

## k - ε Model의 密度流에의 적용

대전대학교 토목공학과 許 再寧

부산전문대학 토목과 崔 漢起

대전대학교 토목공학과 李 吉永

부산대학교 토목공학과 姜 周復

### 1. 서론

表層放流되는 密度(噴)流은 밀도차에 기인하는 浮力을 받는다. 浮力에 의한 成層化는 연직방향의 亂流運動을 억제하므로, 周圍水와의 혼합을 저지한다. 이러한 流動을 해석 또는 계산함에 있어서 문제로 되는 것은 亂流輸送의 표현이다. 亂流成分을 표시하는데 있어서 渦動粘性(Eddy Viscosity)의 개념을 이용하는 경우, 그 係數는 시간적, 장소적으로 변화하는 양이므로 일의적으로 결정하는 것은 대단히 어려운 일이다. 보다 합리적인 亂流運動의 재현 및 예측을 위하여 k-ε Model에서는 渦動粘性을 亂流의 局小的인 운동에너지와 亂流運動의 규모를 나타내는 대표길이(Length Scale)의 함수로 가정하여 시간적, 장소적 變量으로서 취급한다.

한편, 安定成層場에 있어서의 亂流運動의 억제효과는 密度流의 擧動을 예측하는데 매우 중요한 요소인데, 그것의 적절한 표현을 위해서는 成層界面에 있어서의 亂流輸送에 대한 이해가 필요하다.

本稿에서는 成層場에서 亂流輸送의 예측에 k-ε Model을 적용함에 있어서 필요한 몇가지 중요한 사항에 대해 언급한다.

### 2. 지배방정식

流下방향에 X축, 연직방향에 Z축을 취하여, Fig.1 과 같은 이차원의 흐름을 생각한다.

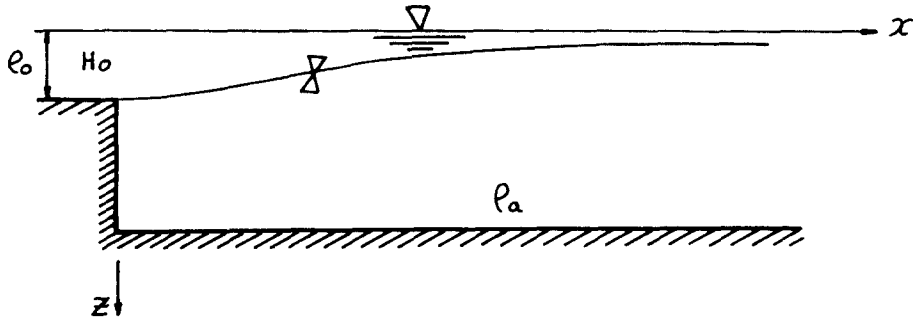


Fig.1 Coordinate System

지배방정식의 정식화에 있어서 다음과 같은 가정을 도입한다.

- 1) 유체는 비압축성이고, 밀도는 유체중의 용積濃度만에 의해 변화한다.
- 2) 연직방향의 가속도는 중력가속도에 비해 충분히 작아서 정수압 근사가 가능하다.
- 3) 밀도의 상대적인 변화는 周圍水의 밀도에 비해 무시 할 수있을 정도로 작아서 Boussinesq 근사가 가능하다.
- 4) 공간 Scale이 작으므로 Coriolis힘은 무시 할 수 있다.
- 5) 분자확산은 亂流擴散에 비해 충분히 작아서 지배방정식중에서는 무시 할 수 있다.

이상의 가정을 이용하면, 흐름의 지배방정식은 다음 식으로 표현된다.

$$\text{연속방정식: } \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (1)$$

운동방정식

$$\text{X방향: } \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + W \frac{\partial U}{\partial Z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} \left[ \nu_x \frac{\partial U}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Z} \left[ \nu_z \frac{\partial U}{\partial Z} \right] \quad (2)$$

$$\text{Z방향: } 0 = g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Z} \quad (3)$$

$$\text{확산방정식: } \frac{\partial N}{\partial t} + U \frac{\partial N}{\partial X} + W \frac{\partial N}{\partial Z} = \frac{\partial}{\partial X} \left[ K_x \frac{\partial N}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Z} \left[ K_z \frac{\partial N}{\partial Z} \right] \quad (4)$$

여기서, U, W는 X, Z방향의 평균유속, P는 압력,  $\rho$ 는 밀도,  $\nu_x$  및  $\nu_z$ 는 각각 X, Z방향의 渦動粘性係數, g는 중력가속도,  $N = (\rho_a - \rho)g / \rho_a$ ,  $K_x$  및  $K_z$ 는 X 및 Z방향의 渦動擴散係數,  $\rho_a$ 는 基準密度이다. 식(3)으로 부터 압력은 정수압 분포로 된다. 수표면의 위치를  $Z = -\zeta$ 로 하면 수심 Z에 있어서의 압력은 다음 식으로 나타내어 진다.

$$P = \int_{\zeta}^Z \rho g dz = \int_0^{\zeta} \rho_0 g dz + \rho_0 g \zeta - \rho_0 \int_{\zeta}^Z B dz \quad (5)$$

식(5)의 우변 제1항은 基準密度에 의한 압력이고, 임의의 수심에서 일정치를 취한다. 제3항은 密度偏差에 의한 압력, 즉 浮力에 의한 압력의 減少分이다.

