

포화 특성 해석을 위한  
복소 고조파 유한 요소해석법

정용식<sup>o</sup> 박관수 한승엽

( 서울대학교 )

Finite Element Method using Complex Harmonics  
for analyzing saturation characteristics

Chung Young-Seek Park Gwan-Soo Hahn Song-Yop

( Seoul National University )

ABSTRACT

The Complex Harmonic Balance Finite Element Method (CHBFEM) is discussed for the time - periodic magnetic field with saturation characteristics. And  $J\omega$  - method which is used for analyzing liner system with sinusoidal voltage input can be generalized in nonlinear time-periodic magnetic field system.

The CHBFEM enables us to calculate the each harmonic magnetic flux distribution and the distortion of currents resulting from material at an AC voltage source and to save calculating time, the number of calculation and computer memory.

서 언

최근까지 전기 기기에서 해석의 간편성을 위하여 시스템의 변수를 선형으로 근사화시켜 결과를 얻었다. 특히 철의 포화특성은 시스템이 선형영역에서 동작한다고 가정하고 해석을 해왔다. 만약 포화특성을 고려할 경우 시간을 등간격으로 세분하여 시스템을 해석하였다. 하지만 정확도가 높은 해석을 요구할 때 예는 이 방법은 한 주기에서도 많은 간격으로 세분하여야 그 해가 정확하고 인덕턴스가 있는 모델의 경우 시상수로 인하여 정상상태에 이르는데 많은 시간이 소비된다. 그래서 이러한 문제들을 해결하고자 많은 방법들이 제시되었으나 다분히 경험적인 요소를 필요로 하고 해로부터 고조파성분을 분리 계산할 수 없는 단점을 지니고 있다. 본 논문에서 제시한 복소 고조파 성분을 이용한 유한요소 해석법 (Complex Harmonic Balance Finite Element Method : CHBFEM) 은 이러한 문제점 등을 해결하고 정상 상태시 비선형 해석을 위한 알고리즘을 제시함으로써 자기 벡터 포텐셜 (Magnetic Vector Potential) 각 고조파 성분을 정확하게 알아낼수 있을 뿐만아니라 전류의 고조파 성분으로 인한 파형의 일그러짐 등을 한 눈에 볼 수 있도록 하였다.

본 논문에서 사용한 B-H 포화곡선은 다항식으로 근사시키고 모델은 리액터 (Reactor)로서 도체가 없는 것으로 하였다.

정식화

지배방정식은 크게 전자장 지배 방정식과 회로 방정식으로 나뉘어 진다.

1.1 전자장 지배방정식

변위 전류를 무시한 전자장 방정식은 Maxwell 방정식으로 부터 다음과 같이 주어진다.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_o + \vec{J}_e \quad \dots\dots\dots(1-1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \dots\dots\dots(1-2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \dots\dots\dots(1-3)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \dots\dots\dots(1-4)$$

$$\vec{J}_o = \sigma \vec{E} \quad \dots\dots\dots(1-5)$$

본 논문에서 해석한 모델은  $\sigma = 0$  이고  $\vec{J}_e = 0$  이다. 식 (1-3) 에서 자기벡터 포텐셜 (Magnetic Vector Potential)  $\vec{A}$  는 다음식과 같이 정의된다.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \dots\dots\dots(1-6)$$

(1-6) 식을 (1-1) 식에 적용한후  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$  인 Coulomb gauge 를 적용하면 식 1은 다음과 같은 방정식으로 표시된다

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) &= \nu (\nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}) \\ &= -\nu \nabla^2 \vec{A} \\ &= \vec{J}_o \quad \dots\dots\dots(1-7) \end{aligned}$$

여기서  $\nu$  는 자기저항률이며  $1/\mu$  주어진다.

1.2 유한 요소 정식화

해석의 간편성을 위하여 다음과 같은 가정을 하였다.

- (i) 해석모델은 Z 축 방향으로 매우 길다.
- (ii) 전류밀도 J 는 Z 축 방향을 따라서 흐른다.
- (iii) 모든 매질은 등방성을 갖는다.

