'89 韓國自動制御學術會議論文集 1989. 10. 27~28

적응계에서 지속여기에 관한 연구
(A Study on the Persistent Excitation in Adaptive System)

°금 상 호 이 기 서
(Sang Ho Kum Key Seo Lee)

광운대학교 대학원 전기공학과 (Dept. of Elec. Eng., Kwang Woon Univ.)
광운대학교 제어계측공학과 (Dept. of Cont. and Inst. Eng., Kwang Woon Univ.)

In this paper, the concept of persistent excitation(PE) is examed and the model reference adaptive control of a linear plant subjected to bounded disturbances is considered. Computer simulation reasults of nonlinear differential equations shows that the global behavior of the adaptive system depends upon the PE of the reference input as well as the amplitude of the external disturbances. The sufficient conditions on the PE of the reference input for the signals in the adaptive system to be globally bounded hsa been derived.

1. 서론

지속여기(Persistent Excitation;PE)의 개념은 1960년경 계의 식별(system identification)을 다룰때부터 자연히 생겼다. 이때 매개변수가 그의 참값에 수렴하기 위해서는 입력신호가 식별하는 플랜트의 모든 모드를 여기할 수 있어야 한다고 생각했었다. 1966년 Astrom과 Bohlin은 수렴에 대한 PE를 처음 정의하였으며, 입력신호의 주파수 성분, 한구간에서 감도함수의 선형독립성, 입력의 autocovariance 행렬의 정칙성등으로 매개변수의 수렴특성을 Lin등이 연구하였다. 1970년초 Morgan과 Narendra등은 적응 관측기를 설계하는데 PE의 중요성이 다시 부각되었으며 적응 관측기에서 모든 매개변수 값이 실제값에 수렴하기 위한 조건을 연속계와 이산치계에서 제시하였다. 1980년 Narendra, Morse, Narendra와 Lin, Goodwin등은 이상적인 경우(외란이 없는 경우) 적응제어 계의 대국 안정도(global stability)에 관하여 연구하였다. 이들은 미지의 플랜트 전달함수에 관한 약간의 사전정보를 가지고 적응칙이 유계된 신호이며 플랜트와 기준모델 출력의 오차가 점근적으로 0이 되는 것을 보였다. 특히 내부 신호의 일부가 지속여기하면 제어매개변수 벡터가 원하는 값에 수렴함을 보였다. 이때 이상적인 경우에 있어서 안정도 문제를 다루는 과정에서 강건성 문제가 대두되었다. 이 문제는 전시스템의 동작에 외란의 영향, 플랜트 매개변수의 변화, 축소차수 기준 모델의 사용(저차수 제어기)등과 관련지어졌으며, 여기서 지속여기가 중요한 역할을 하였다. 시스템의 내부신호중 어떤것이 지속여기하면 적응 루프의 신호가 유계되는 것을 보장 하였지만, 이것은 적절한 신호가 유계하는 과정하에서만 만족되었다. 이 문제를 해결하기 위해 Malkin's 이론이나 평균화법(The method of averaging)을 사용하여 국지 안정도(local stability)를 얻었다. Narendra와 Annaswamy는 유계된 외란의 경우 PE의 정도(the degree of PE)가 외란의 크기보다 클때 시스템의 신호가 유계됨을 보임으로서 대국 기준(global criterior)을 제시하였다. 최근 Narendra와 Annaswamy는 이상적인 경우 적응 제어기를 구성하는데 PE 개념을 사용하여 기준입력 신호와 필터를 선택함으로서 수렴속도를 개선하였다. 제어 매개변수의 간헐적인 조정을 이용한 강건성의 개선도 역시 PE에 근거를 둔다는 것을 보였다. 따라서 강건성은 적응칙을 알맞게 수정하거나 기준입력의 PE의 정도를 증가시킴으로써 달성할 수 있다.

본 논문에서는 PE의 개념을 설정하고, 유계된 외란이 있을때 강건한 적응제어와 적응제어계의 균일 점근 안정도 (uniform asymtotic stability; uas)에 관한 조건을 구하며, 축소차수 모델을 이용한 적응제어계 설계에서 PE의 조건을 구하고 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 PE의 역할을 보였다.

