

Internal Model Principle을 이용한 극-영점 배치 적응제어기에 관한 연구

* 이 정 준 서 진 현

서울 대학교 전기 공학과

An Adaptive Pole-zero Placement Algorithm Using Internal Model Principle

* Jeong-Joon Lee Jin-Heon Seo

Dept. of Elec. Eng. Seoul Nat'l Univ.

Abstract

In this paper, an adaptive pole-zero placement algorithm which has disturbance rejection properties is proposed. This method using the internal model principle is shown to reject the disturbances asymptotically. Furthermore, a method which reduces the number of estimated parameters is proposed. Some simulation results are given to demonstrate the performance of the algorithms.

I. 서 론

적용 제어 이론은 현대 제어 이론에 있어서 중요하고 많은 관심을 끄는 이론이며 이에 대한 연구와 그의 실제 적용이 계속 되고 있다. 많은 제어 이론에 관한 문헌들이 제어 시스템의 고정점 추종(Set-point Tracking)에 관해 쓰여졌지만 실제 적용에 있어서 예들들어 기계적 시스템의 진동제어[1] 라든지 미사일 유도 및 추종 시스템[2] 등에서는 외란이 존재하는 경우에 있어서의 조정(Regulation)이 고정점추종만큼이나 중요한 문제이다.

외란의 모형은 확정적(deterministic), 구분적으로 확정적(piecewisely deterministic), 추계적(stochastic)의 세 가지로 구분될 수 있으며[3] 이러한 외란의 제거에 관해 많은 연구가 행하여졌다.[4-7]

한편, Internal Model Principle은 Francis & Wonham [8]이 1976년에 발표한 이론으로 외란이 있는 경우 외란의 특성 다항식(characteristic polynomial)을 제어기 내부에 설계해 주면 외란이 점근적(asymptotically)으로 제거됨을 보였다.

본 논문에서는 적응제어의 대표적 이론이라 할 수 있는 Åström & Wittenmark의 극-영점 배치 적응제어 알고리즘[9]에서 측정할 수 없는 확정적인 외란이 존재하는 경우에 internal model principle을 이용하여 그 외란이 점근적으로 제거됨을 보이고 또한 Palaniswamy[10]가 제시한 최소차수 모형(minimal model)에 대한 계수 추정방법을 이용, 추정할 계수의 갯수를 줄여 좀더 빠른 알고리즘을 제시하고자 한다.

II. 극-영점 배치 적응제어기의 설계

1) 제어계의 구성

본 논문에서 사용한 제어계의 블록 다이어그램은 그림 1 과 같이 구성된다. 이 그림에서 제어 대상은

$$G(q^{-1}) = \frac{q^{-k} B_p(q^{-1})}{A_p(q^{-1})} \quad (2.1.1)$$

과 같이 구성되며 다항식 A_p 와 B_p 는 서로 소(coprime)이고 차수를 알고 있다고 가정하며 A_p 는 monic이고 지연시간(delay)은 알고 있으며 다음과 같다.

$$k \geq 1 \quad (2.1.2)$$

이러한 제어대상에 대해 페루우프가 안정하고 그 전달 함수를 다음과 같이 되게 하는 제어기를 얻고자 한다.

$$G_m(q^{-1}) = \frac{q^{-k} B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} \quad (2.1.3)$$

역시 A_m 과 B_m 은 서로 소(coprime)이고 A_m 은 monic이다.

2) 외란(disturbance)의 형태

본 논문에서는 외란의 형태를 확정적(deterministic)이며 그 형태는 모르지만 그 차수는 안다고 가정한다. 확정적인 외란을 모델링하는 한 방법은 외란을 유한한 갯수의 정현파(sine wave)들의 합으로 나타내는 것이다. 이 때 DARMA모델은

$$D(q^{-1})d(t) = 0 \quad (2.2.2)$$

여기서,

$$D(q^{-1}) = \prod_{i=1}^l (1 - (2\cos\phi_i)q^{-1} + q^{-2}) \quad (2.2.3)$$

과 같이 나타낼 수 있다.

