# 자연하천의 2차원 수치모델

인하대학교 부교수 심명필

**요지**

자연하천에서의 흐름특성을 해석하기 위해 Boundary - fitted (BF) coordinate system을 응용하여 유한차분법에 의한 2차원모델을 개발하였다.

BF coordinates는 경계면의 형상에 관계없이 적용할 수 있으며 모든 계산은 기본식의 좌표변환을 통해 직각좌표계에서 행해지므로 경계조건의 입력에 용이하다. Physical domain ( X - Y 좌표계 )에서 하천의 형상을 입력하면 Grid generation에 의해 모든 계산은 Computational domain ( $\xi - \eta$ 좌표계 )에서 행해진다. Computational domain에서의 유한차분법은 half - time step으로 ADI 방법을 이용했고, 한 방향의 유속과 수위를 Double sweep으로 풀었다. 유속, 수위 및 하상의 격점망은 Staggered grid system을 사용했으며 geometric elements는 각 격점별로 계산하였다.

본 모델을 이용하므로써 불규칙한 수로나 하천의 흐름상태를 해석할 수 있으므로 흐름의 종단, 횡단방향의 유속분포,Superelevation을 구할 수 있고 하천의 계획, 관리, 제방의 호안이나 구조물의 설치등으로 일어나는 수리학적 영향등을 예측할 수 있다.

## 1. 서론

개수로 및 자연하천에서의 흐름상태를 규명하기 위해 많은 수치모델들이 개발되었으나 대부분의 모델들은 격자간격이 일정한 직각좌표계에서 계산함으로 인해 복잡한 단면을 나타내기 위해서는 격자간격이 상대적으로 작아야 하며 따라서 수많은 격자가 필요하여 비

효율적일 수 있다. 더우기 대부분의 연구는 하나의 만곡부 혹은 일정한 곡률반경, 일정한 하폭에 적용한 것인데 반해, 실제의 자연하천은 하폭, 수심도 종횡으로 변할뿐 아니라 곡률반경이 다른 많은 수의 만곡부로 이루어져 있고 만곡부의 원심력의 영향과 난류현상으로 2차류가 발생되어 결과적으로 하천의 종단방향으로 나선형 운동이 일어나 하상은 유사의 침식, 수송 및 퇴적작용으로 끊임없이 변하게 된다.

본 논문에서는 불규칙 경계면을 고려할 수 있는 Boundary - fitted (BF) coordinate system 을 응용하여 depth - averaged 2차원식에 적용하였으며, 만곡부의 영향을 고려한 실제의 자연하천의 흐름의 특성을 모의발생할 수 있는 수치모델(BFtwo)을 개발하였다.

## 2. 수치모델의 개발

### 2.1 기본식

수치모델을 위한 흐름의 기본식은 연속방정식과 운동량방정식이며, 연직방향으로 평균한 (depth - averaged) X, Y 방향 2차원식을 이용한다. 이러한 식에서 점성, 난류 및 연직방향 적분에 의한 응력항의 3가지로 구성되는 유효응력이 포함되나, 일반적으로 하천의 흐름에서는 난류에 의한 영향이 훨씬 크므로 점성 및 적분에 의한 전단응력항을 무시하고 하상에서의 전단응력은 Chezy 유속식으로 표시하면 다음과 같다

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial (uh)}{\partial x} + \frac{\partial (vh)}{\partial y} = 0 \qquad \text{---(1)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -g\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{g}{c^2 h}u(u^2+v^2)^{0.5} + \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial x}(hE_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial y}(hE_{xy}\frac{\partial u}{\partial y}) \text{---(2)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -g\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{g}{c^2 h}v(u^2+v^2)^{0.5} + \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial x}(hE_{xy}\frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial y}(hE_{yy}\frac{\partial v}{\partial y}) \text{---(3)}$$

여기서 u, v 는 x, y 방향의 유속이며, $\phi$ 는 수면고를 나타내며 하상고 z 와 수심 h 의 합으로 표시된다. $E_{xx}, E_{xy}, E_{yy}$ 는 난류 확산계수이다.

