비순환적 네트워크에서의 최대효용경로 문제와 그 최적해법.

(The Modelling and Solution Method for Maximum Weighted Path in an Acyclic Network Problem)

성 기 석*

박 순 달*

요 약 문

본 연구에서는 수송 네트워크에서의 최대효용경로 문제를 정의하였다. 그리고 비순환적인 수송 네트워크에서의 최대효용경로를 구하는 최적해법을 제시하였다.

일반적인 수송 네트워크에서 각 경로가 가지는 효용가치는, 그 경로를 설치함으로써 연결 가능하게 되는 모든 마디의 쌍이 얻는 효용의 합이다. 즉, 일정한 출발지로 부터 도착지에 이르는 운송노선이 중도에 경유하는 모든 지점들 사이에 요구되는 운송 서어비스를 충족시켜줌으로써 얻게되는 효용의 합이 최대가 되도록 경유지를 정하는 문제를 최대효용경로 문제로 모형화하였다.

그리고 주어진 수송 네트워크가 비순환적인 경우라 하드라도 정의된 최대효용 경로 문제가 NP-hard 임을 3-Satisfiability 문제를 이용하여 보였다.

또한 Shortest Path 와 K-th Shortest Path 를 이용하여 최적해법을 개발하였다.

* 서울대학교 산업공학과

1. 서 론

오늘날 산업이 발달함에따라 각 지역간 또는 각 지역내의 유기적인 연계성이 커지고 그의 결과로서 지역간 또는 지역내의 운송서어비스에 대한 수요가 증가하게 되었다. 특히 도시간 또는 도시내의 공공교통 및 운송체계는, 다량의 다양한 운송수요를 만족시키기 위해 더욱 복잡하고 섬세하며 광범위한 운송체계를 구축하게 되었다.

도시간 또는 도시내의 공공운송체계는 열차, 정기화물트럭, 콘테이너 선박, 노선버스, 지하철 등을 들 수있다. 이들은 일정한 노선을 따라 운행하면서 그 노선상에서 경유하는 도시나 지점들 사이에 발생하는 운송수요를 충족시켜 준다는 점에서 일반적인 공통점을 갖고 있다.

일반적인 수송 네트워크에서 각 노선의 효용가치는, 그 노선을 설치함으로써 연결 가능하게 되는 모든 도시나 지역간에 증대되는 효용의 합이다. 즉, 일정한 출발지로 부터 도착지에 이르는 운송노선이 중도에 경유하는 모든 지점들 사이에 요구되는 운송 서어비스를 충족시켜줌으로써 발생하는 효용의 합이다.

버스노선, 지하철 노선,고속도로의 경유지 등을 정하는 문제를 모형화 할 때, 각 지역간의 승객수, 화물량, 연계의 중요성 등을 조사하여 가능한 한 많은 승객이나 화물을 서어비스하고 지역간의 연계를 이루도록 노선을 정해야 한다.

이렇게, 수송망에서 최대의 효용을 가지도록 운송노선의 경유지를 정하는 문제를 최대효용경로 문제로 모형화하고 최적해법을 제시한다.

여태까지의 경로에 관한 문제는 네트워크상의 각 호(arc)나, 호에 의해 인접된 마디쌍들에 관련된 모수들을 다루는 것이 대부분이었으나,여기서 제시하는 최대효용경로 문제는 네트워크상에서 곧바로 인접해있지 않드라도연결이 가능한 마디의 쌍들에 관련된 모수를 다룬다는데 의의가 있다.

이론적인 측면에서는 NP-hard 인 문제를 푸는데 있어서, 분지한계법이나 라그랑즈완화 등의 방법을 사용하지 않고, 해의 상한값과 하한값을 순차적으로 구하여 그 차이를 좁혀가는 방법을 사용하였다는데 의의가 있다. 또한 이 문제의 해법은, 각 마디간에 유기적인 관계가 존재하는 네트워크에서 특정한 목적의 경로를 찾는 유형의 문제를 푸는데 이용될 수 있다는데 의의가 있다.