3) 계수 추정 방법 (Parameter Estimation)

그림의 제어 대상은 다음과 같이 모형화된다.

$$A_p(q^{-1})y_p(t) = B_p(q^{-1})u_p(t-k) \quad (2.3.1)$$

이의 외란을 포함하는 비 최저차수(non-minimal) 모형은 다음과 같다.

$$A_p(q^{-1})D(q^{-1})y(t) = B_p(q^{-1})D(q^{-1})u_p(t-k) \quad (2.3.2)$$

$$\text{여기서, } y(t) = y_p(t) + d(t) \quad (2.3.3)$$

$$D(q^{-1})d(t) = 0 \quad (2.3.4)$$

여기서 $\deg(A_p), \deg(B_p), \deg(D) = l_0$ 는 안다고 가정한다. $n_p = \max\{\deg(A_p), \deg(B_p)\}$ 라 하면 이에 대해 식 (2.3.2)는 다음과 같은 회귀 형태로 나타낼 수 있다.

$$y(t) = \phi(t-1)\theta(t) \quad (2.3.5)$$

여기서,

$$\theta(t) = [a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n] \quad (2.3.6)$$

$$\phi(t-1) = [-y(t-1), \dots, -y(t-n), u_p(t-k), \dots, u_p(t-k-n)] \quad (2.3.7)$$

$$n = n_p + l_0 \quad (2.3.8)$$

여기서 a_i, b_i 는 각각 $A(=A_pD), B(=B_pD)$ 의 계수들이다. 이 때 Recursive Least Squares with Covariance Resetting 알고리즘은 다음과 같이 주어진다.

$$\theta(t) = \theta(t-1) + \frac{P(t-2)\phi(t-1)e(t)}{\lambda + \phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)} \quad (2.3.9)$$

$$P(t-1) = \frac{1}{\lambda} \left[P(t-2) - \frac{P(t-2)\phi(t-1)\phi(t-1)^T P(t-2)}{\lambda + \phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)} \right] \quad (2.3.10)$$

$$P(t-1) = \begin{cases} P(t-1) & t \neq kN \\ k_0 I & k_0 \in (0, \infty) \quad t = kN \end{cases}$$

$$e(t) = y(t) - \phi(t-1)\theta(t-1) \quad (2.3.11)$$

위의 식들 중 λ 는 망각지수(Fogetting Factor)로서 0에서 1사이의 값을 취하며, k_0 는 P행렬의 초기화(Resetting) 값으로 $k_0 \geq 0$ 이다.

4) 제어기의 설계

Aström의 극-영점 배치 적응제어기의 설계방법에 따라 제어기를 설계한다. 일반적인 제어기의 형태는 다음과 같이 주어진다.

$$R(q^{-1})u_p(t) = T(q^{-1})u_c(t) - S(q^{-1})y(t) \quad (2.4.1)$$

Internal Model Principle을 그림1의 제어계에 응용해 보면 다음과 같다. 그림에서

$$\frac{B_p}{A_p} u_p + d = y \quad (2.4.2)$$

이고, 위의 두 식에서 입력 u_c 와 출력 y 와의 관계를

나타내 보면

$$y = \frac{B_p T}{A_p R + B_p S} u_c + \frac{A_p R}{A_p R + B_p S} d \quad (2.4.3)$$

이 때, 식(2.4.3)의 우변 2항은 0이 되고 우변 1항의 입력 u_c 로부터 출력 y 로의 전달함수를 다음의 식 (2.4.4)와 같이 원하는 전달함수가 되도록 하는 제어기의 다항식 R, S, T 를 구해내면 된다. 즉 Internal model principle에 의하여 제어기의 본모인 R 이 외란 d 의 특성 다항식 D 를 포함하도록 하여 ($R = R_1 D$) (2.2.2)의 가정 ($Dd(t) = 0$)에 의해 우변 2항이 0이 되도록 하는 것이다.

$$\frac{T B_p}{A_p R_1 D + B_p S} = \frac{B_m}{A_m} \quad (2.4.4)$$

위의 식에서, 일반적으로 원하는 페루우프 전달함수의 차수는 실제의 전달함수보다 낮으므로 실제 시스템의 전달함수에서 소거(cancellation)가 일어나야 한다. 그러므로 B_m 의 인자(factor)가 아닌 B_p 의 원소가 소거되어야 한다. B_p 의 원소를 다음과 같이 나누면

$$B_p = B^+ B^- \quad (2.4.5)$$

여기서,

$B^+ :=$ 모든 근이 안정한 영역에 있는 항
 $B^- :=$ 모든 근이 불안정한 영역에 있거나 잘 감쇠되지 않은(poorly damped) 근을 가진 항