### 3. K - ε 방정식

속도, 압력 및 密度偏差를 Reynolds의 방법에 따라서 평균치와 時間變動量의 관계로 나타내면 다음과 같다. 표기의 편의를 위해 tensor로 표시한다.

$$U_i = \bar{U}_i + u'_i, \quad P = \bar{P} + p', \quad \rho = \bar{\rho} + \rho' \quad (6)$$

단위질량의 亂流運動에너지 k 및 亂流에너지의 粘性消散率 ε을 다음과 같이 정의 한다.

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \quad (7)$$

$$\epsilon = \tau \frac{\partial u'_i}{\partial X_j} = \nu \frac{\partial u'_i}{\partial X_j} \frac{\partial u'_i}{\partial X_j} \quad (8)$$

Kolmogorov(1942) 및 Prandtl(1945)은 渦動粘性係數  $\nu_t$  가 局小的인 渦動 에너지  $k$  와 亂流에 관한 대표길이  $l$  에 의해 일의적으로 결정되는 것으로 가정하여 차원해석으로부터 다음 식을 유도하였다.

$$\nu_t = C'_\mu k^{1/2} l \quad (9)$$

여기서  $C'_\mu$  는 실험에서 결정되는 상수이다. 또한, Jones-Launder(1972)는 亂流特性量으로서의  $\epsilon$  을 亂流의 局小等方性(Local Isotropy)이 성립하는 높은 Reynolds수의 경우에 대해 다음과 같이 모델링화 하였다.

$$\epsilon = C_D \frac{k^{3/2}}{l} \quad (10)$$

여기서  $C_D$  는 실험상수이다. 식(9) 및 식(10)으로부터

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (11)$$

의 관계가 얻어진다. 여기서  $C_\mu = C'_\mu \cdot C_D$  이다.  $k - \epsilon$  에 관한 방정식을 구하기 위해 연속방정식 및 Navier-Stokes 방정식을 tensor로 표시하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial U_j}{\partial X_j} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X_j} [U_i \cdot U_j] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{\rho}{\rho_a} g \delta_{3i} + \frac{\partial}{\partial X_j} \left[ \nu_t \frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right] \quad (13)$$

여기서  $\delta_{3i}$  는 Kronecker delta function이다.

식(6) ~ 식(11)을 이용하여 식(11) 및 식(13)을 정리하면 다음 방정식을 얻는다.

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial k}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_i} \left[ \overline{-u'_i \left( k + \frac{P'}{\rho} \right)} + \nu \frac{\partial k}{\partial X_i} \right] - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial X_j} + \overline{u'_i \pi'} \delta_{3i} - \nu \left( \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial X_j} \right)^2 \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_j} = & \frac{\partial}{\partial X_j} \left[ -\overline{u_j'} \nu \left( \frac{\partial u_i'}{\partial X_k} \right)^2 + \nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_j} \right] - 2\nu \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial X_j} \left[ \frac{\partial u_i'}{\partial X_k} \frac{\partial u_j'}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k'}{\partial X_j} \frac{\partial u_k'}{\partial X_j} \right] \\
& - 2 \left[ \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i'}}{\partial X_j \partial X_k} \right]^2 + 2\nu \frac{\partial u_i'}{\partial X_k} \frac{\partial n'}{\partial X_k} \delta_{3i} \\
& - 2\nu \left[ \frac{\partial^2 \overline{U_i}}{\partial X_k \partial X_j} \frac{\partial u_i'}{\partial X_k} + \frac{\partial u_i'}{\partial X_k} \frac{\partial u_j'}{\partial X_k} \frac{\partial u_i'}{\partial X_j} + \frac{\partial}{\partial X_i} \left\{ \frac{\partial u_i'}{\partial X_k} \frac{\partial}{\partial X_k} \left( \frac{p'}{\rho} \right) \right\} \right]
\end{aligned} \tag{15}$$

여기서,  $n'$  부력의 시간변동치 이다.

#### 4. k - ε 방정식의 Model화

局小等方性의 가정으로 부터 應力 Flux 및 浮力 Flux는 다음과 같이 표현 된다.

$$-\overline{u_i' u_j'} = \nu_t \left( \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial X_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial X_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \tag{16}$$

$$-\overline{u_i' n'} = \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \overline{n}}{\partial X_i} \tag{17}$$

여기서  $\delta_{ij}$  Kronecker delta function,  $\sigma_t$  는 亂流 Schmidt數 이다.