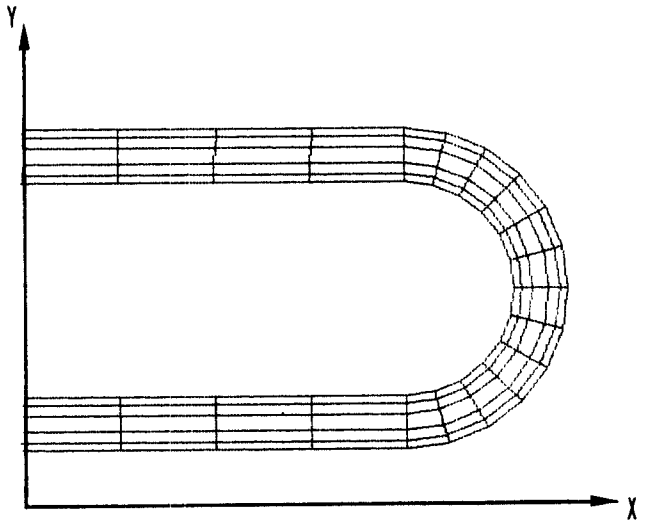


Fig. 1 Physical Domain

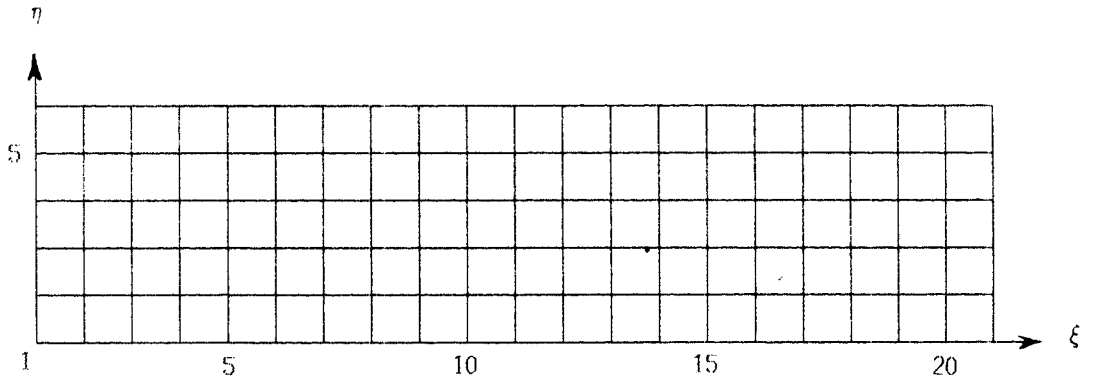


Fig. 2 Computational Domain

## 2.2 격자망의 발생

불규칙한 경계면을 다루기 위한 BF Coordinate로 좌표변환을 하므로서 유한차분법을 적용할 수 있으며 모든 계산은 Fig. 1 의 Physical domain (X-Y coordinate)으로 부터 Fig. 2 에서와 같이 좌표변환된 Computational domain ( $\xi-\eta$ Coordinate)에서의 직각 좌표계에서 이루어진다. BF 시스템의 격자 발생은 Vertical interpolation, Transfinite interpolation 또는 두개의 Poisson equations을 푸는 Elliptic Generation System을 사용할 수 있으며 임의의 횡단면에 따른 유속 및 수위분포를 구할때는 Vertical interpolation 이 더 편리하다.

## 2.3 Computational domain에서의 식의 변형

모든 경계조건은 Computational domain 의 직선경계면에 주어지고, 기본식들은 $\xi$ 와 $\eta$ 가 독립변수가 되도록 변환되어야 하고, 예를 들면, 유속 u의 x,y에 대한 1차미분항은 다음과 같이 변형된다.

$$u_x = \frac{1}{J}[(uy_\eta)_\xi - (uy_\xi)_\eta] \qquad \text{——(4)}$$

$$u_y = \frac{1}{J}[(ux_\xi)_\eta - (ux_\xi)_\eta] \qquad \text{——(5)}$$

여기서 J는 Jacobian 계수로서 $J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$ 이며, 본 논문에서 첨자변수 $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ 를 표시하며 계수를 제외한 모든 변수는 같은 경우로 쓰인다. 기본식 (1) ~ (3)은 Computational domain에서 $\xi$ 와 $\eta$ 가 독립변수가 되도록 변환되어 지며, 식 (1)은 다음과같이 변형되고, 식 (2) 와 (3)은 같은 방식으로 된다.

$$\phi_t + \frac{1}{J}[(huy_\eta)_\xi - (huy_\xi)_\eta - (hvx_\xi)_\xi + (hvx_\xi)_\eta] = 0 \qquad \text{——(6)}$$

## 2.4 유한차분식의 전개

기본식들을 유한차분식으로 나타내기 위해 $\xi - \eta$ 방향 격자망의 구성은 Fig. 3 와 같이 Staggered grid를 이용했으며 격자의 간격은 모두가 $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$ 이 되도록 한다.

