

도립진자의 극배치 제어

장 기 동^o 허 욱 렬
인하대학교 전기공학과

Pole placement control of an inverted pendulum

Ki-dong Jang^o Uk-Youl Huh
Dept. of Electrical Eng., Inha Univ.

Abstract

An inverted pendulum is made practically and controlled by optimal controller and pole placement controller. An IBM PC/XT plays a part of the controller. The control algorithm is implemented with C language. An integrator is added to the controller to solve the high frequency problem. Experiment is performed according to the results of simulation.

제어방식을 제안하여 모의실험으로부터 강인성여부를 시험한 뒤 실제 제작한 도립진자계에 적용한다.

2장에서는 제작한 도립진자계의 구성방식에 대해 언급하며 수학적 모델을 유도하여 상태공간법에 의한 운동방정식을 수립하고 매개변수의 측정결과에 관해 기술한다. 이어 3장에서는 최적제어기를 구성하고 4장에서는 극배치 제어기구성과 적분기의 추가 배치에 대해 논한다. 5장에서는 모의실험의 결과제시와 분석을 하였고 6장에서는 도립진자계의 실제적인 제어 결과를 제시하였으며 7장에서는 결론을 맺었다.

2. 도립진자의 구조

(1) 도립진자계의 장치 구성

도립진자의 안정화 제어를 위한 장치는 크게 네부분으로 나눌 수 있다.

첫째, 대차의 이동방향과 진자의 회전방향이 반대 가 되도록 볼베어링으로 연결하고 모터의 회전운동이 대차의 수직운동이 되도록 타이밍 벨트와 레일을 설치한 도립진자부.

둘째, 대차의 위치와 진자의 각도를 감지하는 두개의 엔코더(Incremental Shaft Encoder)와 엔코더의 펄스를 계수하는 디지털회로와 계수된 디지털값을 PC내부의 포트로 보내주는 다목적 PCL-712카드.

셋째, 현재의 상태값들을 읽어들이 제어법칙에 맞게 제어입력을 만들어 PCL카드의 디지털/아나로그변환기로 신호를 보내주는 IBM PC-XT.

마지막으로 PC에서 발생한 아나로그신호를 증폭시키고 회전방향을 지시하는 펄스폭 변조방식(Pulse Width Modulation)의 직류모터 구동회로부로 구성된다.

1. 서론

진자(Pendulum)에는 안정 평형점(Stable Equilibrium Point)과 불안정 평형점(Unstable Equilibrium Point)의 두가지 평형점이 있다. 도립진자의 안정화 제어란 진자가 원래의 도립된 위치 즉 불안정 평형점에 강제적으로 계속 머물도록 제어하는 것이다. 로켓의 발사대를 안정화시키기 위한 목적에서 출발한 도립진자 안정화에 대한 연구는 로봇팔과 상사형[1]이며 비교적 간단한 구조를 가지고 실제적인 제어문제를 다룰 수 있는 불안정 기계적 시스템으로 간주되어 많은 연구가 이뤄졌다.

도립진자의 안정화 제어에서 발생하는 문제는 주로 기계적 요소들의 비선형성 예를 들면 기어간의 뒤틀림(Backlash)이라든지 레일과 베어링간에 존재하는 여러종류의 마찰력(Static Friction, Viscous Friction, Coulomb Friction)[2][3]에 의해 발생되며 운동방정식으로부터 정의된 시스템의 매개변수를 변화시켜 정밀한 제어에 근본적인 장애요소가 된다. 이 논문에서는 도립진자계에 존재하는 가장 큰 비중의 비선형요소를 마찰력이라 판단하고 단순한 형태의 운동속도에 비례하는 마찰력(Viscous Friction)만을 모델로 운동방정식을 세워 최소의 매개변수를 측정하도록 하고 나머지 종류의 마찰력(점성 마찰력과 쿨롱마찰력)은 일정한 범위내의 불규칙한 양으로 고려하는 방법을 취하여 모의실험을 행하였다. 시스템의 모델은 4차로 선형화하여 최적제어방식과 극배치 제어이론을 통하여 입력형태를 결정하였지만 결정된 입력형태는 비선형 운동방정식과 불규칙한(Random) 양의 비선형요소를 갖는 시스템을 통해 모의실험을 행하였다. 여기에는 반드시 안정한 상태보다는 심한 채터링현상을 수반하게 되는데 이로 인해 정상상태에서의 특성이 나쁘게 된다. 이의 보상을 위해 궤환단에 적분기를 추가함으로써 시스템의 고주파성분을 제거하고 좋은 특성을 얻기위한