B^+ 가 바로 소거되는 항이고 B^- 는 B_m 에 포함된다. 즉

$$B_m = B_m^+ B^- \quad (2.4.6)$$

본모에서 본모의 2항은 B_p 가 포함되어 있어 소거가 가능하고 1항에서는 소거되기 위해 R 이 B^+ 항을 포함해야 한다. 따라서,

$$R_1 = R_2 B^+ \quad (2.4.7)$$

나머지 소거되어야 할 항은 관측자 다항식 (Observer polynomial) A_0 이고 이 때 다음의 조건들이 얻어진다.

$$A_p D R_2 + B^- S = A_0 A_m \quad (2.4.8)$$

$$T = A_0 B_m^+ \quad (2.4.9)$$

그리고 제어기를 설계할 때 Two time scale operation[11]을 사용하여 제어기의 추정치 R, S, T 가 $t \in [kN, (k+1)N-1]$ 의 구간에 있을 때 고정되어 있도록 하였다. 구간의 길이 N 의 선택에 대하여는 IV절에서 서술하기로 한다.

5) 알고리즘

지금까지 서술한 제어기의 설계방법에 대한 알고리즘은 다음과 같다.

Step 1 : 다음의 모형에 대해 계수 추정을 행한다.

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u_p(t-k)$$

$$(A = A_p D, B = B_p D)$$

Step 2 : 대수 방정식(Diophantine Eq.)으로부터 R_2, S 를 구한다. ($t = kN$ 일 때)

- a) A, B 로부터 A_p, B_p, D 를 구한다.
 - b) $B_p = B^* B^-, B_m = B_{m1} B^-$ 로 인자화(Factorization)
 - c) R_2, S 를 다음 대수 방정식으로 부터 구한다.
- $$A_p D R_2 + B^- S = A_o A_m \quad (2.5.1)$$

부연1) a)의 A_p, B_p, D 를 구하는 방법은 다음과 같다.

$A = A_p D, B = B_p D$ 이므로 다음의 식이 성립한다.

$$A_p B_p D = A_p B = A B_p \quad (R1.1)$$

이 때 A_p 와 B_p 를 다음식의 해라 정의 하면

$$A_p B - A B_p = 0 \quad (R1.2)$$

이고 $A_p(0) = 1$ 이므로 위의 식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[A_p(q^{-1}) - 1]B(q^{-1}) + B_p(q^{-1})[-A(q^{-1})] = -B(q^{-1}) \quad (R1.3)$$

위의 식의 양변의 q^{-1} 의 계수를 같게 놓으면 $2np$ 개의 미지수를 갖는 $np+n$ 개의 연립 방정식을 얻을 수 있다. 이를 의사 좌측 역행렬(Pseudo Left Inverse)을 써서 구할 수 있다. 마찬가지로 다음의 두 식으로부터 D 를 의사 좌측 역행렬을 써서 구해낼 수 있다.

$$A_p(q^{-1})D(q^{-1}) = A(q^{-1}) \quad (R1.4)$$

$$B_p(q^{-1})D(q^{-1}) = B(q^{-1}) \quad (R1.5)$$

부연2) $A_p D = A$ 이므로 계수 추정에서 구한 A 를 직접 쓰면 된다

Step 3 : 제어기로 부터 입력을 계산한다.

- a) $R_1 = R_2 B^*, R = R_1 D$
- b) $T = A_o B_{m1}$
- c) $R u_p(t) = T u_o(t) - S y(t)$

II. 추정할 계수의 갯수를 줄인 형태

1) 제어계의 변형

II.3절의 식 (2.3.2)를 다시 써보면 다음과 같다.

$$A_p(q^{-1})D(q^{-1})y(t) = B_p(q^{-1})D(q^{-1})u_p(t) \quad (3.1.1)$$

만약 (3.1.1)의 우변의 다항식 D 를 고정한다면 다음의 최소차수(minimal)의 형태가 얻어진다.

$$A_p(q^{-1})D(q^{-1})y(t) = B_p(q^{-1})u(t) \quad (3.1.2)$$

여기서,

$$D(q^{-1})u_p(t) = u(t) \quad (3.1.3)$$

(3.1.2)의 $A(=A_p D)$ 와 B_p 의 계수를 각각 a_i, b_{pi} 라 하면 계수추정을 위한 (3.1.2)의 변형된 식은 다음과 같이 나타내 진다.

$$\theta(t) = [a_1, a_2, \dots, a_n, b_{p1}, \dots, b_{p(np)}] \quad (3.1.4)$$

$$\phi(t-1) = [-y(t-1), \dots, -y(t-n), u(t-k), \dots, u(t-k-np)] \quad (3.1.5)$$

$$n = np + l_o \quad (3.1.6)$$

이렇게 하여 추정할 계수의 갯수를 줄일 수 있다. 이러한 제어계를 블록 다이어그램으로 나타내면 그림1의 2번을 쓴 것과 같다.