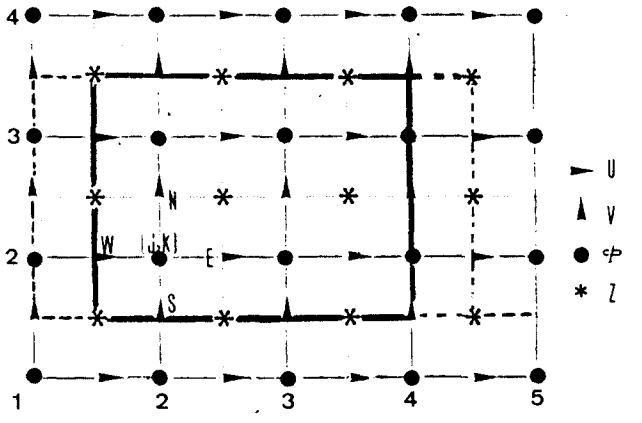


Fig. 3 Staggered Grid System
(example for js=4 & ks=3)

본 모델에서 $\xi - \eta$ 축에 연직으로 취한 각 time step은 $\frac{\Delta t}{2}$ 로 두단계로 나누어 ADI 방법을 이용하여 계산된다. 첫단계에서는 $\xi$ 방향으로 연속방정식과 $\xi$- 운동량 방정식으로부터 수위$\phi$와 유속 u가 계산된다. 둘째단계에서는 $\eta$ 방향으로 음해법과 양해법을 이용한다. 연속방정식의 처음 두항의 좌표변환 및 차분식은 다음과 같다.

$$\phi_t^{n+0.5} = \frac{\phi_{j,t}^{n+0.5} - \phi_{j,t}^{n}}{\Delta t/2} = \frac{\phi(j,k,2) - \phi(j,k,1)}{\Delta t/2} \qquad \text{——(7)}$$

$$\begin{aligned}
(hu)_x^{n+0.5} &= \{[(W - Z_b)u]_{j,k}^{n+2}\}_x \qquad \text{——(8)} \\
&= \frac{1}{J}[(huy_\eta)_\xi - (huy_\xi)_\eta]_{j,k}^{n+0.5} \\
&= \frac{1}{J}\{[(huy_\eta)_E - (huy_\eta)_W]^{n+0.5} - [(huy_\xi)_N - (huy_\xi)_S]^n\} \\
&= \frac{1}{J}[h_E \cdot u(j,k,2) \cdot yeta(j,k) - h_W \cdot u(j-1,k,2) \cdot yeta(j-1,k)] \\
&\quad - \frac{1}{J}[h_N \cdot UAVS \cdot yxi(j,k) - h_S \cdot UAVS \cdot yxi(j,k-1)] \\
&= JDEY \cdot u(j,k,2) - JDWY \cdot u(j-1,k,2) - JDNY \cdot UAVN - JDSY \cdot UAVS
\end{aligned}$$

여기서 $h_E$ 는 식 (9) 와 같이 E점에서 n - time step에서의 수심을 나타내며, UAVN은 n - step에서 N지점에서의 평균유속이다.

$$h_E = 0.5[W(j+1,k,1) + W(j,k,1) - Z(j,k) - Z(j,k-1)] \quad \text{—(9)}$$

같은 방법으로 남은 항들을 풀면 연속방정식은 다음과 같이 정리 될 수 있다.

$$C_j u(j-1,k,2) + \phi(j,k,2) + D_j u(j,k,2) = E_j \quad \text{—(10)}$$

여기서 $C_j, D_j, E_j$ 는 n - step에서 구해지는 값들이다.

x방향 운동량방정식도 $\xi - \eta$ 좌표계로 변형한 뒤 유사한 방법으로 전개하면 다음식과 같다.

$$T_1 \cdot \phi(j,k,2) + A_j u(j,k,2) + T_2 \cdot \phi(j+1,k,2) = B_j \quad \text{—(11)}$$

식 (10) 과 (11) 로부터 유속 혹은 수위의 경계조건이 주어지면 double - sweep algorithm을 이용하여 tridiagonal matrix식을 풀 수 있다. 난류에 의한 점성항을 풀기 위해서는turbulence model을 이용하거나, 난류확산계수를 일정한 값으로 가정할 수 있으나 본 모델에서는 주위의 유속을 평균하므로서 난류의 영향을 고려하였다.

