최적제어설계에 있어서의 2차형 하중행렬의 한 결정법

황 창선*, 김 정택°
(부산대 전기과 교수*, 산업과학기술연구소°)

AN ALGORITHM FOR DETERMINING THE WEIGHTING MATRICES OF THE QUADRATIC PERFORMANCE INDEX IN OPTIMAL CONTROL

Chang-Sun Hwang*, Chung-tek Kim°
(Pusan Univ.*, RIST°)

Abstract - Optimizing transient response for both tracking reference signals and disturbance rejection is determined by the poles and zeros of the transfer function. Thus, optimal pole assignment and how should weighting matrix for the performance index be chosen is very important to achieve optimum transient response. This paper focus its attention on the choosing and analysis of weighting matrix for optimum pole assignment. Optimum pole assignment is defined for linear time-invariant continuous systems..

1. 서론

최근 공업 프로세스에는 현대 제어이론이 적용되고 있으나 현대 제어 이론은 고전적 제어 이론에 비해 대체로 어려운 수학을 사용하고 있으므로 현장 엔지니어가 이해하기는 쉽지 않으며, 현장 적용에는 더 큰 어려움이 있다. 그 외에도 다음과 같은 문제점이 있다.

(1) 가제어성(controllability)은 임의의 극점선택 (pole assignment)을 위한 필요 충분 조건이지만, 어디에 극점을 두어야 할까?

(2) 시스템이 가제어성을 가지면

PI(performance index) =

$$\int_0^{\infty} (\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X} + \mathbf{u}'\mathbf{R}\mathbf{u})dt$$

로 구성되는 평가함수에 대해서 최적조절기 (optimal regulator)로 인하여 안정화된다. 그러나 하중행렬 **Q**와 **R**은 어떻게 선택해야 할까?

우선 본 고찰에서는 Yasukiko Miguchi, Atsuo Kawamura and Richard Hoft의 "OPTIMAL POLE ASSIGNMENT FOR POWER ELECTRONIC SYSTEMS"에서 정의로 도입한 최적극점선택(optimum pole assignment)을 채택하였다. 모든 범위와 조건에서 최적인 응답을 나타내는 최적극점선택(optimal pole assignment)은 존재하지 않는다고 볼 수 있으므로 설계자가 선택할 수 있는 사양을 정의하여 그 정의에 맞는 최적극점선택을 시도 해 나갈 것이다.

최적극점선택은 BUTTERWORTH FILTER형, CHEBYSHEV FILTER(ripple = 0.5dB)형, 그리고 CHE-BYSHEV FILTER(ripple = 1dB)형 3가지 형태에서 방향을 설정하였다. 각 형태에 대한 2차형 평가함수의 하중행렬의 값과 피이드백 이득을 비교 제시할 것이다.

2. 수식 구성 및 고찰

일반적으로 전달함수는 상태공간으로 변환이 가능하다. 즉,

$$G(s) = \frac{a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + \dots + b_1 s + b_0}$$

은 다음과 같이 변환된다.

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{X}$$

여기서,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -b_0/b_n & -b_1/b_n & \cdots & -b_{n-1}/b_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1/b_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$$

최적제어를 위한 입력 u가 $u(t) = -\mathbf{G}\mathbf{X}(t)$이고, 평가함수(cost function)가

$$\mathbf{V} = \int_{t_0}^{t} (\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X} + \mathbf{u}'\mathbf{R}\mathbf{u})dt$$

로 표현되면 RICCATI방정식은

$$-\dot{M} = M A + A'M + M B'R^{-1}B'M + Q \qquad (1)$$

$$G = R^{-1}B'M \qquad (2)$$

과 같이 표시된다.
이때 하중행렬 Q와 R을

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_3 \end{bmatrix}, \qquad R = 1$$

(Q와 R은 symmatric semi-definite행렬)

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix}$$

두면,

$$G = [\ \beta m_2 \qquad \beta m_3\ ]$$

$$M A = \begin{bmatrix} am_1 + cm_2 & bm_1 + dm_2 \\ am_2 + cm_3 & bm_2 + dm_3 \end{bmatrix}$$

$$AM = (MA)' = \begin{bmatrix} am_1 + cm_2 & am_2 + cm_3 \\ bm_1 + dm_1 & bm_2 + dm_3 \end{bmatrix}$$

$$MBR^{-1}B'M = \begin{bmatrix} \beta^2 m_2^2 & \beta^2 m_2 m_3 \\ \beta^2 m_2 m_3 & \beta^2 m_3^2 \end{bmatrix}$$

로 표현된다.
a=0, b=1로 두고 (1)을 다시 쓰면,

$$m_2 = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + q_1 \beta^2}}{\beta^2} \qquad (3)$$

$$m_3 = \frac{d \pm \sqrt{d^2 + (2m_2+q_3)\beta^2}}{\beta^2} \qquad (4)$$

로 정리된다. 따라서,

$$G = [\ g_1 \qquad g_2\ ]$$

이 된다.
여기서,

$$g_1 = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + q_1 \beta^2}}{\beta} \qquad (5)$$

$$g_2 = \frac{d \pm \sqrt{d^2 + (2m_2+q_3)\beta^2}}{\beta} \qquad (6)$$

이다.

