡터 N의 요소는 n개가 있으나 N을 구할 수 있는 방정식은 단 하나 뿐이므로 식(17)을 만족하는 해는 수없이 많이 있을 수 있기 때문이다. 특히 출력의 분산정도를 결정하는 요인인 각 입력들의 분산정도가 출력에 독자적으로 영향을 끼친다고 한다면 문제는 쉬울 수 있으나, 여러입력들의 상호작용으로 나타나는 항들이 존재하므로 이 문제는 그리 단순하지는 않다.

여기에서는 N을 결정하는 한가지 방법을 서로 상관관계가 없는 2개의 입력으로 구성된 비선형요소를 예로 들어 설명하고자 한다. 식(18)과 같이 표현되는 비선형요소의 출력을 식(15)와 같은 형태로 나타내도록 하는 N을 구하여 보도록 하자.

$$y = x_1^2 \cdot x_2 \tag{18}$$

여기에서 x<sub>1</sub>은 평균 m<sub>1</sub>, 분산 σ<sub>1</sub><sup>2</sup>을 가지며, x<sub>2</sub>는 평균 m<sub>2</sub>, 분산 σ<sub>2</sub><sup>2</sup>을 가지고, 이들은 서로 상관관계가 없다고 하면 E{x<sub>1</sub> · x<sub>2</sub>}는 m<sub>1</sub> · m<sub>2</sub>로 나타난다. 이들을 이용하여 주어진 비선형요소의 출력을 구하면, 그 평균과 분산을 식(19)와 같이 나타낼 수 있다.

$$M = E\{y\} = m_1^2 \cdot m_2 + \sigma_1^2 \cdot m_2$$

$$E\{(y - E\{y\})^2\} = E\{y^2\} - M^2 = (4 \cdot m_1^2 \cdot m_2^2) \cdot \sigma_1^2 + m_1^4 \cdot \sigma_2^2 + (6 \cdot m_1^2 + 3 \cdot \sigma_1^2) \cdot \sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 \tag{19}$$

식(19)와 같이 나타나는 출력의 분산을 살펴보면, 출력의 랜덤요소는 두 입력의 평균과 분산의 복잡한 형태로 결정됨을 알 수 있다. 출력의 분산인 식(19)식에서 오른쪽의 첫번째 항은 x<sub>1</sub>의 랜덤요소애 의한 출력의 랜덤요소이고, 두번째 항은 x<sub>2</sub>의 랜덤요소애 의한 출력의 랜덤요소이다. 이와 같이 입력의 랜덤요소가 출력의 랜덤요소애 끼치는 영향을 구분할 수 있는 경우도 있지만 식의 세번째의 항과 같이 x<sub>1</sub>의 랜덤요소와 x<sub>2</sub>의 랜덤요소가 혼합되어 출력의 랜덤요소애 영향을 미치는 항들도 발생되게 된다. 이러한 경우에는 x<sub>1</sub>과 x<sub>2</sub>의 랜덤요소들이 균일하게 출력에 영향을 끼치는 것으로 고려할 수 있으며, 이들의 효과를 절반씩 나누어 처리할 수 있다. 이와 같이 구한 N<sub>1</sub>과 N<sub>2</sub>는 식(20)과 같이 나타난다.

$$N_1^2 = 4 \cdot m_1^2 \cdot m_2^2 + 2 \cdot \sigma_1^2 \cdot m_2 + \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot \sigma_1^2 + 6 \cdot m_1^2) \cdot \sigma_2^2$$

$$N_2^2 = m_1^4 + \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot \sigma_1^2 + 6 \cdot m_1^2) \cdot \sigma_1^2 \tag{20}$$

이상과 같이 식(1)로 주어지는 비선형요소를 식(2)의 형태로 입력의 랜덤요소와 출력의 랜덤요소가 선형적인 관계를 나타내도록 하는 근사방법에 대하여 살펴보았다. 이 근사방법은 비선형요소의 출력을 그 입력의 통계적인 특성으로 표현하되, 그 근사식의 분산과 평균을 실제 출력의 분산과 평균과 같도록 하는 방법이다. 또한 식(2)에서 알 수 있듯이 출력의 랜덤요소는 입력의 랜덤요소가  $N$ 배 증폭되어 나타난 형태이므로, 그 분포형태는 입력의 분포형태와 같도록 근사한 것이다. 단지, 그 평균과 분산을 실제의 것과 같도록 하였다.