(1-7) 식을 유한요소 정식화 하면

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial A_i} &= \int_{\Omega} (-\nu \nabla^2 A - J_0) N_i \, dx dy \\ &= \int_{\Omega} (\nu \nabla N_i \cdot \nabla A - N_i J_0) \, dx dy \\ &= \int_{\Omega} (\nu \nabla N_i \cdot \nabla A - N_i \frac{T_0}{Q_0} I) \, dx dy \\ &= 0 \dots\dots\dots(1-8) \end{aligned}$$

여기서  $N_i$  : 형상함수 (Shape Function)

$$A = \sum_{i=1}^3 N_i A_i,$$

$A_i$  : 각 절점 에서의 자기 벡터포셜

이제 A, I 를 고조파법 급수로 전개하면

$$A = \sum_{n=odd} |A_n| e^{j(n\omega t + \theta_{A_n})} \dots\dots\dots(1-9)$$

$$B_x = \sum_{n=odd} |B_{xn}| e^{j(n\omega t + \theta_{B_{xn}})} \dots\dots\dots(1-10)$$

$$B_y = \sum_{n=odd} |B_{yn}| e^{j(n\omega t + \theta_{B_{yn}})} \dots\dots\dots(1-11)$$

$$I = \sum_{n=odd} |I_n| e^{j(n\omega t + \theta_{I_n})} \dots\dots\dots(1-12)$$

와 같이 된다.

기술의 간편성을 위하여

$$A_n = |A_n| e^{j(n\omega t + \theta_{A_n})} \dots\dots\dots(1-13)$$

$$B_{xn} = |B_{xn}| e^{j(n\omega t + \theta_{B_{xn}})} \dots\dots\dots(1-14)$$

$$B_{yn} = |B_{yn}| e^{j(n\omega t + \theta_{B_{yn}})} \dots\dots\dots(1-15)$$

$$I_n = |I_n| e^{j(n\omega t + \theta_{I_n})} \dots\dots\dots(1-16)$$

로 약속 하자.

이제 B-H 포화 (Saturation) 특성을 다항식 으로 근사화 하기 위하여 다음과 같은 함수로 가정하자.

$$H = f_{odd}(B), \quad f_{odd} : \text{홀수 차수만 포함 하는 다항 함수}$$

이때 3 차 까지 근사시킬 경우

$$H = \alpha B + \beta B^3$$

이 고  $\nu$  는

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{H}{B} = \alpha + \beta B^2, \quad B^2 = B_x^2 + B_y^2 \\ &= \nu_0 + \sum_{n=even} \nu_n e^{j(n\omega t + \theta_{\nu_n})} \dots\dots\dots(1-17) \end{aligned}$$

와 같이 된다.

이제 식 (1-8), (1-9), (1-10), (1-11), (1-12), (1-17) 에서 다음과 같은 요소 행렬을 만들수 있다.

$$\frac{1}{4\Delta} \left[ \begin{matrix} b_1 & b_j & c_1 & c_j \end{matrix} \right] R \left[ \begin{matrix} A \\ I \end{matrix} \right] - \frac{\Delta}{3} \frac{T_0}{Q_0} \left[ \begin{matrix} A \\ I \end{matrix} \right] = 0$$

여기서  $i, j = 1, 2, 3$

$$\left[ \begin{matrix} A \\ I \end{matrix} \right] = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 & A_5 & A_7 & \dots \\ A_1 & A_3 & A_5 & \dots \\ A_1 & A_3 & A_5 & \dots \dots \dots \end{pmatrix}^T$$

$$\left[ \begin{matrix} I \\ I \\ I \end{matrix} \right] = \begin{pmatrix} I_1 & I_3 & I_5 & \dots \\ I_1 & I_3 & I_5 & \dots \\ I_1 & I_3 & I_5 & \dots \dots \dots \end{pmatrix}^T$$

- $\Delta$  : 요소 단면적
- $T_0$  : 코일 총 턴수
- $Q_0$  : 코일 전 단면적
- $R$  : 자기 저항률 행렬 로서 3 고조파 까지 고려할 경우 다음과 같은 2 x 2 행렬이 된다.

$$\begin{aligned} R_{11} &= \alpha + \frac{\beta}{2} (B_{x1} B_{x1}^* + B_{y1} B_{y1}^* + B_{x3} B_{x3}^* + B_{y3} B_{y3}^*) \\ R_{22} &= R_{11} \end{aligned}$$

$$R_{12} = \frac{\beta}{2} B_{x1} B_{x3}^* + \frac{\beta}{4} B_{x1}^2$$

$$R_{21} = \frac{\beta}{2} B_{x1}^* B_{x3} + \frac{\beta}{4} B_{x1}^2$$

(\* : 공액 복소수)

### 2.1 회로 방정식

회로 방정식은

$$\frac{d\phi}{dt} + ZI = V \dots\dots\dots(2-1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \int \vec{A} \cdot d\vec{l} \\ &= \sum_{j=1}^{NL} \phi_j^* = \sum_{j=1}^{NL} [ (\pm 1) \times \sum_{j=1}^3 \frac{1}{3} \frac{T_0}{Q_0} \Delta A^j ] \end{aligned}$$

- 여기서 1 : 코일 Z 축 길이
- NL : 코일 단면적의 요소수
- Z : 외부 임피던스 [ R + jX ]

으로 주어진다.