### 2.5 BF Coordinate system의 정도

본 model에서 유한차분식의 molecule의 구성은 FTCS (Forward - time and centered - space)를 적용하여 풀었으며 결과적으로 $\xi, \eta$ 방향으로 2차정도, 즉 O(2)를 가지며 시간축은 1차정도를 갖게된다. 그러나 격자간격의 변화와 비직교성(nonorthogonality)의 오차가 고려되어야 한다. 직각좌표계에서, $f_x = [(fy_\eta)_\xi - (fy_\xi)_\eta]$ 으로 표시되며,

centered - space를 적용하므로 $f_\xi$ 의 truncation error는 $\frac{1}{6}f_{\xi\xi\xi}$ 가 되고, $\xi-\eta$ 좌표로 변환된 $f_x$ 의 오차 $T_x$ 는 다음과 같다.

$$T_x = -\frac{1}{6J}(f_{\xi\xi\xi}y_\eta - f_{\eta\eta\eta}y_\xi) \qquad \text{—(12)}$$

결과적으로 $f_x$ 는 O(2) 와 O(h)를 가진다. 여기서 h는 격자간격이며 비직교성에 의한 오차를 고려하면 $T_x$ 는 $\xi$ = Const. 와 $\eta$ = Const.인 두 선으로부터의 경사각(즉 직사각형으로 부터의 변형각) $\theta_1$ 과 $\theta_2$ 의 함수로 나타내지며 다음식과 같다.

$$T_x = -\frac{1}{6\sin(\theta_1-\theta_2)}[h^2\sin\theta_1(\cos\theta_1\frac{\partial}{\partial x}+\sin\theta_2\frac{\partial}{\partial y})^3 f - h^2\sin\theta_2(\cos\theta_1\frac{\partial}{\partial x}+\sin\theta_2\frac{\partial}{\partial y})^3 f] \quad -(13)$$

### 3.1 입력자료 및 경계조건

기본적인 입력자료는 Physical domain (x-y 좌표계)에서의 하천의 경계면을 나타내는 x, y좌표이며, 하상고를 나타내는 z좌표값은 하상경사가 일정하지 않거나 불규칙 하상일때는 선택적으로 각각의 Node에서 입력될 수 있다.

본 수치모델에서는 3가지 유형의 경계면이 존재한다. 유입부와 유출부에서는 유속이나 수위가 주어져야 하며, 벽면에서의 경계조건은 No - slip condition일때는 v = 0,u = 0 이며 slip 조건일때는 $v = 0, \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ 이며 두조건을 각각 적용 비교하였다. 초기조건은 정류상태로 빨리 도달하기 위해서 일정한 수심(등류수심), 유속은 0 으로 가정하고, 유입부의 유속을 조금씩 증가시켜 경계조건에 일치시켰으며 아울러 유출부에서는 일정수위에서 조금씩 가감하여 경계조건에 접근시켰다. 정류상태를 구하기 위해서 각 점에서의 유속 및 수위를 전 시간 단계에서의 값들과 비교하여 허용오차내에 들때 계산을 중지하도록 했으나 부정류 상태에서는 각각의 값들이 조금씩 변하므로 허용오차의 결정에는 주의가 필요하다.

### 3.2 적용예

하폭이 다르고 여러개의 만곡부를 갖고 있는 Fig. 4 과 같은 임의의 하천형상에 모델(BFtwo)을 적용하였다. Fig. 4 에서 A, B 측 점들의 X, Y 좌표와, 각지간격을 달리한 경우 dist(k)의 비율이 입력되면 Fig. 5 과 같은 격자망이 발생하고, Computational domain( $\xi-\eta$ 좌표계)에서 각 격점마다 X, Y 값 및 $X_\xi, X_\eta, Y_\xi, Y_\eta$, Jacobian 계수등의 metric element가 계산된다.