또한, 식(14)의 우변 제1항은  $u_i'$ 에 의한 亂流에너지의 擴散이므로, 分子 擴散 과의 유사성으로 부터  $k$ 의 기울기에 비례한다고 가정하고, 그 경우의 擴散係數를  $\Gamma_k$ 로 나타내면 다음과 같이 된다.

$$-\overline{u_i' \left( k + \frac{p'}{\rho} \right)} + \nu \frac{\partial k}{\partial X_i} = \Gamma_k \frac{\partial k}{\partial X_i}$$

윗 식의  $\Gamma_k$  는 k에 관한 亂流擴散係數이므로  $\sigma_k = \frac{\nu_t}{\Gamma_k}$ 인 k에 관한 亂流 Schmidt 數를 정의 하면

$$-u'_i \left( k + \frac{\rho'}{\rho} \right) + \nu \frac{\partial k}{\partial X_j} = \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial X_j} \quad (18)$$

으로 표시된다. 여기서  $\sigma_k$  는 실험에 의해 결정 된다.

식(15)에 관해서도 유사한 가정을 이용하여 정리 할 수 있다. 식(15)의 우변 제1항은  $\epsilon$ 의  $u'_j$ 에 의한 擴散項으로 식(18)과 마찬가지로  $\epsilon$ 의 기울기에 비례한다고 가정하여  $\epsilon$ 의 亂流擴散係數를  $\Gamma_\epsilon$ 으로 두면

$$-u'_j \nu \left( \frac{\partial u'_i}{\partial X_k} \right)^2 + \nu \frac{\partial \epsilon}{\partial X_j} = \Gamma_\epsilon \frac{\partial \epsilon}{\partial X_j}$$

$\sigma_\epsilon = \nu_t / \Gamma_\epsilon$ 인  $\epsilon$ 에 관한 亂流 Schmidt 數를 정의 하면

$$-u'_j \nu \left( \frac{\partial u'_i}{\partial X_k} \right)^2 + \nu \frac{\partial \epsilon}{\partial X_j} = \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial X_j} \quad (19)$$

로 된다.

여기서  $\sigma_\epsilon$ 은 실험에 의해 결정된다. 우변 제2항은 이하는 Davidov(1961)에 따라서 근사한다.

$$2\nu \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial X_j} \left[ \frac{\partial u'_i}{\partial X_k} \frac{\partial u'_j}{\partial X_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial X_j} \frac{\partial u'_k}{\partial X_i} \right] = -C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \left[ \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial X_i} \right] \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial X_j} \quad (20)$$

$$2 \left[ \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial X \partial X} \right]^2 = C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (21)$$

$$2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial X_k} \frac{\partial \bar{n}'}{\partial X_k} = C_{\epsilon 3} \frac{\epsilon}{k} \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \bar{n}}{\partial X} \sigma_{31} \quad (22)$$

여기서,  $C_{\epsilon 1}, C_{\epsilon 2}, C_{\epsilon 3}$ 는 실험에서 결정되는 상수이다. 또한, 제5항은 생략한다. 식(16), (18)을 식(14)에 대입하고, 식(17), (19), (20), (21), (22)를 식(15)에 대입하여 정리하면 k,  $\epsilon$  및 유속, 浮力의 時間平均値에 관한 방정식이 얻어진다.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{U}_j \frac{\partial k}{\partial X_j} &= \frac{\partial}{\partial X_i} \left[ \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial X_j} \right] + \nu_t \left[ \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial X_i} \right] \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial X_j} \\
\text{시간변화율} \quad \text{이류} \quad \quad \quad \text{확산} \quad \quad \quad \text{전단에 의한 생성} \\
&+ \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \overline{n}}{\partial X_j} \delta_{3i} - \epsilon \\
&\quad \quad \quad \text{점성소산} \\
&\quad \quad \quad \text{부력에 의한 생성 혹은 소멸}
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \overline{U}_j \frac{\partial \epsilon}{\partial X_j} &= \frac{\partial}{\partial X_j} \left[ \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial X_j} \right] \\
\text{시간변화율} \quad \text{이류} \quad \quad \quad \text{확산} \\
&+ C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \nu_t \left[ \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial X_i} \right] \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial X_j} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} - C_{\epsilon 3} \frac{\epsilon \nu_t}{k \sigma_\epsilon} \frac{\partial \overline{n}}{\partial X_j} \delta_{3i} \\
&\quad \quad \quad \text{생성 및 소멸}
\end{aligned} \tag{24}$$

대상으로 하는 흐름場은 식 (23) 및 식 (24)를 식 (9)~(11)의 관계와 더불어 數值的으로 풀어서 계산되어 진다. 또한, 실험상수  $C_\mu$ ,  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\epsilon$ ,  $C_\epsilon$  등은 Rodi(1979)에 의해 제안 되어져 있다.