2. 지속여기(Persistent Excitation;PE)

식(1)과 (4)는 연속 적응계의 안정도 해석에서 중요한 역할을 한다. PE에 대한 첫번째 정의는 식(1)의 지수 안정도에 대한 필요충분 조건에서 정의할 수 있다.

$$\dot{x}(t)=-u(t)u^T(t)x(t) \qquad (1)$$

여기서 $u:R^+\rightarrow R^n$은 부분연속이고 유계된 함수라 한다. 이때 양의 상수 (positive constants) t_o, T_o와 ϵ_1이 존재하고 임의의 단위벡터 w가 식(2)를 만족하면, u는 주기 T_o에 대해서 PE이다.

$$1/T_o \int_t^{t+T_o} | u^T(\tau)w| \, d\tau \geq \epsilon_1 \quad \forall\ t>t_0 \qquad (2)$$

등가적으로 식(3)을 만족시키는 $\alpha_1>0$ 이 존재한다.

$$\int_t^{t+T_o} u(\tau)u^T(\tau) \, d\tau \geq \alpha_1 I \quad \forall\ t\geq t_o \qquad (3)$$

PE에 대한 두번째 정의는 식(4)의 미분방정식의 지수 안정도를 증명하기 위해 필요하다.

$$\dot{x}_1(t)=Ax_1(t)+bu^T(t)x_2(t) \qquad A+A^T<0 \qquad (4)$$

$$\dot{x}_2(t)=-u(t)b^Tx_1(t)$$

여기서 $x_1:R^+\rightarrow R^m$, $A:R^{m\times m}$, $b:R^m$, $u,x_2:R^+\rightarrow R^n$, 이때 식(4)에서 양의수 T_o, δ_o와 ϵ_o가 주어진 시간 $t\geq t_o$이고 임의의 단위벡터 $w \in R^n$이 주어질 때 식(5)를 만족하고 $[t_2,t_2+\delta_o] \subset [t,t+T]$이 되도록 하는 $t_2 \in [t,t+T_o]$가 존재한다면 주기 T_o에 대해 유계된 부분연속 함수 u가 PE이다.

$$| 1/T_o \int_{t_2}^{t_2+\delta_0} u^T(\tau)w \, d\tau | \geq \epsilon_o \quad \forall\ t\geq t_o \qquad (5)$$

식(1)과 (4)는 선형이기때문에 안정도는 지수 대국적이고(exponential global), 지수 안정도를 보장하는 식(2)와 (5)는 PE를 정의하기 위해 사용해왔다. 위의 두 정의는 연속 적응계의 해석에 적용된다.

식(2)와 (5)에서 함수 u(.)를 다음과 같이 부류 $\mathcal{P}[0,\infty]$로 정의하면 식(4)와 (5)의 PE에 대한 두 정의는 등가가 된다.

$C\delta$를 모든 t_1, $t_2 \in C\delta$에 대해 $t_1\neq t_2$가 $|t_1-t_2|\geq\delta$ 것을 의미하는 $\delta>0$가 존재하도록 하는 $[0,\infty]$에서의 일군의 점이라 하자. 그러면 $\mathcal{P}[0,\infty]$는 모든 $u \in \mathcal{P}[0,\infty]$에 대해서 i) $u(t)$와 $\dot{u}(t)$는 $[0,\infty)/C\delta]$에 대해 연속이며 유계 되고 ii) 모든 $t_1 \in C\delta$, $u(t)$와 $\dot{u}(t)$는 $t\uparrow t_1$과 $t\downarrow t_1$처럼 유한극한을 갖는 δ와 $C\delta$에 상응하는 구간 $[0,\infty]$의 실가함수의 부류로 정의할 수 있다.

3. 적응제어에 대한 응용

1) 이상적인 경우 ($\bar{\nu}=0$)

외부 외란이 없는 경우 제어하고자 하는 플랜트 P는 전달함수 $W_p(s)=k_pZ_p(s)/R_p(s)$을 갖는 선형 시불변 계로 나타낸다.