입력자료는 초기조건으로 유속 및 수심은 각각 0 과 6 m 로 하고 유입부에서의 유속은 1.0 m/sec, 유출부에서의 수면고는 평균경사 0.0002를 주어 Chezy의 등류공식으로부터 가정하도록 했으며 Chezy계수는 45 $m^{1/2}$/sec를 주었다. Time step은 각각 다른 값을 주어 비교해본 결과 dt = 2 sec 일 경우 정류상태가 되는데 많은 시간이 걸리고 dt = 100 sec 인 경우에는 unstable하여 진다. Fig. 6 은 dt = 10 sec 으로 주어지고 정류상태에서의 유속분포도이다. 유속의 분포는 #8 ~ #14 까지는 B측이 A측보다 빠르고 #20 이후는 A측이 빨라진다. Fig. 7 은 횡단면에 따른 수위를 나타내며 #3 ~ #15번까지가 A측이 수위가 높고 #9에서 최고 3.4 cm차이를 보인다. #16 ~ #27 까지는 B측이 높은 수위를 보여주고 #24에서 최고 6 cm 의 차이를 보이며 만곡부에서 원심력에 의한 수면형의 변화를 잘나타낸다. 횡단방향의 유속 v는 #7 ~ #13에서 A측으로 미소량이 나타나고 #20 ~ #29에 B측으로 조금더 큰 유속을 보인다.