### 5. Model의 적용에 있어서의 문제점

#### (1) 自由水表面의 亂流變動成分 거동에 미치는 영향

自由水表面의 존재는 亂流變動에 다음과 같은 두 가지의 영향을 미치는 것으로 지적되고 있다 (Celik et al. 1984).

a. 自由水表面 근방에서는, 연직방향의 亂流變動이 약화되고, 壓力變動成分의 공헌에 의해 수표면에 평행한 亂流變動이 증폭된다.

b. 自由水表面의 기하학적 제한에 기인하여 亂流變動의 길이 Scale은 自由水表面에 가까울 수록 작아진다.

a, b 항 모두 亂流變動에 의한 연직방향의 운동량 및 浮力輸送을 억제하는 역할을 한다.  $k - \epsilon$  Model은 식(16)에서와 같이 局小等方性を 전제로 하고 있으므로 수표면에서의 자유亂流가 억제되는 흐름場에 적용하기 위해서는 補正이 필요할 것이다. 이러한 補正은 결국 경계조건으로서 식(11)의  $C_\mu$ 를 수정하는 것인데, 이것에 관해서는 McGuirk-Papadimitriou(1985)의 연구등이 있으나, 그 타당성은 아직 증명 되고 있지 않다. 한편, 보다 高次의 亂流모델인 Reynolds stress model에서는 Reynolds stress방정식의 pressure-strain 相關項에 水表面補正係數를 도입하고, 水表面에서의 粘性 消散率  $\epsilon_s$ 를 亂流에너지와 대표길이를 사용해 특정화 하는 방법도 모색되고 있다.

### (2) 浮力에 의한 亂流에너지의 生成 및 消滅

浮力 즉, 密度偏差에 기인하는 항은 식(23)의 우변 제3항 및 식(24)의 우변 제4항 인데, 일반적으로 생략되고 있다. 그러나, 密度流가 均質流와 그 성질을 달리하는 것은 密度偏差에 의한 亂流에너지의 生成 및 消滅이다. 坂井 등(1987)은 방정식의 효과에 관한 검토를 행하여, 이 項이 흐름場의 成層化에 미치는 영향은 무시 될 수 없음을 밝혔다. 그러나, 그들의 浮力項의 定式化는 저자들의 定式化와는 근본적으로 상이하며, 특히 실험상수  $C_{\epsilon 3}$ 의 값은 근거가 희박한 방법에 의해 결정되고 있다. 따라서, 이들 浮力項에 관한 검토는 면밀하게 행해져야 할 것이다.

### (3) 亂流 Schmidt數 $\sigma_t$

亂流 Schmidt數  $\sigma_t$ 는 渦動粘性係數  $\nu_t$ 와 渦動擴散係數  $K_t$  (혹은  $\Gamma_t$ )와의 比인데 成層化조건하에서 亂流輸送係數의 평가에 관하여 보편적으로 인정 되어져 있는 것은 없다. 成層化된 경계층에 있어서의 亂流混合係數에 관한 많은 경험식은 국소 Richardson數의 함수로서 나타내어져 있다. 成層化의 정도가 흐름의 전개에 미치는 영향은 대단히 크고, 수치계산에서 민감한 요소의 하나이다. 이에 관한 것은 저자중 한명(許, 1988)에 의해 검토되어져 있다.



## References

- 1) Kolmogorov, A.A.: Equations of Turbulent Motion of an Incompressible Fluid, Izv. Akad. Nauk, SSSR Ser Phys. VI. No.1-2, 56, 1942
- 2) Prandtl, L.: Über ein neues Formel-system für die ausgebildete Turbulenz, Nachr. Akad. Wiss., Göttingen, Math-Phys. K1-6, 1945
- 3) Jones, W.P. and Launder, B.E.: The Prediction of Laminarization with a 2-Equation Model of Turbulence, Int. J. Heat & Mass Transfer, Vol. 15, 301, 1972
- 4) Celic, I. and Rodi, W.: Mathematical Modeling of Suspended Sediment Transport in Open channels, 21st IAHR, 1985
- 5) McGuirk, J.J. and Papadimitriou, C.: Buoyant Surface Layers under Fully Entraining and Internal Hydraulic Jump Conditions, 5th Int. Symp. on Turbulent Shear Flows.
- 6) 坂井伸一・岩佐義朗・細田 尚 :  $\epsilon$  - 方程式の浮力項の効果に関する検討, 土木學會 第42回 年次學術講演會, 1987
- 7) Murota, A., Nakatsuji, K. and Huh, J.Y.: A Numerical Study of Three-Dimensional Buoyant Surface Jet, 6th IAHR-APD, 1988