실제의 경우에 있어서는 비선형요소의 출력은 그 분포형태가 입력의 분포형태와 같지 않다. 따라서 근사식의 가정은 오차를 유발시키게 된다. 그러나 대체적으로 시스템에서는 여러 개의 랜덤요소들이 복합적인 상호관계를 갖고 있으며, 비선형요소의 출력은 다른 랜덤요소를 지닌 출력들과 섞여서 다른 요소의 입력으로 사용되는 경우가 많다. 이와 같은 경우에는 중앙극한값정리에 의하여 여러 랜덤요소들이 섞여진 상태에서의 분포는 정규분포로 간주하여도 시스템의 오차해석에는 큰 무리가 없다.

### 3. 시뮬레이션

2장에서 제안한 공분산정합법에 의한 비선형요소의 선형화방법의 유용성을, 몇가지 비선형요소에 대하여 지금까지 사용되어 오던 다른 방법들과 비교 분석하여 보도록 하겠다. 식(1)의 비선형요소를 식(2)의 형태로 근사시키는 방법들중에서 테일러다항식을 이용하는 방법과 CADET, 그리고 제안된 방법을 식(21)과 같이 주어지는 역급수다항식의 비선형요소에 대하여 살펴보도록 하겠다. 여기에서 입력은 평균  $m$ 과 분산  $\sigma^2$ 의 정규분포를 갖는다고 가정한다.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x, \quad x \sim N(m, \sigma^2) \quad (21)$$

식(21)과 같이 주어지는 비선형요소에 대하여 테일러다항식의 1차항까지를 이용한 선형화된 형태는 식(22)와 같이 주어지며, 테일러다항식의 3차항까지를 고려한 선형화된 형태는 식(23)과 같이 주어진다. 또한 CADET은 식(24)와 같이 나타나며, 이를 공분산정합법을 이용하여 선형화시키면 식(25)와 같이 주어진다. 이들의 형태를 살펴보면, 테일러 전개식보다는 CADET이 조금 더 복잡한 형태를 취하고 있으며, 이보다는 공분산정합법이 훨씬 더 복잡한 형태를 취하고 있음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} TSE1; M &= m^3 - 3m^2 + 2m \\ N &= 3m^2 - 6m + 2 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} TSE3; M &= m^3 - 3m^2 + 2m + 3m\sigma^2 - 3\sigma^2 \\ N &= 3m^2 - 6m + 2 + 3\sigma^2 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} CADET; M &= m^3 - 3m^2 + 2m + 3m\sigma^2 - 3\sigma^2 \\ N &= 3m^2 - 6m + 2 + 3\sigma^2 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} CM; M &= m^3 - 3m^2 + 2m + 3m\sigma^2 - 3\sigma^2 \\ N^2 &= (3m^2 - 6m + 2)^2 + 15\sigma^4 \\ &\quad + \{12 \cdot (3m^2 - 6m + 2)\} \cdot \sigma^2 \end{aligned} \quad (25)$$

이와 같은 선형화된 모델에서 분산 0.1을 지니는 입력의 평균을 -1에서 1까지 변화시켜가며, 각 근사식의 출력의 평균과 분산을 구하면, 그림1.과 같이 나타난다. 그림에서 출력의 평균은

테일러다항식의 1차항까지를 사용한 방법을 제외하고는 나머지 방법 모두가 같은 값을 지시하고 있음을 알 수 있다. 그러나 분산의 경우에 있어서는 각 방법이 모두 다른 값을 지시하고 있는데, 본 논문에서 제안한 방법은 해석적으로 구한 출력의 분산이므로, 각 방법의 오차는 이 공분산정합법과의 차이로 나타난다. 특히, 입력의 평균이 0.4 근처에서는 공분산정합법을 제외한 모든 방법이 출력의 분산을 0으로 근사하고 있으며, 이는 각 근사방법이 실제의 상황을 묘사하는데 실패하고 있음을 보여주고 있다.