2 경로 문제

네트워크에서 정해진 출발 마디로 부터 정해진 도착 마디에 이르는, 호와 마디의 연결된 집합을 경로(Path)라 하고, 주어진 조건을 만족하는 특정한 목적의 경로를 찾는 문제를 경로 문제(Path Problem)라 한다. 이러한 경로 문제에 관해서 많은 사람들이 연구해왔다.

특히 최단경로 문제는 여러가지의 경로 문제들 중 기본 형태라 할 수 있으며, 이에 관한 연구는 가히 수백여 편에 이른다. N.Deo,C.Pang(1984) 등은 최단경로 문제의 연구현황을 광범위하게 검토하고, 관련된 문제와 해법의 유형을 아주 잘 분류 정리하였다. 그들 외에 Dreyfus(1969), Gilsinn,Witzgall(1973), Pierce(1975), Golden,Magnanti(1977) 등도 경로 문제에 관한 연구현황을 검토하였다.

최단경로문제는 수송네트워크나 통신네트워크 등에서 발생하는 여러가지 유사한 문제들의 해법을 구하는 데 사용 될 수 있어서 특히 많은 주목을 받아왔다. 현재까지 연구된 바 있는 최단경로 문제의 해법의 계산 복잡도를 정리하면 [표1] 과 같다.

[표1] 최단경로 문제의 계산 복잡도

네트워크형태	음의환	호의 길이	계산 복잡도	비고
비순환적	없음	실수	$O(n^2)$	
유방향	없음	비음인 실수	$O(n^2)$	Dijkstra
	없음	실수	$O(n^2)$	Bellman-Ford
	있음	실수	NP-hard	
무방향	없음	실수	$O(n^3)$	Non-Bipartit
	있음	실수	NP-hard	

최단경로 문제에 대응하는 것으로서 최장경로 문제를 들 수 있다. 일반적인 네트워크에서의 최장경로 문제는 복잡도가 NP-hard 이다. 그러나 주어진 네트워크가 비순환적인 경우에는 최장경로 문제를 $O(n^2)$ 만에 풀 수 있다. 왜냐하면 네트워크가 비순환적인 경우에는 호의 길이가 음이거나 양이거나 관계없이 음의 환이 발생하지 않기

때문에 각 호의 길이를 부호를 반대로하여 최단경로 문제로 바꾸어 풀 수있다.

다수최단경로 문제(K-Shortest Path)는 복잡도가 NP-Complete 이다. Dreyfus, Fox, Lawler, Shier, Minieka, Wongseelashote, N.Katoh, Yen 등이 다수최단경로 문제의 해법을 개발하는데 많은 공헌을 하였다. 현재까지 연구된 바 있는 다수최단경로 문제의 해법의 계산 복잡도를 정리하면 [표2] 와 같다.

[표2] 다수최단경로 문제의 계산 복잡도

재방문	네트워크형태	호의 길이	계산 복잡도	비고
허용	유방향,무방향	실수	O(Kn log n) O(rn+Kn log n)	Dreyfus Fox
허용안함	무방향 유방향,무방향	비음인 실수 실수	O(Kn log n) $O(kn^3)$	Katoh Yen

또한 J.R.Current(1986) 등은 다목적 수송네트워크에 관련된 연구현황을 소개하였다. 그들은 수송 네트워크를 계획하는데 있어서 고려해야할 목표들을 비용, 가용성, 이윤, 지역의 균형, 환경적 요건 등으로 구분하고, 이들 목표들 간의 상충을 고려하는 수송계획모형과 해법에 관한 연구들을 분류하여 그 내용과 적용 가능한 실제를 요약 소개하였다.

O.Berman(1983) 등은 수송네트워크에서 차량이 무부하 상태로 이동하는 도중에 서어비스 요구를 받았을 때, 요구지점까지의 최대 도달 거리를 최소화하는 문제(MinMax Path to A Non-Service Destination)를 모형화 하고 $O(n^3 \log n)$ 만에 푸는 해법을 개발하였다.

