

가변구조제어계의 응답특성향상을 위한 제어법칙의 개선
 (Improvement of Control Law for Response Characteristics
 of a Variable Structure Control System)

○ 김 중완 * 이 만형 **
 (J. W. Kim, M. H. Lee)

* 동아대학교 기계공학과 (Dong-A Univ., Dept. of Mech. Eng.)

** 부산대학교 정밀기계공학과

(Pusan National Univ., Dept. of Precision Mech. Eng.)

A new control law of a VSCS is illustrated and put into an analytical form. Using the presented control law, a VSCS shows smooth response, low control input and high accuracy in comparison with those by typical control law.

1. 서 론

상태변수가 위상평면에 설정된 스위칭 평면내에서 운동하도록 설계된 제어기를 갖는 시스템을 가변구조제어계라 한다.¹⁾ 가변구조제어는 로보트 매니플레이터의 제어,²⁾ 비행체의 운동제어,³⁾ 동기기의 제어⁴⁾ 등의 여러 분야에 응용되어 왔으며 시스템에 외란이 작용하거나 파라미터 변동이 있는 경우에도 매우 강인한 성능을 갖는 것으로 알려져 있다.⁵⁾ 그러나 대표적인 가변구조제어기가 갖는 단점으로 불연속 제어입력과 궤적에서 볼 수 있는 채터링 현상의 발생 등을 들 수 있다. 이런 단점을 제거하기 위하여 가변구조제어기의 슬라이딩패짐을 구성하는 스위칭논리, 스위칭평면 및 제어법칙 등이 여러가지

형태로 제시되어왔다.^{6),7)} 그 결과로 불연속 제어입력을 연속적인 제어입력으로 변환시키고, 채터링하는 궤적을 채터링이 제거된 궤적으로 발생시킴으로써 가변구조제어계의 동적제어거동이 향상될 수 있었다.⁸⁾ 그러나 아직도 제어초기에 매우 큰 입력이 필요한 점, 상태변수의 제어값이 매우 큰 점 등은 개선되어야 할 사항이다. 이에 따라서 본 논문에서는 연속입력과 채터링이 없

는 제어거동을 얻음과 동시에 제어입력과 상태변수의 제어값을 작게하는 제어법칙을 제시하고 종래의 슬라이딩패짐과 비교하여 제시된 제어법칙을 갖는 슬라이딩 패짐이 우수함을 보였다.

2. 슬라이딩패짐

Dolgorenko⁹⁾ 가 최초로 제시한 슬라이딩패짐을 슬라이딩패짐 I, 본 연구에서 제시하는 슬라이딩패짐을 슬라이딩패짐 II 라 하고 아래에 기술한다.

2.1 슬라이딩패짐 I (R-I)

(a) 스위칭논리

$$\text{sgn}(\sigma(x)) = \begin{cases} +1, & \sigma(x) > 0 \\ -1, & \sigma(x) < 0 \end{cases} \quad (1)$$

(b) 스위칭평면

$$\sigma(x) = \sum_{i=1}^n C_i X_i = CX \quad (2)$$

여기서 $C_i > 0$ 이고 $C_n = 1$ 이다.

(c) 제어법칙

$$u(x) = - \left(\sum_{i=1}^n \phi_i |X_i| \right) \text{sgn}(\sigma(x)) \quad (3)$$

여기서 $\phi_i > 0$ 이다.

2.2 슬라이딩패짐 II (R-II)

(a) 스위칭논리

$$\text{mod}(z(x,t)) = \begin{cases} \text{sgn}(z(x,t)), & |z(x,t)| \geq 1 \\ z(x,t), & |z(x,t)| < 1 \end{cases} \quad (4)$$