이와 같은 결과는 비선형요소가 삼각함수로 나타나는 경우에서도 살펴볼 수 있다. 식(11)로 주어지는 삼각함수의 비선형요소로서 각 방법을 사용하여 얻은 근사식으로부터 분산 0.5를 갖는 입력의 평균을 -4부터 4까지 변화시켜가며 얻은 시뮬레이션의 결과는 그림2.와 같이 나타난다. 이 그림에서도 앞서와 마찬가지로 다른 방법들은 출력의 분산을 0으로 하는 부분들이 있으나, 공분산정합법만이 출력의 분산을 제대로 나타내고 있다. 또한 입력의 평균을 1.0에 고정시키고 분산이 증가함에 따라 각 근사식의 출력을 도사하여 보면, 그림3.과 같이 얻을 수 있다. 삼각함수에서는 입력의 평균에 관계없이 그 분산이 충분히 크면, 그 출력의 분산은 0.5로 평균은 0으로 접근하게 된다. 그림3.에서 공분산정합법은 이와 같은 사실을 보여주고 있으나, 다른 근사방법들은 이와 같은 사실에 부합되지 않는다.

이상과 같은 결과들에서 한가지 중요한 사실을 살펴보면, 입력의 분산이 커짐에 따라 다른 방법들은 실제 출력의 분산보다 점점 적은 값을 지시하게 된다는 점이다. 시스템에서 오차분석의 결과를 제어기의 구성이나 시스템의 안정성을 검토하려고 할 때, 실제 시스템의 불확실성보다 적은 불확실성을 가정하여 얻은 결과는 시스템이 이보다도 큰 불확실성을 지니고 있을 경우에는 아무런 정보를 주지 못한다. 따라서 그림에서 살펴본 바와 같이 테일러다항식을 사용하는 근사식이나 CADET은 그 사용이 의미가 없을 경우가 발생하지만, 본 논문에서 제안하는 공분산정합법은 항상 실제 출력의 분산과 같은 크기의 분산을 지시하여 주므로 어떠한 입력상황에서도 의미가 있는 결과를 제시하여 주는 큰 장점을 지니고 있다.

### 4. 결 론

이상과 같이 평균치와 분산에 대하여 비선형요소를 선형화시키는 새로운 방법에 대하여 고찰하여 보았다. 이 방법은 비선형요소의 출력으로부터 해석적으로 그 평균값과 분산을 구하고, 이로부터 선형화시키는 요소들을 계산하여 낸다. 이와 같은 선형화기법은 비선형요소가 포함되어 있는 시스템에 선형시스템의 오차분석기법을 사용할 수 있는 여건을 제공하여 주어, 몬테카를로모사법이 지니는 많은 시간과 노력을 감소시켜준다.

실제로 이러한 방법은 선형화라고 하기보다는 랜덤입력의 비선형요소를 당시의 입력특성에 따라 새로운 모델로서 그 요소를 설명하는, 말하자면, 비선형요소의 통계적선형모델이라 할 수 있다. 즉, 비선형요소를 선형화시키는 것이 아니고, 입력에 따르는 비선형성은 그대로 유지하고 그 상태에서 출력의

랜덤요소를 입력의 랜덤요소와 같은 형태로 가정하고 단지 그 평균과 분산을 정확히 표현할 수 있도록 하는 모델을 구하는 것이다. 따라서 평균과 분산 이외의 출력의 분포형태등을 살펴보고자 할 경우에는 오직 몬테칼로모사법만이 그 의미를 갖게 되는데, 실제로 이 방법도 모사실행을 통한 표본집단으로부터 원하는 정보를 추정하는 것이므로 정확한 정보를 주지는 못한다.

본 논문에서 제안한 방법은 테일러 전개식을 이용하는 선형화방법이나 또다른 통계적인 선형화방법을 이용하는 방법들에 비하여 복잡한 형태를 지니고 있는 반면에 출력의 정확한 평균과 분산을 제공하여 주어, 종래의 방법들을 사용할수 없는 경우에도 사용할수 있는 장점을 지니고 있다. 따라서 시스템의 오차분석에 있어서 매우 유리하게 사용될 수 있다.

REFERENCE

[1] Malvin H. Kalos and Paula A. Whitlock, "Monte Carlo

Methods - Volume I : Basics," John Wiley & Sons Inc., New York, 1986.

[2] Rehard C. Booton, Jr., "Nonlinear Control Systems with Random Inputs," Transactions of the IRE, Professional Group on Circuit Theory, Vol. CT-1, March 1954, No. 1, pp. 2 - 7.