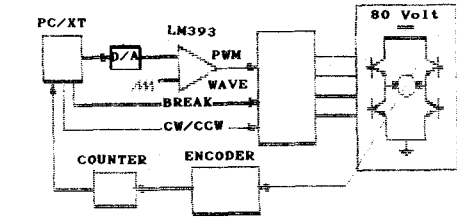


그림1 모터 구동부

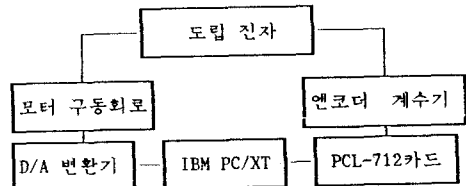


그림2도립진자계의 블록도

(2) 운동 방정식

도립진자계의 운동방정식을 수립하기에 앞서 다음의 몇가지를 전제로 하여 수학적 모델을 단순화시킨다.

(가) 타이밍 벨트와 대차, 축사이의 등가 마찰력은 운동속도에 비례한다

(나) 대차와 진자를 연결하는 볼 베어링의 마찰력도 진자의 운동속도에 비례한다.

(다) 벨트와 모터의 기어박스내에 존재하는 뒤틀림(Backlash)은 무시한다.

(라) 모터의 지연시간은 존재하지 않는다.

(로) 진자는 휘지않는 강체(rigid body)이다.

2.1 대차의 운동방정식

대차에 대한 운동방정식은 그림 3 으로부터 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$M_o \ddot{r} = Gu - Fr - H \quad (2-1)$$

여기서 각 변수들은 아래와 같이 정의한다.

- M_o [Kg] : 대차의 질량
- r [m] : 대차의 변위
- G [V] : 모터의 입력전압
- u [N/V] : 단위 입력전압에 대해 모터가 발생하는 힘
- F [Kg/sec] : 대차와 벨트 모터축간의 등가 마찰계수
- H [N] : 진자에 의해 대차에 가해지는 힘의 수평성분

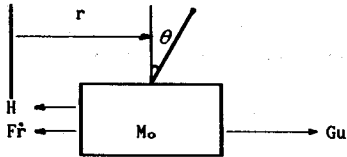


그림3 대차

2.2 진자의 운동 방정식

진자의 운동방정식은 그림 4 에 의해 구성될 수 있으며 진자의 관성모멘트는 수직력과 수평력으로 나누어 해석한다.

$$J \ddot{\theta} = Vl \sin \theta - Hl \cos \theta - C \dot{\theta} \quad (2-2)$$

$$M_l \frac{d^2}{dt^2} (r + l \sin \theta) = H \quad (2-3)$$

$$M_l \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) = V - M_l g \quad (2-4)$$

여기서 각 계수는 아래와 같이 정의한다.

- J [Kg-m²] : 진자의 무게중심이 갖는 회전관성
- θ [rad] : 진자의 연직선상에 대한 각도
- V [N] : 대차에 의해 진자에 가해지는 힘의 수직성분
- l [m] : 축에서 진자의 무게중심까지의 거리
- H [N] : 대차에 의해 진자에 가해지는 힘의 수직성분
- C [Kg-m²/sec] : 축의 마찰계수
- M_l [Kg] : 진자의 질량
- g [m/sec²] : 중력가속도

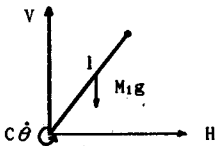


그림4 도립진자

2.3 상태 방정식

대차와 진자에 관한 식 (2-1)에서 식(2-4)까지로부터 상태방정식은 아래와 같이 비선형으로 표현된다.