3 최대효용경로문제 모형

최대효용경로(Maximum Weighted Path)를 다음과 같이 정의한다.

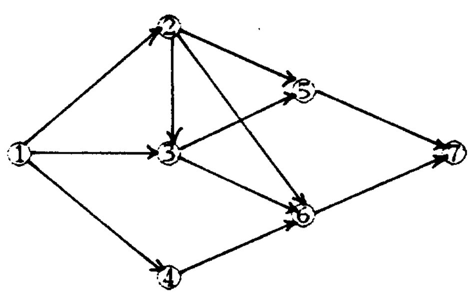
※ DEFINITION of MAXIMUM WEIGHTED PATH:

In A Directed Network G=(V,A) with weights w(u,v) associated with each pair (u,v) of vertices in V and two specified vertices $s,t \in V$, A path P=(Vp,Ap) from s to t is a Maximum Weighted Path iff There exists no path P'=(Vp',Ap') from s to t such that

$$\sum_{(u,v)\in Cp} w(u,v) < \sum_{(u,v)\in Cp'} w(u,v)$$

where $Cp=\{(u,v) \mid v$ is reachable from u on the path P }.

다음의 예를 보자. 네트워크가 [그림1] 과 같고 각 마디쌍에 대한 효용이 [표3] 와 같다 할 때, 여기에서의 최대효용경로는 1-2-3-6-7이다. 그리고 이 경로의 총 효용은 11 이다.



[그림1] 네트워크

[표3] 마디쌍의 효용 w(i,j)

	2	3	4	5	6	7
1	1	1	2	0	1	1
2		1	.	2	1	1
3			.	1	2	1
4				.	3	1
5					.	1
6						1

이러한 최대효용경로를 구하는 문제의 수리모형은 다음과 같다.

※MATHEMATICAL FORMULATION:

Consider a Directed Graph G=(V,A) with node set V={1,2,..n} and arc set A whose elements are ordered pair of vertices (i,j) indexed by a.

Let $C=\{(u_1,v_1)..(u_1,v_1)\}$ denote set of pairs of vertices in V and the

$w(u,v)$ denote the weights associated with each pair $(u,v) \in C$.

Let $t(a)$ and $h(a)$ denote the tail and head of arc a then $F(i)=\{a \mid t(a)=i, a \in A\}$ and $B(i)=\{a \mid h(a)=i, a \in A\}$ are the set of arcs that originate and terminate at vertex i respectively.

The problem of finding maximum weighted path from s to t is,

$$\text{Max } W = \sum_{(u,v)\in C} \{ w(u,v) * (\sum_{a\in F(u)} Xa) * (\sum_{a \in B(v)} Xa) \} \qquad \text{---------(1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{s.t.} \quad \sum_{a\in F(i)} Xa - \sum_{a\in B(i)} Xa = b(i). \quad \forall i \in V \\ \\ Xa \in \{0,1\} \ \forall\ a \in A \end{array}\right] \text{-------(2)}$$

$$\text{where } b(i) = \begin{cases} 1 & \text{for } i=s \\ 0 & \text{for all } i \neq s,t \\ -1 & \text{for } i=t \end{cases} \qquad \text{---------(3)}$$

4 문제의 복잡도

최대효용경로 문제는 주어진 네트워크가 비순환적인 경우라 하드라도 NP-hard이다. H.G.Gabow,(1976) 등은 무금지쌍경로문제 (Path with Forbidden Pairs Problem : PFPP)를 정의하고, 이 문제가 NP-Complete 임을 보였다.

*Path with Forbidden Pairs Problem(PFPP):

Instance - Directed graph $G=(V,A)$, Specified vertices $s,t \in V$

- A set $C=\{(u_1,v_1),..(u_k,v_k)\}$ of pairs of vertices in V

Question - Is there a simple path $P=(Vp,Ap)$ from s to t in G that contains at most one vertex from each pair in C.