$$\dot{x}_p=A_px_p+b_pu$$

$$y_p=h_p^Tx_p$$

Z_p와 R_p는 차수가 m, n(n>m)인 monic coprime 다항식이고 Z_p는 Hurwitz 다항식이다. K_p의 부호와 m과 n의 값은 알지만 $Z_p(s)$와 $R_p(s)$의 계수는 미지이다. 기준모델은 전달함수가 $W_m(s)=K_m/R_m(s)$이며 $R_m(s)$은 차수가 n-m인 기지의 Hurwitz 다항식이다. 모델에 부분연속이며 균일하게 유계된 기준입력을 가하면 원하는 출력 $y_m(t)$을 얻는다. 적응제어 문제는 플랜트와 모델출력 사이의 출력 오차 $e_1(t)=y_p(t)-y_m(t)$가 점근적으로 0이 되고 계에서의 모든 신호는 유계된채로 남도록 플랜트에 대한 유계된 제어입력 u(.)을 결정하는 것이다. 적응제어기는 식(6)으로 표현되며 구조는 그림1과 같다.

$$\dot{\omega}^{(1)}=F\omega^{(1)}+gu$$

$$\dot{\omega}^{(2)}=F\omega^{(1)}+gy_p \qquad (6)$$

$$u \quad =\omega^T\theta+r$$

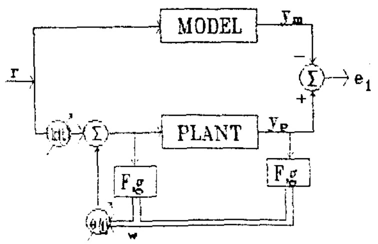


그림 1. 이상 시스템
Fig 1. The Ideal System

여기에서, $\omega^T=[\omega^{(1)T},\omega^{(2)T}]$, $\theta^T=[\theta_1^T(t),\theta_2^T(t)]$, $dim[\omega^{(1)}]=dim[\omega^{(2)}]=n$, F는 nxm 의 점근적으로 안정한 행렬이고, (F,g)는 가제어하며, θ는 제어 매개변수 벡터이다. 상수 벡터인 θ^*가 $\theta(t)=\theta^*$ 일때 제어기와 플랜트의 전달함수는 모델의 전달함수와 같아지게 된다. 즉 $\lim_{t\to\infty} e_1(t)=0$ 이 되도록 하고 전시스템이 대국 안정하도록 $\theta(t)$를 조정하는 제어칙을 구하는 것이다. 또한 매개변수 오차 $\phi(t)\triangleq\theta(t)-\theta^*$가 $t\to\infty$ 일때 0 에 수렴한다면 전 시스템의 전달함수는 모델의 전달함수와 일치하게 되어 오차방정식이 u.a.s.l.(uniformly asymtotic stability in the large)이다.

2)유계된 외란이 존재하는 적응제어 ($\bar{\nu}\neq 0$)

유계된 외란이 존재할 때의 적응계를 식(7)이라 한다.

$$\dot{x}_p=A_p x_p+b_p u+d\nu_1 \qquad (7)$$
$$y_p=h_p x_p^T+\nu_2$$

여기서 $x^T=[x_p^T,\omega^T]$, $h^T(sI-A)^{-1}b=W_m(s)$, $\phi\triangleq\theta-\theta^*$ ν_1과 ν_2는 각각 미분 가능한 유계된 입출력 외란이다.

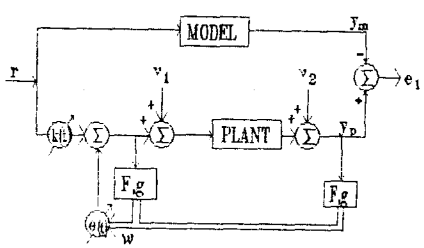


그림 2. 유계된 외란이 존재하는 강건한 적응제어
Fig 2. Robust Adaptive Control in the Presence of Bounded Disturbance

제어기 구조와 기준모델은 그림2와 같으며 식(8)은 전체 시스템 방정식이다.

$$\dot{x}=Ax+b(\phi^T\omega+r+\nu(t)) \qquad y_p=h^T x \qquad (8)$$

이때, 오차방정식과 적응칙은 식(9)와 같다.