$$\dot{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [r \ \theta \ \dot{r} \ \dot{\theta}]^T$$

$$x = f(x, u)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \Psi(x_2) \{ a_{32} \sin x_2 \cos x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} \cos x_2 \sin x_4 + a_{35} \sin x_2 x_4^2 + b_3 u \} \\ \Psi(x_2) \{ a_{42} \sin x_2 + a_{43} \cos x_2 x_3 + a_{44} x_4 + a_{45} \sin x_2 \cos x_2 x_4^2 + b_4 \cos x_2 u \} \end{bmatrix}$$

$$\Psi(x_2) = (1 + \beta \sin^2 x_2)^{-1}$$

$$\beta = \frac{(M_l l)^2}{(M_o + M_l) J + M_o l^2}$$

$$\alpha = (M_o + M_l) J + M_o l^2$$

또한 각 변수의 정의는 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & b_3 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & b_4 \end{bmatrix} = \alpha^{-1} \begin{bmatrix} -(M_l l)^2 g & -F(J + M_l l^2) & C M_l & (J + M_l l^2) M_l & (J + M_l l^2) G \\ (M_o + M_l) M_l g & F M_l & -(M_o + M_l) C & -(M_l l)^2 & -(M_l l) g \end{bmatrix}$$

위의 $f(x, u)$ 를 불안정 평형점 근처에서 진자와 대차의 이동거리가 미소하다고 가정하여 테일러 시리즈로 전개하여 일차항까지 계산하여 선형화한다.

상태방정식 $\dot{x} = Ax + Bu$ 의 형태로 정리한 식은 아래와 같다.

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

엔코더로부터 감지할 수 있는 출력은 대차의 위치 r 와 진자의 각도 θ 이므로 출력방정식은 아래와 같이 표현 된다.

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

이로부터 모터의 테이터와 실행에 의해 결정된 매개변수의 값들은 아래의 표와 같다.

표1 도립진자계의 매개변수 측정결과

대차	[1] 질량	M_o	0.411	Kg
대차	[2] 마찰 계수	F	7.61	Kg/sec
	[3] 모터의 이득상수	G	16.70	N/V
	[4] 대차운동 가능영역	r_o	0.42	m
	[1] 질량	M_l	0.110	Kg
진자	[2] 무게중심과 축사이의 거리	l	0.322	m
	[3] 무게중심에 대한 관성 모멘트	J	0.00141	Kg-m ²
	[4] 마찰 계수	C	0.00402	Kg-m ² /sec
	[5] 중력 가속도	g	9.8	m ² /sec ²

표2 측정된 매개변수로부터 계산된 행렬값

a32	$-(M_1 l)^2 g / \alpha$	-2.2675	m/sec ²
a33	$-(J+M_1 l)^2 F / \alpha$	-17.9862	1/sec
a34	$CM_1 l / \alpha$	0.0263	m/sec
a35	$(J+M_1 l^2) M_1 l / \alpha$	0.0837	m
a42	$(M_0+M_1) M_1 l / \alpha$	33.3534	1/sec ²
a43	$FM_1 l / \alpha$	43.7119	(1/m)/sec
a44	$-(M_0+M_1) C / \alpha$	-0.3863	1/sec
a45	$-(M_1 l)^2 / \alpha$	-0.2314	
b3	$(J+M_1 l^2) G / \alpha$	37.4703	(m/sec ²)/V
b4	$-M_1 l G / \alpha$	-109.0919	(1/sec ²)/V

여기서 $\alpha = (M_0+M_1)J+M_1 l = 0.00542 \text{ [Kg}^2\text{-m}^2\text{]}$

3. 최적제어기 설계

최적제어기의 성능지수(performance index)는

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

이고 J를 최소화하는 최적제어 입력 u^* 를 구하기 위해 대수적 Riccati 방정식

$$Q - KBR^{-1}B^T K + KA + A^T K = 0$$

을 풀어 되먹임 이득 벡터를 구한다.

$$u^* = -R^{-1}B^T K x(t)$$

$R^{-1}B^T K$ 의 연산결과가 최적되먹임 이득이 된다. 여기서 가중치 행렬 Q와 R은 반복적인 모의실험을 통해 구하며 가장 좋은 특성을 얻은 Q, R값은 다음과 같다.

$$Q = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.005 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0001 \end{bmatrix} \quad R = 0.0015$$

이때의 페루우프 되먹임 이득 벡터는

$$[16.3 \quad 17.8 \quad 5.2 \quad 2.5]$$

가 되며 이 이득 벡터는 오차에 대한 최적제어 입력 U를 한계값범위내($\pm 5V$)에 존재하게 하므로 타당하다. 초기치는 $x(0) = [0 \quad 0.01 \quad 0 \quad 0]$ 로 한다.