여기서 $z(x,t) = \sigma(x,t) / \left(\sum_{i=1}^n |X_i| \right)$

(b) 스위칭평면

$$\sigma(x, t) = \sum_{i=1}^n C_i(t) X_i = C(t) X \quad (5)$$

여기서

$$C_i(t) = C_{imin} + (C_{imax} - C_{imin}) \cdot G_i(t) \quad (6)$$

$$G_i(t) = \begin{cases} 1 & , g_i \cdot t \geq \pi/2 \\ \sin(g_i \cdot t) & , g_i \cdot t < \pi/2 \end{cases} \quad (7)$$

$$C_n(t) = 1 \quad (8)$$

(c) 제어법칙

$$u(x, t) = - \left(\sum_{i=1}^n \psi_i(t) |X_i| \right) \cdot \exp(\gamma \cdot |\text{mod}(z(x, t))|) \cdot \text{mod}(z(x, t)) \quad (9)$$

여기서

$$\psi_i(t) = \psi_{imin} + (\psi_{imax} - \psi_{imin}) \cdot H_i(t) \quad (10)$$

$$H_i(t) = \begin{cases} 1 & , h_i \cdot t \geq \pi/2 \\ \sin(h_i \cdot t) & , h_i \cdot t < \pi/2 \end{cases} \quad (11)$$

3. 슬라이딩레진의 설계

선형시스템의 상태방정식은 다음식으로 표현된다.

$$\dot{X} = AX + Bu \quad (12)$$

여기서 X는 $n \times 1$ 벡터, u는 스칼라 입력, A는 $n \times n$ 행렬, B는 $1 \times n$ 열벡터이다.

식(12)의 시스템을 가변구조제어하여 총체적 점근적 안전성이 보장되는 조건은 다음과 같다.

$$\sigma(x) \cdot \dot{\sigma}(x) < 0 \quad (13)$$

가변구조제어가 이상적으로 수행된다면 다음식이 성립한다.

$$\sigma(x) = 0 \quad (14)$$

$$\dot{\sigma}(x) = 0 \quad (15)$$

식(2), 식(12) 및 식(15)에서 다음과 같은 동가상태방정식을 구할수 있다.

$$\dot{X} = \{I - B(CB)^{-1}C\}AX = A_{eq}X \quad (16)$$

여기서 I는 $n \times n$ 단위행렬이다.

식(16)의 동가행렬 A_{eq} 는 Hurwitz안정기준을 만족해야하며 여기서 C의 요소 C_i 를 결정할 수 있다. 식(3), 식(12) 및 식(15)로부터 식(3)의 계수 ψ_i 를 구하면 다음과 같다.

$$\psi_i > \frac{\max a_i^*}{\min b^*}, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (17)$$

여기서

$$a_i^* = \sum_{j=1}^n c_i a_{ji}, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (18)$$

$$b^* = \sum_{i=1}^n c_i b_j \quad (19)$$

슬라이딩레진을 구체적으로 설계하기 위하여 스프링 감쇠기를 갖는 선형화된 진동시스템을 고려하자.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (20)$$

여기서 $x_1(0)=10$, $x_2(0)=2$ 라고 가정한다. 식(20)의 고유진동수 ω_n 은 5이고 감쇠비 ζ 는 0.1로서 식(20)은 경감쇠하는 시스템이다. 자유진동 할때의 상태변수 x_1 과 x_2 의 위상궤적을 그림1에, 시간궤적을 그림2에 도시하였다.

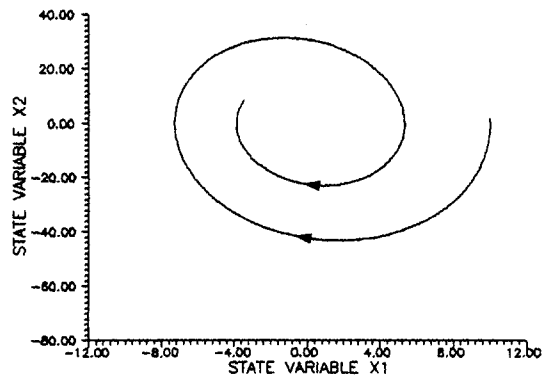


Fig.1 Phase plane trajectory of state x_1 and x_2 under free vibration.