경우 i) $n^*=1$ 오차방정식 $\dot{e}=Ae+b(\phi^T\omega+\bar{\nu})$

$e_1=h^T e$

적응칙 $\dot{\phi}=-e_1\omega \qquad (9)$

경우 ii) $n^*\geq 2$ 오차방정식 $\epsilon_1=\phi^T\zeta+\nu$

적응칙 $\dot{\phi}=-\epsilon_1\zeta/(1+\zeta^T\zeta)$

여기서 $e:R^+\to R^{3n}$, $\omega:R^+\to R^{2n}$, $\zeta=W_m(s)I\omega$, $\nu=W_m(s)\nu$, $\epsilon_1=e_1+\theta^T\zeta-W_m(s)\theta^T\omega$ 이다. 목적은 위의 적응칙을 가지고 유계된 해를 갖도록 조건을 결정하는 것이다. 오차방정식 (11)의 평형상태는 ω 가 지속여기일 때 u.a.s.이다. 그러므로 ω가 지속여기이면 유계된 외란은 유계된 출력 e 와 ϕ 에서 결과이다.

3) 상태 종속 외란이 존재하는 강건한 적응제어

제어하고자 하는 미지의 선형 시불변 플랜트 $\bar{P}$는 병렬로 연결된 두개의 선형 시불변 부분 P와 $\tilde{P}$로 되어있다. 모델화된 부분 P는 영점이 개좌반 평면에 있고 차수n, 상대차수 n^* 그리고 고주파수 이득의 부호를 알고있는 전달함수 $W_p(s)$라 하자.

$\tilde{P}=0$이면 안정한 전달함수 $W_m(s)$을 가지는 기준 모델과 제어기 매개변수 $\theta(t)\equiv\theta^*$인 구조를 갖는 제어기를 결정하여 제어기와 플랜트의 전달함수가 $W_m(s)$와 완전히 일치하도록 결정할 수 있다. 전달함수가 $\tilde{W}_p(s)$인 비모델화된 부분 $\tilde{P}$가 존재하면 $\theta(t)$를 조정하여 플랜트와 모델의 출력오차가 모든 다른 신호들이 유계되도록 하면서 어떤 실행기준을 만족하도록 하는 안정한 적응칙을 결정하는 것으로 그림3과 같은 구조를 갖는다.

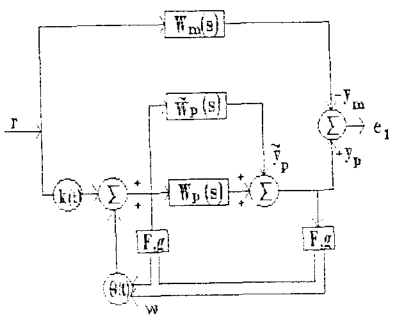


그림 3.상태 종속 외란이 존재하는 강건한 적응제어
Fig 3. Robust Adaptive Control in the Presence of State-Dependent Disturbance

4) 안정도 해석

i) 국지 안정도

비섭동된 계가 u.a.s.일 때 연관된 섭동된 계는 만약 초기 섭동이 작다면 유계된 해를 갖는다는 Malkin의 이론에 대해서 작은 섭동이 존재할때 논의된 강건성에 관한 대부분의 결과들은 전체 안정도에 근거한 것이고 Malkin 이론의 확장 또는 수정으로 고려될 수 있다.

예를 들어 오차방정식 (9)는 외란 $\bar{\nu}(t)\equiv 0$ 일때 u.a.s.이다. 그러므로 Malkin의 이론은 $\epsilon>0$ 이 주어질 때 $\|x(0)\|\le\delta_1$과 $|\bar{\nu}(t)|\le\delta_2$이기 위한 δ_1과 δ_2가 존재하고 $x(t)=[e^T,\phi^T]^T$일때 $\|x(t)\|\le\epsilon$ 이 존재한다는 것이다.

ii) 대국 안정도

기준입력의 PE 차수가 외란의 크기에 비해서 충분히 크다면 계의 모든 신호들의 유계성은 보장이 된다.그 결과는 오차방정식 (9)를 사용해서 $n^*=1$을 갖는 계에 대해서 주어진다. ω^*가 플랜트에서 ω에 부합되는 모델에서 신호이면 C가 알려진 상수일 때 $\omega=\omega^*+Ce$이다. 그래서 지속여기하기 위해서는 ω보다는 유계된 신호인 ω^*를 사용하는 것이 더 적절하다. 이를 식(9)에 대입하면 식 (10)이 된다.

$$\dot{e}=Ae+b\phi^T(\omega^*+Ce)+b\nu \quad ;e_1=h^Te \tag{10}$$

$$\dot{\phi}=-e_1(\omega^*+Ce)$$

그래서 문제는 $|\bar{\nu}(t)|\le\nu_o$인 주어진 유계된 입력 $\bar{\nu}(t)$에 대해서 비선형 시변계의 결과가 유계되도록 충분조건을 결정하는 것이다.