[3] Gelb, A. and Vander Velde, V.E., "Multiple-Input Describing Functions and Nonlinear System Design," McGraw-Hill Book Co., New York, 1968.

[4] Gelb, A. and R.S. Warren, "Direct Statistical Analysis of Nonlinear Systems: CADET," AIAA Journal, Vol. 11, No. 5, May 1973, pp. 689-694.

[5] James H. Taylor, "Handbook for the Direct Statistical Analysis of Missile Guidance Systems via CADET<sup>TM</sup>," The Analytic Sciences Corp., Report No. TR-385-2, May 1975.

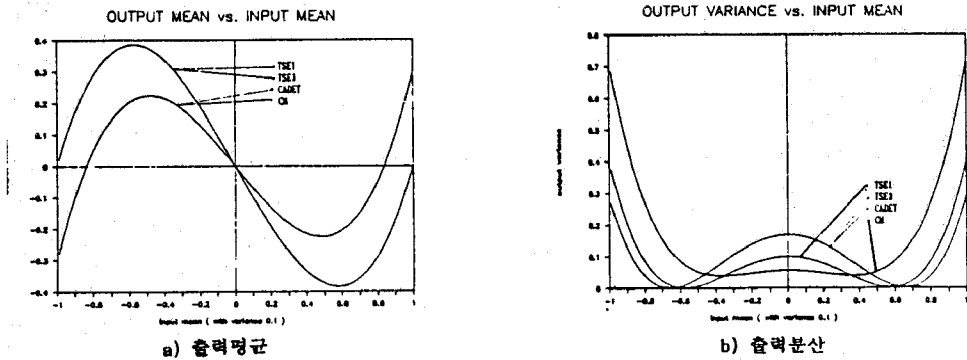


그림1. 역급수다항식의 각 근사식의 결과 ( 입력분산 0.1 )

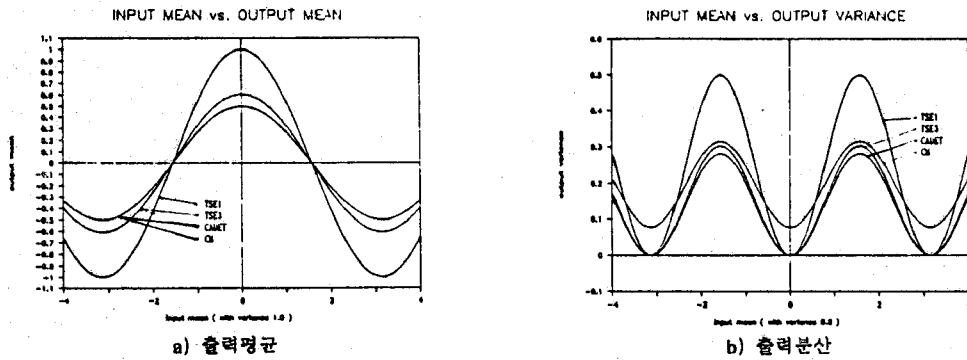


그림2. 삼각함수의 각 근사식의 결과 ( 입력분산 0.5 )

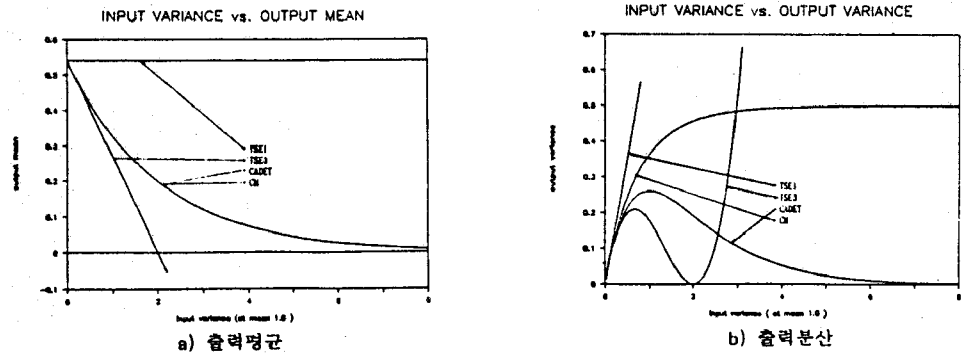


그림3. 삼각함수의 각 근사식의 결과 ( 입력평균 1.0 )