2) 알고리즘

이에 따라 제어기의 설계 방법도 달라지게 되는데 II.6절의 알고리즘을 변형하면 다음과 같다.

Step 1 : 다음 식에 의해 계수를 추정한다.

$$A(q^{-1})y(t) = B_p(q^{-1})u(t-k) \quad (3.2.1)$$

Step 2 : 대수 방정식으로 부터 R_2, S 를 구한다.

$$(t = kN \text{ 일 때})$$

a) A 로부터 A_p, D 를 구한다.

b) $B_p = B^* B^-, B_m = B_{m1} B^-$ 로 인자화(Factorization)

c) R_2, S 를 구한다.

$$A_p D R_2 + B^- S = A_o A_m \quad (3.2.2)$$

부연3) a)에서 II.5절의 알고리즘과 달리 B_p 가 이미 계수추정에 의해 구해져 있다. A 로부터 A_p 와 D 를 인자화하기만 어려운 일인데 다음과 같은 간단한 경우에는 비교적 쉽게 구해낼 수 있다. 만약 A_p 가 2차이고 D 가 2차라면

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + a_3 q^{-3} + a_4 q^{-4}$$

$$= (1 + a_{p1} q^{-1} + a_{p2} q^{-2})(1 + d_1 q^{-1} + q^{-2})$$

$$= 1 + (a_{p1} + d_1) q^{-1} + (a_{p2} + a_{p1} d_1 + 1) q^{-2} + (a_{p1} + a_{p2} d_1) q^{-3} + a_{p2} q^{-4} \quad (R3.1)$$

양변의 계수를 같게 놓으면 가능한 해 중 하나는 다음과 같다.

$$d_1 = \frac{a_3 - a_1}{a_4 - 1} \quad (R3.2)$$

부연4) c)에서 $A_p D = A$ 이므로 계수 추정에서 구한 A 를 직접 쓰면 된다.

Step 3 : 제어기로 부터 입력을 계산한다.

a) $R_1 = R_2 B^*$

b) $T = A_o B_{m1}$

$$c) \begin{cases} R_1 u(t) = T u_o(t) - S y(t) \\ D u_p(t) = u(t) \end{cases} \quad (3.2.3)$$

$$(3.2.4)$$

부연5) 위에서 보면 II장에서의 제어기의 식을 (3.2.3)과 (3.2.4)와 같이 분리함으로써 계수 추정에 쓰이는 입력 $u(t)$ 를 (3.2.3)으로부터 곧바로 얻을 수 있고 (3.2.4)와 같이 함으로서 Internal Model Principle을 구현할 수 있는 것 또한 이 방법의 장점이다.

IV. Simulation

예1) 다음과 같은 전달 함수를 갖는 서어보 시스템을 대상으로 시뮬레이션을 행하였다.

$$G(s) = \frac{295}{s(s + 9.9)}$$

20msec를 샘플링 시간으로 하여 이산화 모형으로 바꾸면

$$G(z^{-1}) = \frac{0.5432z^{-1} + 0.0508z^{-2}}{1 - 1.819z^{-1} + 0.8187z^{-2}}$$

외란의 형태는 다음과 같이 모형화하였다.

$$d(t) = g \sin(2\pi t / T_d)$$

여기서 T_d 는 정현파의 주기를 샘플수의 단위로 나타낸다. 이에 대한 모형은 다음과 같다.