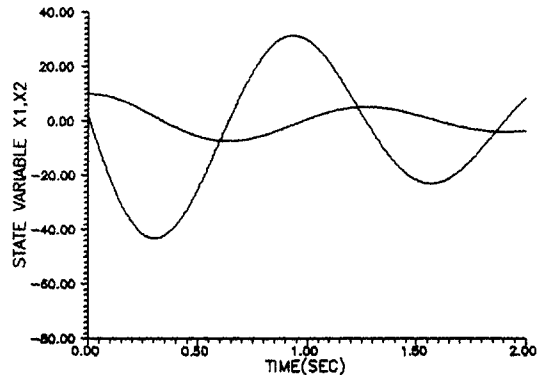


Fig.2 Time trajectories of state x_1 , x_2 under free vibration.

그림 1과 그림 2로부터 식(20)의 자유진동은 심하게 진동하면서 경감쇠한다. 이 과정에서 상태변수 x_1 의 시간궤적에 언더슈트와 오버슈트가 발생함을 볼 수 있다. 식(20)의 시스템을 제어하는 목적

은 진동을 멈추게 함에 있고 이 목적을 위해서 가변구조제어를 수행한다. 가변구조제어하기 위하여 먼저 슬라이딩메진 R-I과 R-II를 설계하여야 한다. 식(2), 식(15) 및 식(20)에서 다음의 등가상태 방정식이 구해진다.

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha_1 \end{bmatrix} X \quad (21)$$

식(21)의 등가시스템이 Hurwitz안정기 준을 만족하는 조건은 다음과 같다.

$$\alpha_1 > 0 \quad (22)$$

식(22)는 식(21)이 안정할 수 있는 경계조건이며 식(21)의 고유치 중의 하나가 -10이 되도록 하는 α_1 의 값은 10으로 계산된다.

$$\alpha_1 = 10 \quad (23)$$

식(17), 식(20) 및 식(23)으로 부터 식(3)의 계수 ψ_1 를 구하면 다음과 같다.

$$\psi_1 > 0 \quad (24)$$

$$\psi_2 > 9$$

여기서 ψ_1 과 ψ_2 를 다음과 같이 선택한다.

$$\psi_1 = 75 \quad (25)$$

$$\psi_2 = 19$$

식(23)과 식(25)를 이용하여 각각의 슬라이딩메진을 확정하면 다음과 같다.

3.1 R-I

(a) 스위칭논리(S.L.)

$$S.L. = \text{sgn}(\sigma(x)) \quad (26)$$

(b) 스위칭평면(S.P.)

$$S.P. = \sigma(x) = 10x_1 + x_2 \quad (27)$$

(c) 제어법칙(C.L.)

$$C.L. = u(x) = - (75 |x_1| + 19 |x_2|) \cdot \text{sgn}(\sigma(x)) \quad (28)$$

3.2 R-II

(a) 스위칭논리(S.L.)

$$S.L. = \text{mod}(z(x, t)) \quad (29)$$

여기서

$$z(x, t) = \frac{\sigma(x, t)}{|x_1| + |x_2|} \quad (30)$$

(b) 스위칭평면(S.P.)

$$S.P. = \sigma(x, t) = \{0.01 + 9.99G_1(t)\} + x_2 \quad (31)$$

여기서

$$G_1(t) = \begin{cases} 1 & , g_1 \cdot t \geq \pi/2 \\ \sin(g_1 \cdot t) & , g_1 \cdot t < \pi/2 \end{cases} \quad (32)$$

$$g_1 = 1 \quad (33)$$

(c) 제어법칙(C.L.)

$$C.L. = u(x, t) = - \{ [0.01 + 74.99H_1(t)] \cdot |x_1| + [9 + 10H_2(t)] \cdot |x_2| \} \cdot \exp(\gamma \cdot |\text{mod}(z(x, t))|) \cdot \text{mod}(z(x, t)) \quad (34)$$

여기서 $H_1(t) = H_2(t) = G_1(t)$ 로 본다.

4. 시뮬레이션 및 고찰

식(20)의 진동시스템을 R-I, R-II로 가변구조제어하고 그 결과를 그림3에서 그림7에 나타내었다. 그림3은 각각의 슬라이딩메진에 의한 상태변수 x_1 과 x_2 의 위상궤적이다. 가변구조제어의 대표적인 제어법칙인 식(28)을 갖는 슬라이딩메진 R-I으로 제어되는 경우에는 위상궤적이 심하게 채터링하였다. 그러나 개선된 제어법칙인 식(34)를 갖는 슬라이딩메진 R-II로 제어하는 경우에 위상궤적은 채터링이 제거된 연속적인 궤적이 되었다.