이 PFPP를 이용하여 비순환적 네트워크에서의 최대효용경로 문제가 NP-hard 임을 보이면 다음과 같다.

Theorem: The Complexity of Maximum Weighted Path in an Acyclic Network Problem(MWPANP) is NP-hard.

proof)

- Let $w(u,v)=-1$ for forbidden pairs and $w(u,v)=0$ for all other pairs. Then find the maximum weighted path and the weight W

- If the weight W is less then zero, there exist no path that contains at most one vertex from each forbidden pairs.

- Hence PFPP is polynomially reduceable to MWPANP. ■

위의 증명에서는 각 마디쌍에대한 효용이 실수 영역에서 정의된 경우이다. 그런데, 각 마디쌍의 효용이 양수의 영역에서만 정의되는 경우에도 NP-hard 임을 보이면 다음과 같다.

Theorem: The Complexity of Maximum Weighted Path in an Acyclic Network Problem(MWPANP) remains NP-hard even if $w(u,v) \in Z^+$.

proof)

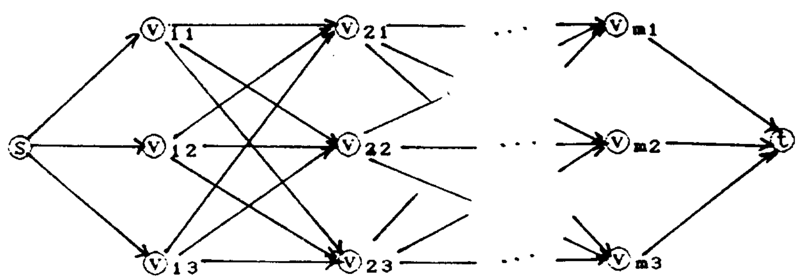
- Consider a boolean expression B in 3-conjunctive normal form with m clauses each of which is the disjunction of 3 literals.

$$B=(P_{11} \vee P_{12} \vee P_{13}) \wedge (P_{21} \vee P_{22} \vee P_{23}) \wedge \ldots \wedge (P_{m1} \vee P_{m2} \vee P_{m3}).$$

A literal P_{ij} represents either a boolean variable X_k or $\sim X_k$.

- From B, we construct a graph G=(V,A). node set V consists of a source s, a sink t and nodes V_{ij} for each P_{ij} in B. arc set A contains all pairs of literals in consecutive clauses of B. Thus,

$$A = \{(s,V_{ij}) \mid 1 \le j \le 3\} \cup \{(V_{ij},V_{i+1,k}) \mid 1 \le i \le m, 1 \le j,k \le 3\} \cup \{(V_{mj},t) \mid 1 \le j \le 3\}.$$



- Let the weights for all pairs of nodes (V_{ij},V_{kl}), $1 \le i < k \le m$, $1 \le j, l \le 3$, be.

$$w(V_{ij},V_{kl}) = \begin{cases} 1 \text{ for all pairs that have } P_{ij} \ne \sim P_{kl}. \\ 0 \text{ for all pairs that have } P_{ij} = \sim P_{kl}. \end{cases}$$

- Now find a maximum weighted path from s to t. The total weight of the path may result in the two cases. One is that the total weight equals to $m(m-1)/2$ and the other is that the total weight is less than $m(m-1)/2$.

- In the case one, the path contains no pair (V_{ij}, V_{kl}) that have $P_{ij}=\sim P_{kl}$. Thus, if we set the value of P_{ij} corresponding to V_{ij} which is in the path true, the value of B become true. In case two, there cannot exist any path without any pair (V_{ij}, V_{kl}) that have $P_{ij}=\sim P_{kl}$. Thus the value of B is false.

- Hence if there exists a path with the total weight is $m(m-1)/2$, it implies that the given expression B is satisfiable.

- We can see that the graph G is Acyclic and weights $w(u,v) \in Z+$.