$$D(q^{-1}) = 1 + d_1q^{-1} + q^{-2}$$

Least Square의 공분산 행렬은 매 16샘플마다 10.0으로 주어졌고 제어기도 $N = 16$ 샘플동안 고정되었다. 외란의 정현파의 크기는 0.2이며 주기는 12이다. 원하는 페루우프 극점은 모두 0.2에 놓여졌고 간단히 하기 위해 계통의 모든 영점은 소거(cancel)되도록 하였다. 이에 대한 결과가 그림2에 나타나 있다. 그림3은 210샘플마다 외란이 정현파에서 크기 0.2의 오프셋으로 변화했을 때의 결과를 보였으며 그림4는 다른 정현파(주기 18, 크기 0.2)가 하나 더 있는 경우의 결과를 보였다. 세 결과 모두 외란이 점근적으로 제거됨을 보였고 그림4에서 보듯이 외란의 모형이 실제 외란에 비해 저차 모형화되었음에도 불구하고 좋은 결과를 보여주고 있다.

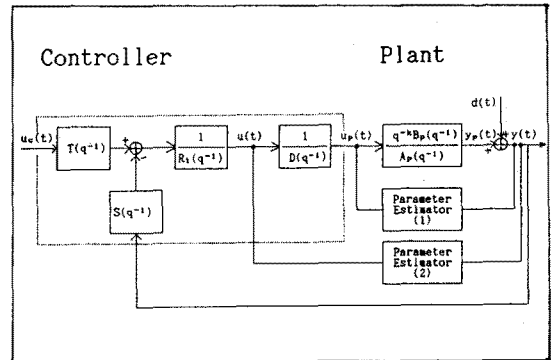
예2) 다음은 표장에 서술한 추정 계수의 갯수를 줄인 방법에 대하여 예1과 같은 모형에 대해 시뮬레이션 하였다. 그 결과가 그림5에 나타나 있다. 공분산 행렬의 초기화 간격은 15이고 정현파의 크기는 0.2, 주기는 12이다. 이 경우에도 좋은 결과를 보임을 알 수 있다. 예1과 마찬가지로 다른 정현파(주기 18, 크기 0.2)가 하나 더 있는 경우에도 그림6과 같은 결과를 얻을 수 있었다. 한가지 결점은 표의 알고리즘 Step2의 a)에서 A로부터 A_p 와 D를 인자화하는 것이 힘들고 제어기의 중간 과정의 값 $u(t)$ 를 취하여 계수 추정을 하므로 D의 계수의 수렴이 보장되어야 한다.

V. 결론

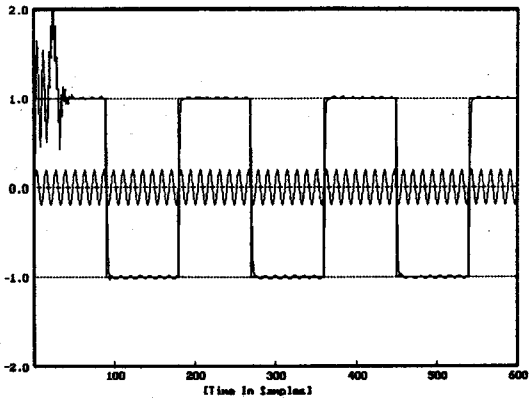
본 논문에서는 Internal Model Principle을 이용, 극영점 배치 적응 제어기에 확정적인 외란이 존재하는 경우 이의 제거에 관해 논하였다. 시뮬레이션 결과에서 보듯이 외란이 점근적으로 제거됨을 보였고 특히 추정 계수의 갯수를 줄여 보다 빠른 알고리즘을 구현했을 때에도 원하는 결과를 얻을 수 있음을 보였다.