0.01은 진자의 각도로서 엔코더 펄스 2개 내지 3개에 해당한다.

4. 극배치 제어기 설계

단일 입력 U에 대해 독립 진자계는 진자의 각도와 대차의 위치라는 2개의 출력(SIMO)을 가진다. 다음 그림은 전달함수의 블록도이다.

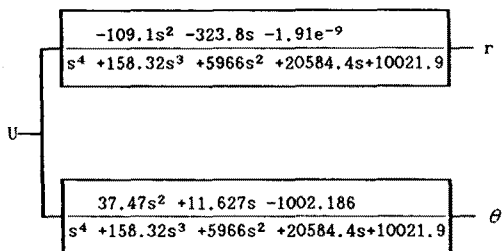


그림5 독립진자계의 전달함수 블록도

위의 전달함수에 의해 극배치 제어를 위해 상태방정식을 가제어표준형으로 변환시켜주면 시스템 행렬은 아래와 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -10021.9 & -20584.4 & -5966 & -158.3 \end{bmatrix}$$

$$B = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \quad C = [0 \quad -323.8 \quad -109.1 \quad 0]$$

극의 위치는 $[-100 \quad -50 \quad -3 \quad -0.6]$ 으로 정한다. 극배치에 의한 되먹임 이득 벡터는 Ackermann 공식에 의해 아래 식과같이 결정된다.

$$F = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] [B \quad AB \quad A^2 B \quad A^3 B]^{-1} \Phi(A) = [9 \quad 46 \quad 5 \quad 3]$$

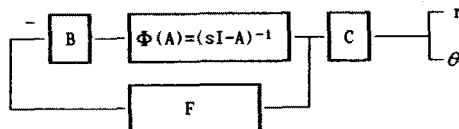


그림6 극배치 제어의 블록도

고주파 성분은 전체 시스템에 대한 비선형요소의 영향을 상대적으로 증가시키게되며 특히 속도 가변의 정도가 심하고 정역회전이 빈번한 독립 진자계에서는 시간적으로 빠르게 동작하는 고주파성분을 제거하여 줄 필요가 있다. 이를 위해서 적분기를 전방경로에 삽입하는 방법을 취하였으며 적분기의 이득상수는 안정한 영역(0.05-0.12)이내로하며 이중 가장 안정한 동태를 보이는 상수(0.08)를 취하여 모의실험을 행하였다.