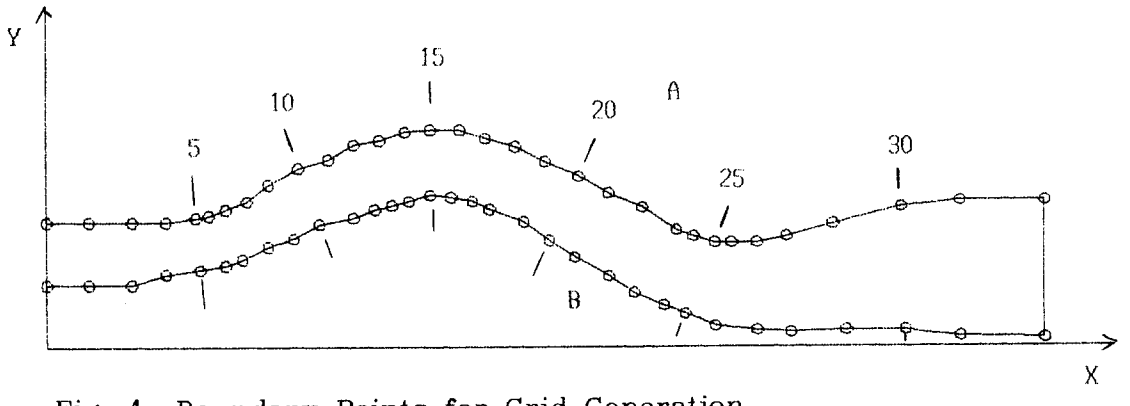


Fig. 4 Boundary Points for Grid Generation

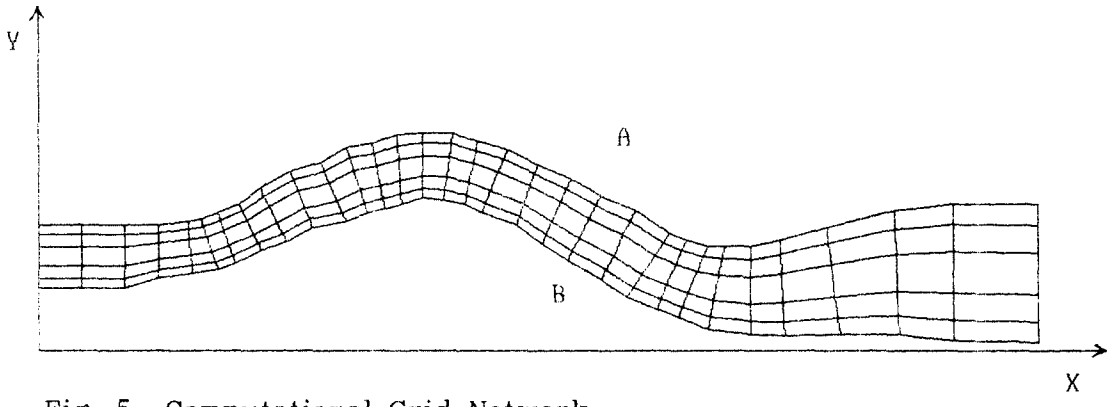


Fig. 5 Computational Grid Network

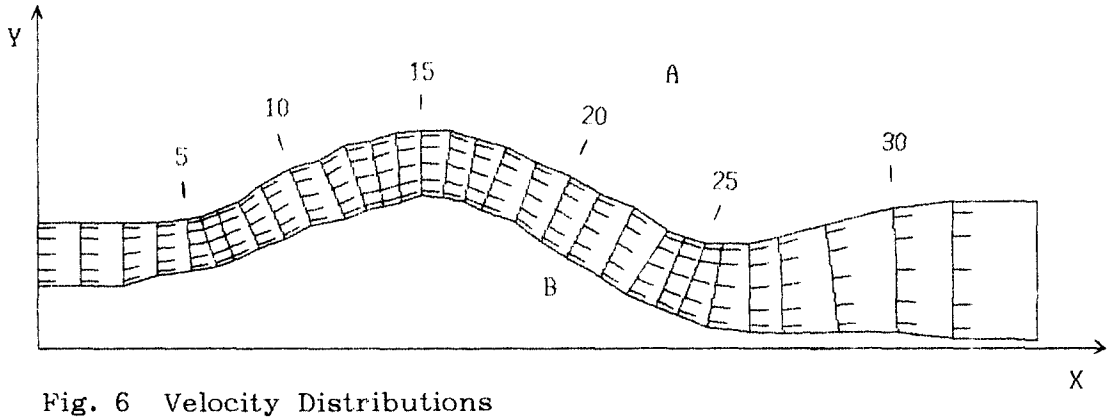


Fig. 6 Velocity Distributions

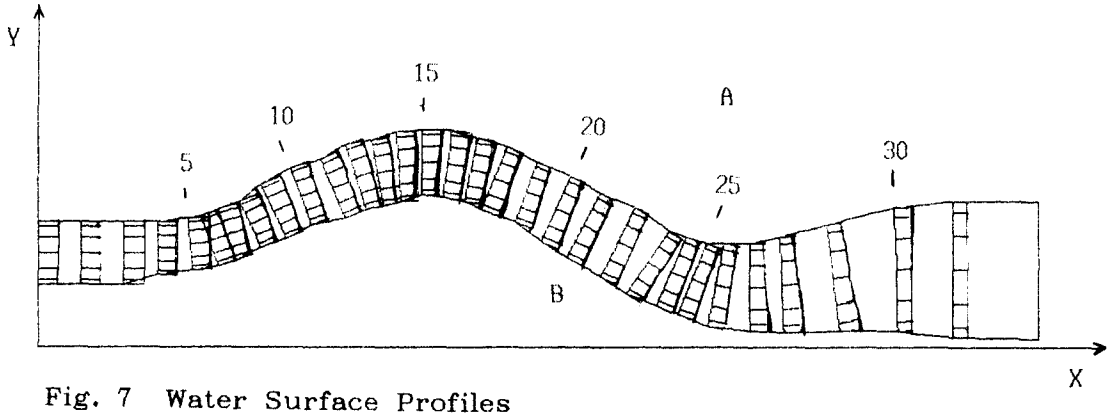


Fig. 7 Water Surface Profiles

## 4. 결론

본 수치모델의 적용결과 얻은 결론을 요약하면 다음과 같다.

(1) 복잡한 단면을 가진 사행하천의 경우 BF Coordinates system을 적용하므로서 경계조건의 적용에 용이하다.

(2) 격자망의 발생을 위해서 Vertical interpolation, Transfinite 을 각각 사용하여 비교해 본 결과 거의 같은 결과를 얻었으나, 비직교성에 의한 오차를 줄이고 임의의 횡단면에 따른 유속이나 수위의 분포를 구하기 위해서는 계산이 간편한 Vertical interpolation이 편리하다.

(3) 정류상태를 얻기위해서는 많은 시간이 필요하나 본 모델은 ADI법을 이용했으므로 적절한 시간간격을 조정하므로서 짧은 time step에 안정한 정류상태에 도달할 수 있다.

(4) 사행성이 심한 하천의 경우 유입, 유출 부분은 비교적 긴 직선부를 길도록 하는 것이 정확한 값을 구할 수 있으며 만곡부에서의 바깥쪽으로 수위가 높아지는 superelevation을 나타내며 횡단면에 따른 유속변화를 알 수 있으며 종단면에 따른 최고유속의 흐름을 알 수 있고, 결론적으로 하상고가 다른 경우를 포함하여 부등류의 경우도 적용된다.