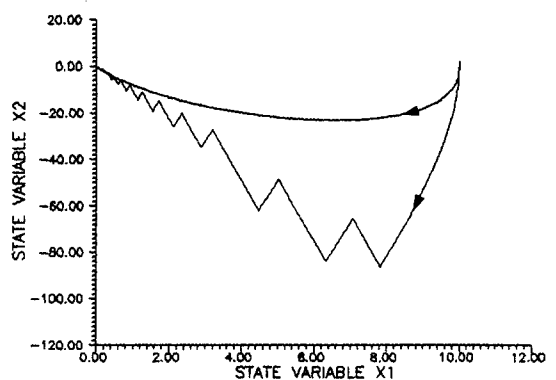


Fig.3 Phase plane trajectories of state x_1 and x_2 by R-I, R-II.

그림 4는 각각의 슬라이딩메진에 의한 상태변수 x_1 의 시간궤적을 나타낸 것이다. 슬라이딩메진 R-I에 의한 가변구조 제어에서는 상태변수 x_1 이 감소하는 속도가 상당히 컸으며, 제어종료시간은 약 0.6초였다. 슬라이딩메진 R-II에 의한 가변구조제어에서는 상태변수 x_1 이 감소하는 속도가 다소 작게 나타났으며 제어

종료시간은 약 0.9초로 다소 길어졌다.

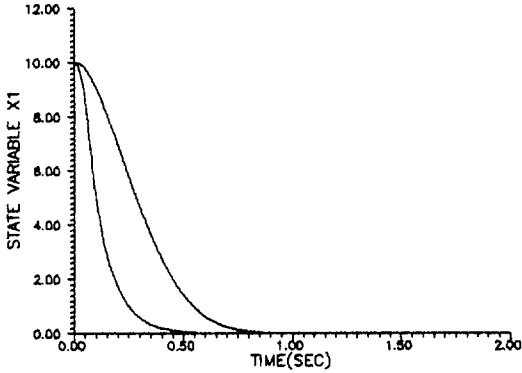


Fig. 4 Time trajectories of state x_1 by R-I, R-II.

그림5는 상태변수 x_2 의 시간궤적이다. R-I에 의한 상태변수 x_2 의 시간궤적은 불안속적으로 응답하였고 최대값이 약 -80이었다. 그러나 R-II에 의한 시간궤적은 연속적으로 매우 매끄럽게 응답하였으며 최대값이 약 -25였다.

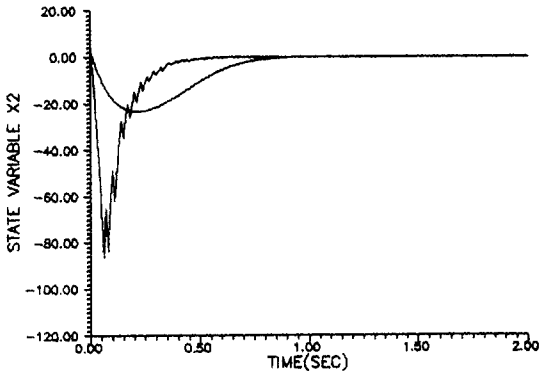


Fig. 5 Time trajectories of state x_2 by R-I, R-II.

그림6은 가변구조제어의 대표적인 제어법칙인 식(28)에 의하여 발생한 제어 입력이다. 제어의 전과정에 걸쳐서 불안속 입력력이 나타난다. 제어초기에 필요한 입력은 -788 이었고 제어과정 중의 최대값은 약 2200 이었다.