Flux  $\phi$  를 급수식 으로 표현하면

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_{n=odd} |\phi_n| e^{j(n\omega t + \theta_{\phi_n})} \\ &= \sum_{n=odd} \phi_n \end{aligned}$$

이 고

$$\frac{d\phi}{dt} = \sum_{n=odd} j n \omega \phi_n \dots\dots\dots(2-2)$$

$$\phi_n = \sum_{j=1}^{NL} \phi_n^* = \sum_{j=1}^{NL} [ (\pm 1) \times \sum_{j=1}^3 \frac{1}{3} \frac{T_0}{Q_0} \Delta A^j ] \dots\dots\dots(2-3)$$

(2-1), (2-2), (2-3) 식 에서

$$j\omega \left[ \begin{matrix} C \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} A \\ I \end{matrix} \right] + \left[ \begin{matrix} Z \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} I \\ I \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} V \\ V \end{matrix} \right]$$

여기서

$$\begin{Bmatrix} Z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} R + jX & 0 \\ 0 & R + 3jX \end{pmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} I \end{Bmatrix} = ( I_1 \ I_3 \ I_5 \ \dots )^T$$

$$\begin{Bmatrix} V \end{Bmatrix} = ( V_1 \ V_3 \ V_5 \ \dots )^T$$

이다.

**적용 사례**

본 논문에서 해석한 모델은 권선수가 각각 100, 200 회인 리액터 이고 철은 그림 2 와 같은 포화 특성을 갖는다. 인가 전압은 사인파로 기본파만 주었다.

모델의 대칭성을 이용하여 반영역만 해석하였다. a, b, c 경계는 Dirichlet 경계 이고 d 경계는 Neumann 경계이다.