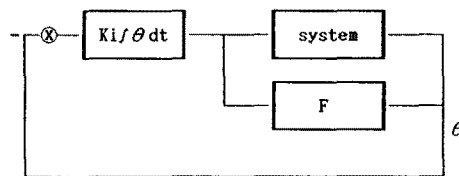


그림7 적분기를 첨가한 독립진자계의 블록도

5. 모의 실험 결과

최적제어 모의실험 결과

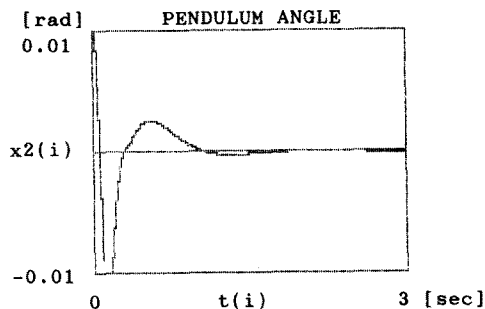
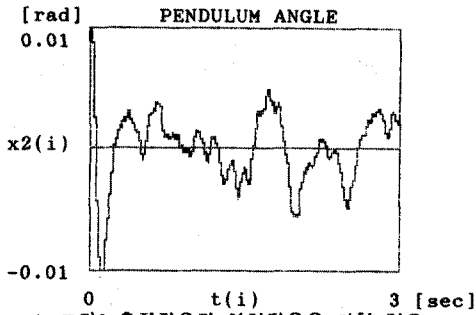
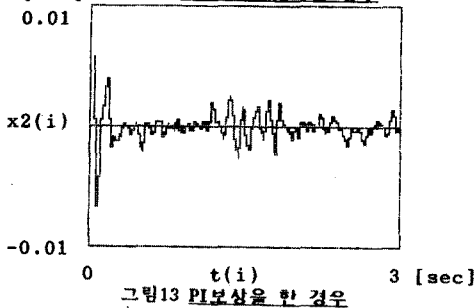
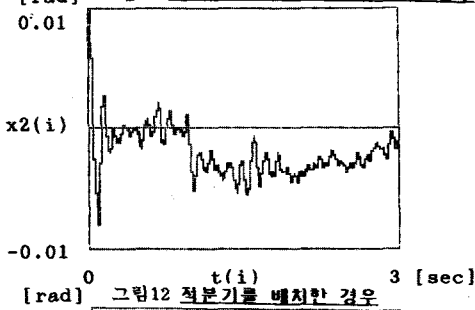
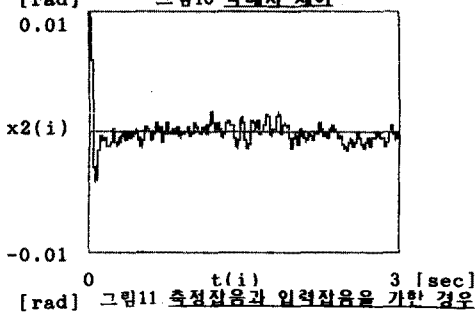
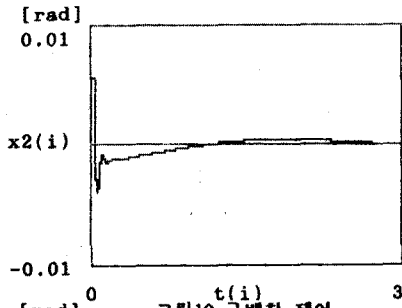


그림8 최적제어 모의실험 결과

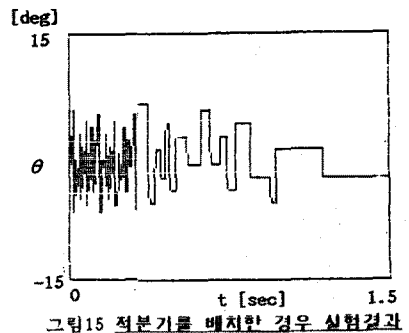
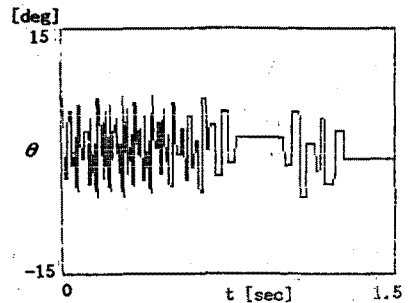
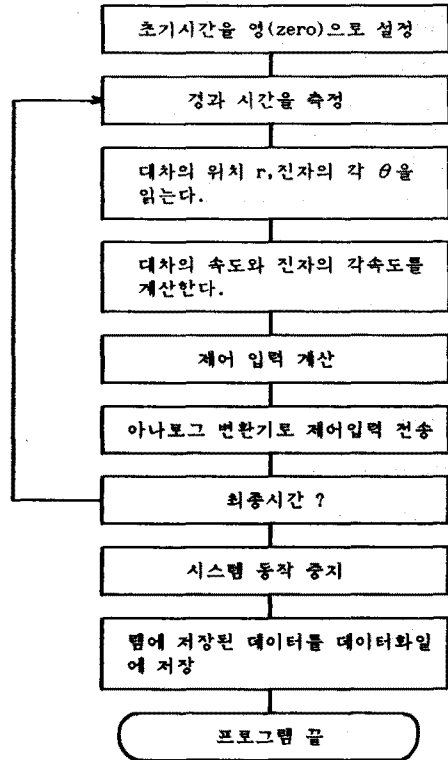