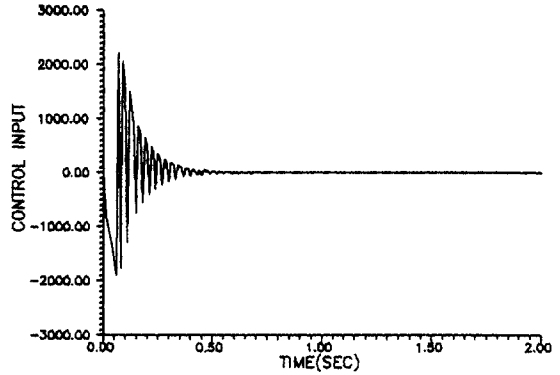


Fig. 6 Control input by R-I.

그림7은 본 논문에서 제시한 개선된 제어법칙인 식(34)에 의하여 발생한 제어 입력이다. 제어의 전과정에서 제어 입력의 변화가 제어초기에서부터 제어 종료까지 연속적이었다. 초기의 제어 입력은 -4 이고 제어 과정 중의 최대값이 약 145 이었으며 그림6의 결과에 비하여 대단히 작은 제어 입력이 필요함을 알 수 있다.

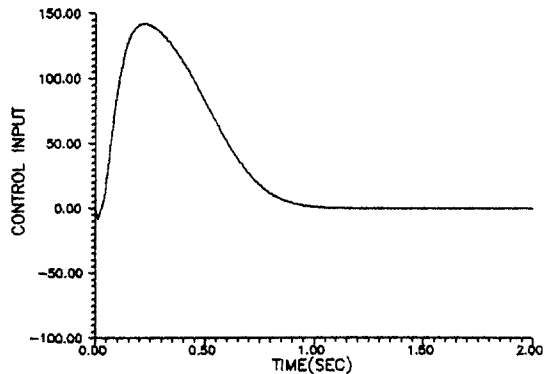


Fig. 7 Control input by R-II.

5. 결 론

가변구조제어계의 단점으로 지적되어 온 불안속 제어 입력과 채터링하는 제어 거동을 제거하기 위하여 가변구조제어계의 새로운 제어법칙을 제시하고 경감시키는 진동계에 적용하였다. 기존의 슬라이딩메진에 의한 가변구조제어와 비교

고찰하여 다음의 결론을 얻었다.

- (1) 제시한 R-II에 의한 가변구조제어는 연속적인 제어 입력과 채터링하지 않는

제어거동을 발생시킨다.

(2) R-II에 의한 가변구조제어는 상태변수 x_2 의 제어값과 제어입력 u 의 크기를 작게한다.

(3) R-II에 의한 제어종료시간은 R-I에 의한 제어종료시간 보다 다소 길었다.

참고문헌

1. V.I.Utkin, "The Invariance Conditions in Variable Structure Systems, " *Automatica*, Vol.5, pp.287-295, 1969
2. K.K.D.Young, "Controller Design for a Manipulator Using Theory of Variable Structure Systems," *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, Vol.SMC-8, No.2, pp.101-109, 1978
3. A.J.Calise and F.S.Kramer, "A Variable Structure Approach to Robust Control of VTOL Aircraft," *J. Guidance*, Vol.7, No.5, pp.620-626, 1984
4. G.P.Mattews, etc., "Toward a Feasible Variable Structure Control Design for a Synchronous Machine Connected to an Infinite Bus," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol.AC-31, No.12, pp.1159-1163, 1986
5. V.I.Utkin, "Variable Structure Systems : Present and Future," Plenum Publishing Corporation, pp.1105-1120, 1984
6. K.H.Joo, etc., "A Study of Method for Removing Reaching Phase and Chattering Phenomenon in Variable Structure Control Systems," *Trans. of KIEE*, Vol.36, No.1, pp.52-57, 1987
7. K.S.Yeung and Y.P.Chen, "A New Controller Design for Manipulators Using the Theory of Variable Structure Systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol.33, No.2, pp.200-206, 1988
8. 김 증환, 이 만형, "가변구조제어계의 시변슬라이딩레짐에 관한 연구," *한국정밀공학회지*, 제6권, 제2호, pp.30-39, 1989

9. Y.V.Dolgorenko, "Sliding Regimes in Relay Systems of Indirect Control," *Proceedings 2nd AUCTAC.*, Vol.1, 1955