- Finally, G and W can be created from B in pollynomial time. ■

5 최적 해법

주어진 네트워크가 비순환적인 경우에 대한 최적해법을 개발해보기로 한다. 최적해법에 적용한 기본적인 개념은 다음과 같다.

즉, 각 마디쌍에 대한 효용을 각 호에 대한 가상의 효용으로 전환 시키고 그것을 이용하여 임의의 경로에 대한 효용의 상한 값을 나타낸다. 그리고 그 상한값의 내림차순으로 경로들을 탐색하고, 탐색된 경로의 실제 효용을 계산하여 그것을 하한값으로 나타낸다. 이렇게 상한과 하한을 반복적으로 계산하면서그 차이를 좁혀나가다가 상한값과 하한값이 일치하게 될 때 최적해를 구하게된다.

5-1 가상효용

네트워크상의 모든 호 a=(i,j) 에 대해서 가상효용(Pseudo-Weight) L_{ij}를 다음과 같이 정의한다.

*DEFINITION OF PSEUDO-WEIGHT:

Pseudo-weight L_{ij} for each arc a=(i,j) in A are as follows.

$$L_{ij} = \mathrm{Max} \{ \sum_{u \in V_P} w(u,j) \mid P \text{ in } \mathbb{P}i \}$$

where $\mathbb{P}i$ is the set of all paths that originate at vertex s and terminate at vertex i.

$$= l_{ij} + w(i,j)$$

where l_{ij} is the length of the longest path from vertex s to i with the length of arc in F(k) be the weight w(k,j) for all k<j.

즉, 마디 a=(i,j)의 가상효용 L_{ij}는, 각 마디쌍간의 효용 중에 마디 j 와 관련이 있는 효용들만 존재한다고 할 때, 출발마디 s 로부터 마디 i 를 경유하여 마디 j 까지 연결되는 경로가 서어비스 할 수 있는 총 효용의 최대값이다.

이 값은 네트워크의 각 마디 k 에서 출발하는 모든 호의 길이를 w(k,j)로 놓고, 출발 마디 s 로 부터 마디 i 까지의 최장경로를 구한 후 그것의 길이 l_{ij} 에 w(i,j)를 더한 것과 같다.

한편 일반적인 유방향 네트워크에서 최장경로 문제는 복잡도가 NP-hard 이다. 그

러나 네트워크가 비순환적인 경우에는 음의 환(Negative Cycle)이 존재하지 않으므로 각 호의 길이의 부호를 반대로 놓고 최단경로 문제로 풀면 된다. 따라서 위의 경우의 최장경로는 $O(n^2)$ 만에 구할 수 있고, 또 따라서 각 호에 대한 가상효용은 $O(n^2)$ 만에 구할 수 있다.

5-2 다수최단 경로를 이용한 상한의 계산

다수최단경로(K-th Shortest Path)를 이용하여 총효용의 상한값이 큰 경로들부터 차례로 탐색해 나간다. 그 과정은 다음과 같다.

*PROCEDURE for the K-th UPPER BOUNDED PATH:

- Let the length of each arc a=(i,j) be $-L_{ij}$.
- Obtain K-th Shortest Path P from s to t and the length Lp.
- Let the length of the path Lp=-Lp.
- Then P is K-th upper bounded Path and L is K-th upper bound.

위와같이 구한 값이 상한값이 되는지에 대한 증명은 다음과 같다.

Theorem: In the Procedure for The K-th Upper Bounded Path, Lp is the upper bound of the total weight of the path P.

Proof)

-Since the network is acyclic, longest path is same as the shortest path with the length of each arcs are reversed in sign.

-Pseudo-Weight L_{ij} is the upper bound for the sum of weights which terminates at node j and covered by a path from s to j through i.

-Hence the sum of Pseudo-Weight of all arcs in a path is upper bound for the total weight covered by the path. ■

5-3 계산 단계

가상효용과 다수최단경로를 이용하여 상,하한을 반복적으로 구해가는최적해법의 계산 단계는 다음과 같다.