극배치 제어 모의실험 결과



6. 제어기의 실현

제어프로그램 흐름도



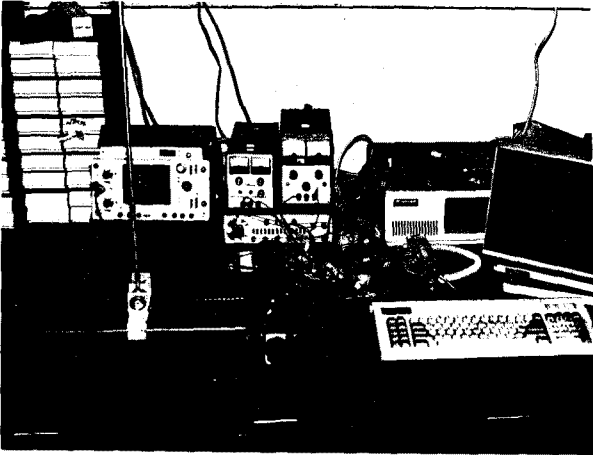


사진1 제작된 도립진자 시스템

- [7] "DC Motors, Speed Controls, Servo System, an engineering handbook prepared by Electro-craft Corp", Third-Edition, Pergamon Press.
- [8] 한문섭, 도립진자의 가변구조제어, 인하대 전기과 석사논문 1989.2
- [9] 세운 편집부, DC모타의 제어회로 설계, 도서출판 세운, 1985. 10

7. 결론

선형제어이론을 써서 도립진자의 안정화제어를 하는데 있어 가장 큰문제는 시스템의 비선형성으로 인한 매개변수의 변화이며 다소의 잡음이나 부정확한 매개변수의 측정으로 인해 정상상태 뿐만아니라 과도상태의 특성이 나타나게된다. 극(pole)을 충분히 안정한 영역에 배치하였다하더라도 시스템의 원하는 특성을 얻기가 곤란하여 이를 보상해주는 방법의 하나로서 PID요소를 삽입해주므로써 개선된 특성을 얻을 수가 있다. 특히, 실제의 시스템의 응답 변화보다 측정과정에서 발생하는고주파 성분이 문제가 되었을 시 적분기를 극배치 시스템에 개입 시키므로써 좀더 나은 특성을 얻을 수가 있었다.

대표적 선형 이론인 최적 제어기와 극배치 제어기의 도립 진자계에서의 특성을 모의 실험으로 비교하여 Q,R Matrix를 정하기가 모호한 최적제어 방식보다는 시스템의 특성을 원하는 규격에 맞추기 위해서는 오히려 극배치 방식이 용이함을 알 수가 있었다. 극배치 제어 방식 자체가 선형이론이고 기계적인 비선형 요소와 측정 잡음이 내재하고 있는 도립 진자계의 제어에 적분기를 부가 사용하여 저역 필터역할을 하게함으로써 개선된 특성의 제어를 구성할 수 있었다.

참고 문헌

- [1] C. Canudas, K. J. Astrom and K. Brown, "Adaptive Friction Compensation in DC-Motor Drives", IEEE Journal of Robotics and Automation, VOL. RA-3, No. 6, December 1987.
- [2] P.R.Dahl, "Measurement of solid friction parameters of ball bearings," in Proc. 6th Ann. Symp. Incremental Motion Control Systems and Devices, Univ. of Illinois, Chicago, 1977
- [3] Arthur E. Bryson, JR., and David G. Luenberger, "The Synthesis of Regulator Logic using State-variable Concepts", Proceeding of IEEE, Vol. 58, No. 14, November 1970.
- [4] Shozo Mori, Hiroyoshi Nishimura and Katsuhisa Furuta, "Control of Unstable Mechanical System, Control of Pendulum", INT. J. CONTROL, 1976, Vol. 23, No. 5, 673 - 692.
- [5] Kausuhisa Furuta, Hiroyuki Kajiwara and Kazuh-ro Kosuge, "Digital Control of a Double Inverted Pendulum on an Inclined Rail", INT. J. CONTROL, 1980, Vol. 32, No. 5, 907-924.
- [6] K. Furuta, T. Ochiai and N. Ono, "Attitude Control of a Triple Inverted Pendulum", INT, J. CONTROL, 1984, Vol. 39, No. 6. 1351-1365.