정의 : G(s)가 q개의 영점과 n개의 극점을 가진다고 가정하자. 그리고 q_r개의 영점은 우반면에, $q_l=q-q_r$개의 영점은 좌반면에 놓여 있고 허수축 상에는 영점이 없는 것으로 한다.

상태궤환에 의한 주어진 시스템의 최적 극점배치는 다음과 같이 정의된다.

a. q_l개의 극점은 좌반면에 놓여있는 q_l개의 영점을 상쇄하도록 둔다.
b. q_r개의 극점은 우반면에 놓여있는 q_r개의 영점의 mirror images가 되도록 둔다.
c. n-q개의 극점은 BUTTERWORTH(or CHEBYSHEV) 형 극점배치로 한다.

3. 결론

주어진 2차시스템에 영점이 없을 경우에는 하중행렬은

$$q_1 = \frac{M^2 - c^2}{\beta^2} \qquad (7)$$

$$q_3 = \frac{N^2 - d^2 - 2c + 2/c * \sqrt{c^4 + \beta^4}}{\beta^2} \qquad (8)$$

로 계산되고, 영점이 있을 경우에는

$$q_1 = \frac{(P * a_0/a_1)^2 - c^2}{\beta^2} \qquad (9)$$

$$q_3 = \frac{((P + |a_0/a_1|)^2 - d^2 - 2c + 2/c * \sqrt{c^4 + \beta^4})}{\beta^2} \qquad (10)$$

로 계산된다.
여기서, $c^2 \le (a_0/a_1)^2$, $d^2 \le 1+|a_0/a_1|$ 이며 M, N, P의 값은 표1과 같다.
이때 궤환 이득,
$G = [\ g_1 \quad g_2\ ]$ 은 식(11), (12)에서 구해진다.

$$g_1 = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + q_1 \beta^2}}{\beta} \qquad (11)$$

$$g_2 = \frac{d \pm \sqrt{d^2 + (2m_2+q_3)\beta^2}}{\beta} \qquad (12)$$

형태 / 변수	BUTTERWORTH형	CHEBYSHEV형 (ripple=.5dB)	CHEBYSHEV형 (ripple=1dB)
M	1	1.5162	1.1025
N	1.414	1.4256	1.0978
P	1	2.8628	1.9652

표 1. 각 형태에 따른 변수의 값

여기서, $m_2 = g_1/\beta$ 이다.

4. 시뮬레이션

한개의 영점과 두개의 극점을 가진 다음과 같은 시스템이 주어지면,

$$G(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 0.5\,s + 1}$$

최적응답을 나타내는 하중행렬 및 궤환 이득은 표 2.와 같이 구해지며, 단위계단입력에서의 응답특성은 그림 1과 같다.

참고 문헌

1) 황 창선, 김 정태 "최적제어설계에 있어서의 하중행렬의 선택과 해석", '89 대한전기학회 하계 종합학술대회 논문집. pp. 62 ~ 65, 1989.

2) Yasuhiko Miguchi, Atsuo Kawamura and Richard Hoft, "Optimal pole assignment for electric system", IEEE Trans. pp. 74~88, 1985.

3) Bernard Friedland, "CONTROL SYSTEM DESIGN -An Introduction to State-Space Methods-", pp. 337-377, 1986.

4) W. M. Wonham, "On Pole Assignment in Multi-input Controllable Linear Systems," IEEE Trans. AC-12, pp. 660-665, 1967.

5) E. J. Davison, "The Robust Control of a Servomechanism Problem for Linear Time-Invariant Multivariable Systems." IEEE Trans. AC-21, pp. 25-34, 1976.

6) B. A. Francis, W. m. Wonham, "The Internal Model Principle of Control Theory," Automatica, Vol. 12, pp. 457-465, 1976.