*Iterative Bound Method using K-th Shortest Path:

Step 0 : Obtain Pseudo-Weight L_{ij} for all arc a=(i,j) with weights w(u,j).

Let the length of each arc a=(i,j) be $-L_{ij}$.

Let K=0, P*={}:Solution, L=+INF:upper bound, W=-INF:lower bound.

Step 1 : Let K=K+1.

Obtain the K-th Shortest Path P and Length Lp. Let Lp=-Lp

Obtain the total weight $Wp = \sum_{(u,v)\in Cp} w(u,v)$.

where Cp={(u,v)| v is reachable from u on P }.

Step 2 : If W < Wp then W=Wp, P*=P.

If L > Lp then L=Lp.

If L ≤ W then Return P*, Stop

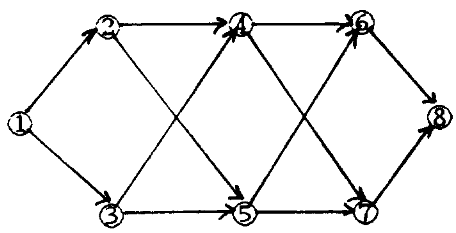
Goto Step 1.

5-4 예제.

다음의 예를 보자. 주어진 네트워크는 [그림2] 와 같고 각 마디쌍에대한 효용은 [표4]와 같다하자. 여기서 위의 해법을 적용하면 다음과 같다.

[표4] 마디쌍의 효용 w(u,v)

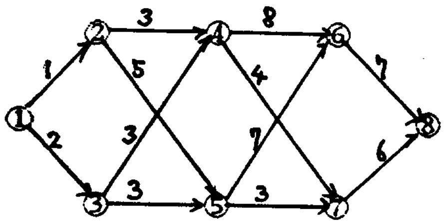
	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	2	1	3	1	1
2			1	4	1	1	2
3			1	2	2	1	1
4					3	2	1
5					2	1	2
6							2
7							1



[그림2]네트워크

Step 0: 각 호의 가상효용을 구하면 다음 [그림3] 과 같다.

$L_{12}=1$, $L_{13}=2$, $L_{24}=3$, $L_{25}=5$, $L_{34}=3$, $L_{35}=3$,
$L_{46}=8$, $L_{47}=4$, $L_{56}=7$, $L_{57}=3$, $L_{68}=7$, $L_{78}=6$.



[그림3] 각 호의 가상효용.

Step 0: K=0, P*={}, L=+INF, W=-INF
Step 1: K=1, P1=1-3-4-6-8, L1=20,
W1=(2+2+3+1)+(1+2+1)+(3+1)+2=18
Step 2: L=20, W=18, P*=P1
Step 1: K=2, P2=1-2-5-6-8, L2=20,
W2=(1+1+3+1)+(4+1+2)+(2+2)+2=19
Step 2: L=20, W=19, P*=P2
Step 1: K=3, P3=1-3-5-6-8, L3=19,
W3=(2+1+3+1)+(2+2+1)+(2+2)+2=19
Step 2: L=19, W=19, P*=P2, Stop.

따라서 최대효용경로는 1-2-5-6-8 이고, 이때 경로의 총효용은 19 이다.

6 결론.

본 연구에서는 수송 네트워크에서의 최대효용경로 문제를 정의하였다. 그리고 비순환적인 수송 네트워크에서의 최대효용경로를 구하는 최적해법을 제시하였다.

우선 일정한 출발지로 부터 도착지에 이르는 운송노선이 중도에 경유하는 모든 지점들 사이에 요구되는 운송 서어비스를 충족시켜줌으로써 얻게되는 효용의 합이 최대가 되도록 경유지를 정하는 문제를 최대효용경로 문제로 모형화하였다.

그리고 주어진 수송 네트워크가 비순환적인 경우라 하드라도 정의된 최대효용 경로 문제가 NP-hard 임을 3-Satisfiability 문제를 이용하여 보였다.