REFERENCES

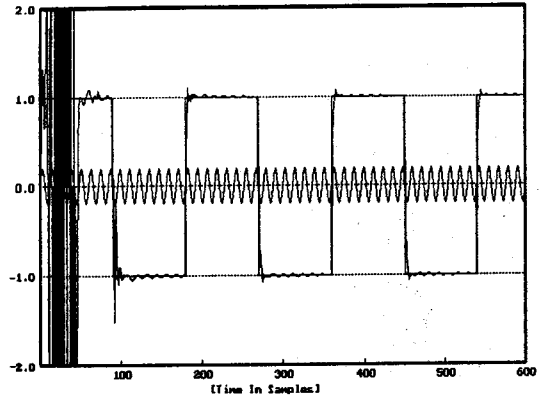
- [1] Burdess, J.S. and Metcalfe, A.V., "The Active Control of Forced Vibration Produced by Arbitrary Disturbances," ASME Journal of Vibration, Acoustic, Stress, and Reliability in Design, 107, pp.33 - 37, 1985.
- [2] Johnson, C.D., "Algebraic Solution of the Servo mechanism Problem with External Disturbances," ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 96, pp.25-35, 1974.
- [3] Aström, K.J. and B. Wittenmark, *Computer Controlled Systems - Theory and Design*, Prentice - Hall Inc., 1984.
- [4] Goodwin, G.C. and Chan, S.W., "Model Reference Adaptive Control of Systems Having Purely Deterministic Disturbances," IEEE Trans. on Auto. Contr. AC-28, pp.855 - 858, 1983.
- [5] Goodwin, G.C. Norton, J.P., and Viswanathan, M.N., "Persistency Excitation of Nonminimal Models of Systems Having Purely Deterministic Disturbances," IEEE Trans. on Auto. Contr. AC-30, pp. 589 - 592, 1985.
- [6] Zhang, C. and Evans, R.J., "Offset Elimination in Direct Self-Tuning Control," IEEE Trans. on Auto. Contr. AC-33, pp. 603 - 607, 1988.
- [7] Ishitobi, M., Shar, S.L. and Fisher, D.G., "Exponentially Stable Model Reference Adaptive Control With Deterministic Disturbances," ACC, pp. 1852 - 1856, 1989.
- [8] Francis, B.A. and Wonham, W.M., "The Internal Model Principle for Control Theory," Automatica, 12, pp. 170 - 194, 1976.
- [9] Aström, K.J. and B. Wittenmark, "Self-Tuning Controllers Based on Pole-Zero Placement," IEE. part D. vol.127, pp. 120 - 130, 1980.
- [10] Palaniswami, M. and Goodwin, G.C., "An Adaptive Implementation of the Internal Model Principle," ACC, pp. 600 - 605, 1987.
- [11] Elliott, H., Christy, R. and Das, M., "Global Stability of Adaptive Pole Placement Algorithms," IEEE Trans. on Auto. Contr. AC-30, pp. 348 - 356, 1985.



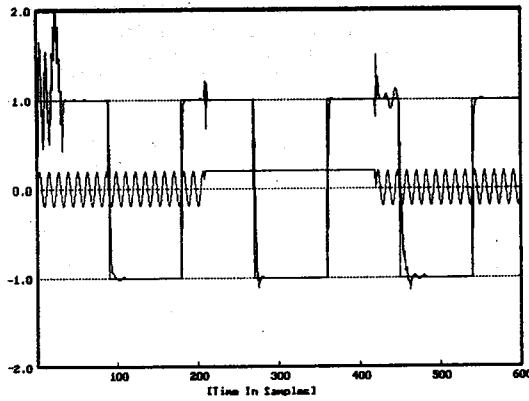
<그림.1>



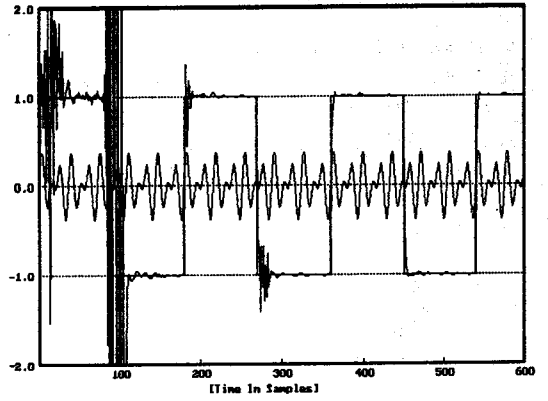
<그림.2>



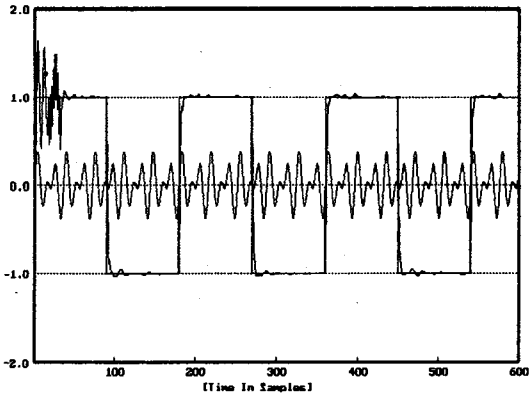
<그림.5>



<그림.3>



<그림.6>



<그림.4>