형태 / 변수	BUTTERWORTH형	CHEBYSHEV형 (ripple=.5dB)	CHEBYSHEV형 (ripple=1dB)
q_1	0	7.2	0.22
q_3	2.92	13.84	7.71
g_1	0	1.86	0.1
g_2	1.28	4.84	2.36

표 2. 각 하중행렬 및 궤환이득

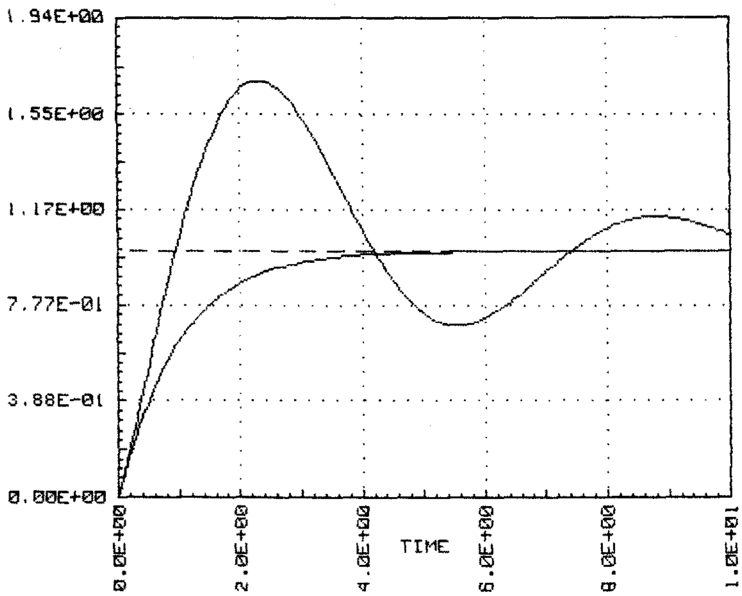

그림 1-a. BUTTERWORTH형 시스템의 계단응답특성.
Fig. 1-a Unit Step response of system for BUTTERWORTH type.

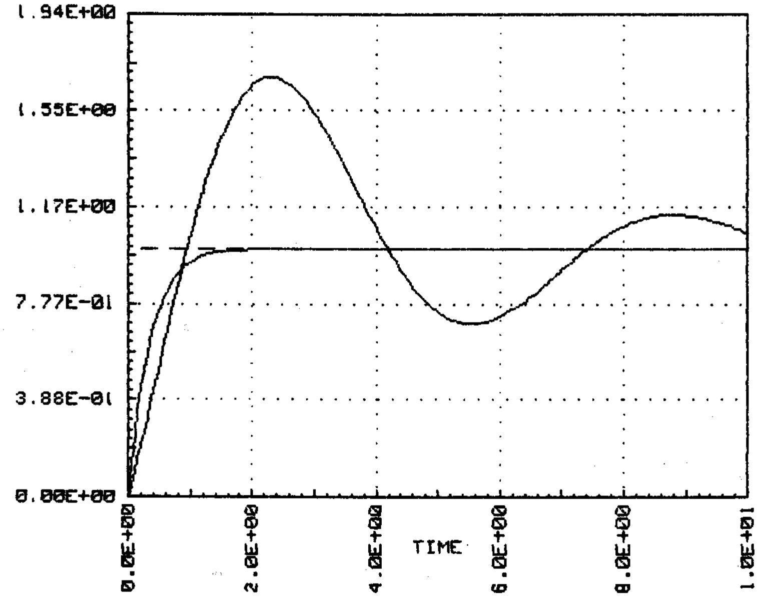

그림 1-b. CHEBYSHEV(r=.5)형 시스템의 계단응답특성.
Fig. 1-b Unit Step response of system for CHEBYSHEV(r=.5) type.

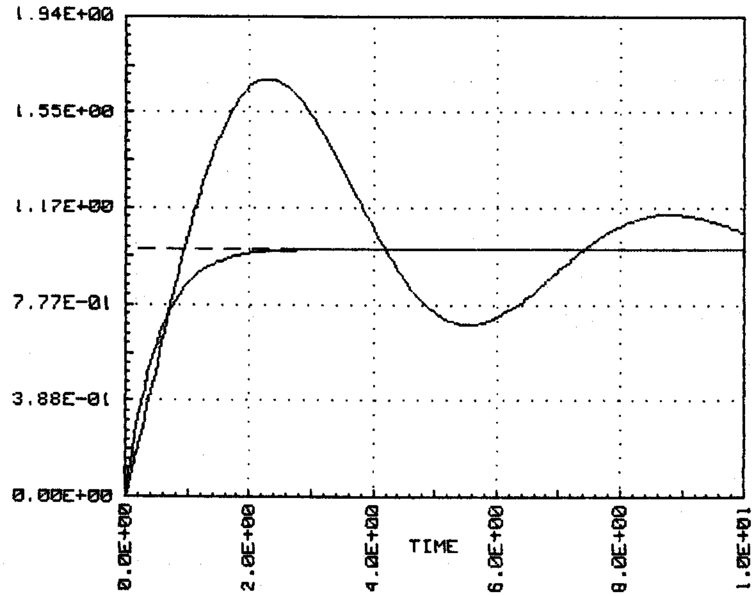

그림 1-c. CHEBYSHEV(r=1)형 시스템의 계단응답특성.
Fig. 1-c Unit Step response of system for CHEBYSHEV(r=1) type.