$$V = 100 \cos( \omega t ) , \quad \omega = 2\pi f , \quad f = 60 \text{ Hz}$$

(1) 100 Turns 일때

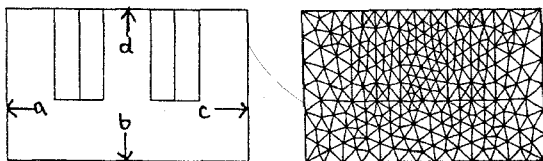


그림 1. 해석 모델 및 요소 분할도

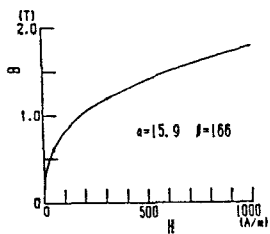


그림 2. B-H 포화 특성 곡선

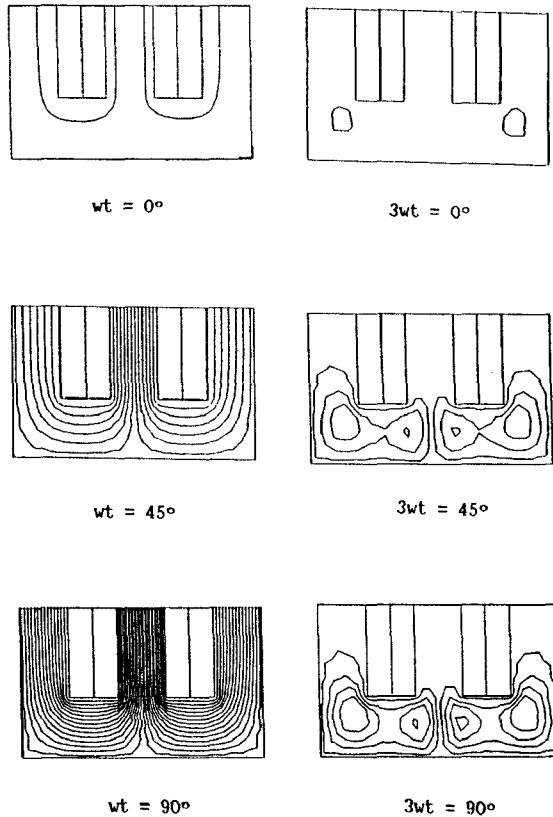


그림 3.1 Flux 분포

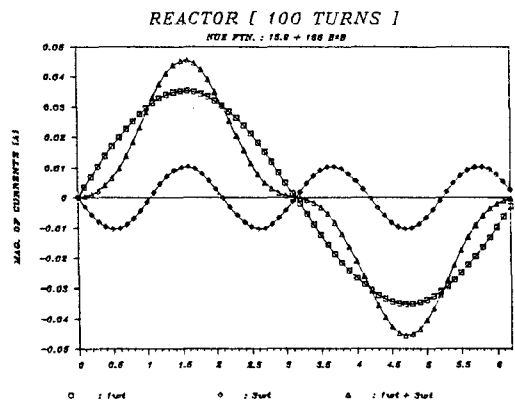


그림 3.2 CHBFEM 으로 얻은 각 고조파 전류

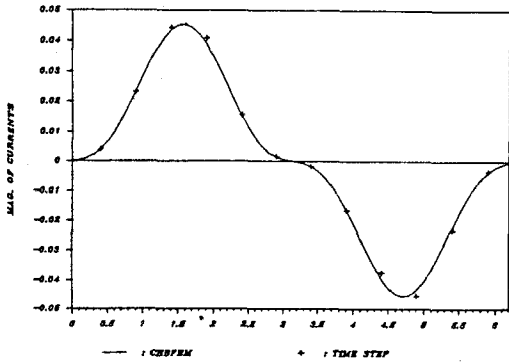


그림 3.3 CHBFEM 과 Time Step 비교 ( 전 류 )

(ii) 200 Turns 일때

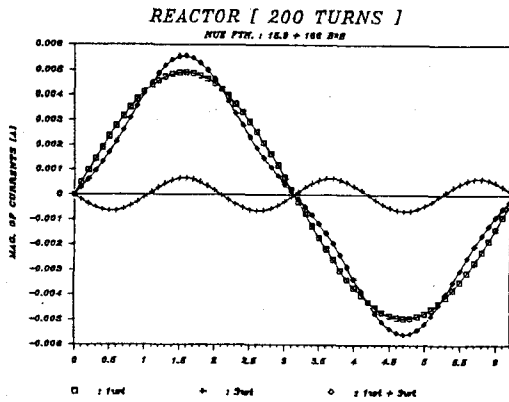


그림 4.1 CHBFEM 으로 얻은 각 고조파 전류

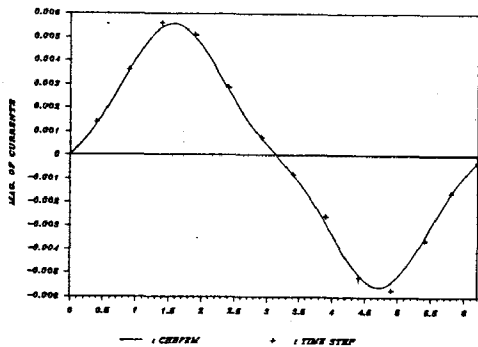


그림 4.2 CHBFEM 과 Time Step 비교 ( 전 류 )

그림 3.1 을 보면 3 고조파 Flux 는 기본파 와 달리 코일 내부에서 그 크기가 매우 작음을 알 수 있다. 그리고 철이 적이는 부분에서 3 고조파 크기가 큼을 보여준다. 그 이유는 기본파의 Flux 는 전원 전류에 의해서 발생되나 그 외 고조파는 철의 비선형특성에 의해서 발생한다. 이렇게 발생한 고조파는 코일에 전류를 유기하고 이 전류는 각 고조파의 변화를 방해하려는 방향으로 흐르게 된다. ( Faraday 법칙 ) 그러므로 코일 내부의 고조파들은 포화영역에 들어 갔지만 그 크기가 감소하게 된다. 철이 적은 부분에서 3 고조파가 큰 이유는 코일에 유기된 전류의 영향이 작고 포화영역에 들어 갔기 때문이다.

그리고 권선수가 증가하면 전류가 감소함을 알 수 있다. 만약 선형 시스템 이었으면 전류의 감소 비율은 약  $1/n$  정도가 된다.

결 론

본 논문에서 제시한 CHBFEM 은 비선형 매질 자장 해석 시 각 고조파별로 분리하여 해를 구할수 있음을 보여주었다. 그리고 전류의 고조파성분을 구할수 있고 자장도 계산할 수 있음을 보여 주었다.

현재 속도 및 도체가 있는 경우의 정식화가 진행중이며 수렴속도에 관한 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

- (1) J.Lu, K.Besso, S.Yamada, " HARMONIC BALANCE FINITE ELEMENT METHOD APPLIED TO AC MAGNETIC ANALYSIS ", IEEE. on Magnetics, Vol.25, NO.4, pp. 2971-2973, JULY 1989.
- (2) 이 병석, 유한 요소법에 의한 초전도 동기 발전기의 단락 특성 해석, 공학 석사 학위 논문, 서울대학교, 1989.
- (3) 박 민호, 유도 기기, 동명사, 1988.
- (4) D.C.Krause, O.Wasynczuk, Electromagnetic Motion Devices, McGraw - Hill, 1989.
- (5) 김 창업, 유한 요소법에 의한 착자회로 해석, 공학 석사 학위 논문, 서울대학교, 1990.