또한 Shortest Path 문제를 이용하여서 주어진 각 마디쌍 사이의 효용을 각 호의 가상효용으로 환산하고, 이것과 K-th Shortest Path 문제를 이용하여서 각 경로의 하'

한값과 상한값을 순차적으로 구하는 방법으로 최적해를 구했다.

참 고 문 헌

[ANE 83] Y.P.Aneja, V.Aggarwal, K.P.K.Nair, 1983, Shortest Chain Subject to Side Constraints, Networks, Vol.13, 1983, 295-302.

[BER 87] O.Berman, G.Y.Handler, 1987, Optimal Minimax Path of a Single Service Unit on a Network to Nonservice Destination, Transportation Science, Vol.21, No.2, 1987, 115-122.

[CED 86] A.Ceder, N.H.M.Wilson, 1986, Bus Network Design, Transportation Research-B, Vol.20B, No.4, 1986, 331-344.

[CHR 75] N.Christofides, Graph Theory - An Algorithmic Approach, Academic Press, 1975.

[CUR 85] J.Current, H.Min, 1985, Multi-Objective Design of Transportation Nertworks : Taxonomy and Annotation, European J. of Operational Research, Vol.26, 1986, 187-201.

[DEO 74] N.Deo, Graphic Theory with Applications to Engineering and Computer Science, Prentice-Hall, 1974.

[DEO 84] N.Deo, C.Pang, 1984, Shortest Path Algorithms : Taxonomy and Annotation, Networks, Vol.14, 1984, 275-323.

[DRE 69] S.E.Dreyfus, 1969, An Apprisal of Some.Shortest-Path Algorithms, Operations Research, Vol.17, 1969, 395-412.

[FLO 81] M.Florian, S.Nguyen, S.Pallottino, 1981, A Dual Simplex Algorithm for Finding All Shortest Paths, Networks, Vol.11, 1981, 367-378.

[FOX 78] B.L.Fox, 1978, Data Structures and Computer Science Techniques in Operations Research, OPerations Research, Vol.26, 1987, 686-717.

[FRA 71] H.Frank and I.T.Frisch, Communication, Transmission and Transportation Networks, Addison-Wesley Pubilshing Company, 1971

[GAB 76B] H.N.Garbow, S.N.Maheshwari, L.OsterWeil, 1976, On Two Problems in the Generation of Program Test Paths, IEEE TRans, Software Engrg. SE-2, 227-231.

[GAE 79] M.R.Garey and D.S.Johnson, Computers and Intractability - A guide to the theory of NP-Completeness, W.H.Freeman and Company, 1979.

[GLO 84] F.Glover, R.Glover, D.Klingman, 1984, Computational Study of an Improved Shortest Path Algorithm, Networks, Vol.14, 1984, 25-36.

[KAT 82] N.Katoh, T.Ibaraki, H.Mine, 1982, An Efficient algorithm for K Shortest Simple Path, Networks, Vol.12, 1982, 411-427.

[LAN 81] Z.F.Lansdowne, 1981, Rail Freight Traffic Assignment, Transportation Research-A, Vol.15A, 1981, 183-190.

[LAW 72] E.L.Lawler, 1972, A Procedure for Computing the K Best Solutions to Discrete Optimization Problems and Its Application to the Shortest Path Problem, Management Science, Vol.18, No.7, 1972

[MAG 84] T.L.Magnanti, R.T.Wong, 1984, Network Design and Transportation Planning: Models and Algorithms, Transportation Science, Vol.18, 1984, 1-55.

[PAP 82] C.H.Papadimitriou and K.Steiglitz, Combinatorial Optimization - Algorithms and Complextiy, Prentice-Hall, 1982.

[PAR 88] R.G.Parker and R.L.Rardin, Discrete Optimization, Academic Press, 1988.

[SHI 79] D.R.Shier, 1979, On Algorithms for Finding the K-Shortest Paths in a Network, Networks, Vol.9, 1979, 195-214.

[YEN 71] J.Y.Yen, 1971, Finding the K Shortest Loopless Paths in a Network, Management Science, Vol.17, 1971, 712-716.