$W_m(s)=h^T(sI-A)b^{-1}$이 SPR이기 때문에 대칭 양의 definite 행렬 Q가 주어질때 $A^TP+PA=-Q$ 그리고 $Pb=h$가 되게하는 $P=P^T>0$이 존재한다.

λ_Q가 Q의 최소 고유치이고 $E_o\equiv 2\|h\|\nu_o/\lambda_Q=\gamma\nu_o$라고 하자. 2n차원 벡터 ω^*가 지속여기이고 상수 T_o, δ와 ϵ_o에 대해서 식(5)를 만족한다고 놓으면 그때 (10)의 모든 해가 식(11)에 만족되면 유계된다.

$$\epsilon_o\ge\gamma\nu_o+\delta \tag{11}$$

이때 δ는 임의의 양의 상수이다.

4. 시뮬레이션

시스템에 PE를 적용할 때 강건한 동작을 보이기 위해 적응제어 시스템에 대해서 시뮬레이션을 하였다.

플랜트 : $\dfrac{s+2}{s^2-1}$

모델 : $\dfrac{s+4}{s^2+5s+6}$

기준입력 : $10\cos 0.5t+10\cos 1.2t$

외란 : $\|\bar{\nu}(t)\|\le\nu_{max}$

적응루프에서 모든 신호들의 유계성을 보이기 위해 다음과 같은 오차방정식과 적응칙을 택했다.

$$\dot{e}_1(t)=-e_1(t)+\phi(t)y_m(t)+\phi(t)e_1(t)+\nu(t)$$

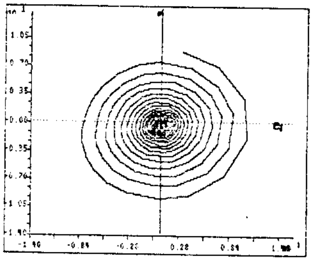
$$\dot{\phi}(t)=-e_1(t)y_m(t)-e_1(t)^2$$

이에대한 충분조건으로 ϵ_o와 v_{max}항으로 유도하였으며 실제적인 응용에서는 출력과 매개변수 오차들의 크기뿐만 아니라 기준 입력과 외란의 매개변수에 대한 그들의 종속성으로 수식화 하였다. ϵ_o는 $y_m(t)$에 의존하는 적분 부등성을 만족함으로 함수 y_{max}의 무한수는 결국 ϵ_o의 값이 될 것이다.

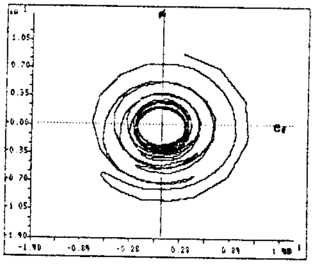
예제1 : 상수외란이 $\nu(t)=\nu_{max}=5$이고, 기준신호 $y_m(t)=6\pi\cos\omega t$에서 ω가 0.005 ~ 40 의 범위로 변할때, 극한 집합은 [그림4]와 같이 주파수와 함께 단조롭게 증가한다. 그러므로 낮은 입력 주파수가 제어측면에서 더욱 좋다.

예제2 : 외란이 $\nu(t)=5\cos t$이고 $y_m(t)=\epsilon_o\pi\cos 1.2t$ 일때 입력신호의 진폭 ϵ_o의 크기가 외란에 비해 증가하면 크기는 [그림5.a,b.]와 같이 극한 집합으로 감소하며, ν_{max}보다 작은 ϵ_o의 값의 해들은 [그림5.c]와 같이 유계된채로 남는다.

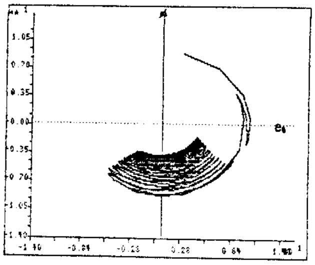
그러므로 시스템에 유계된 입력이 존재할 때 기준 입력의 신호가 PE의 조건을 만족하면 시스템의 모든 출력은 유계된다.



(a)



(b)



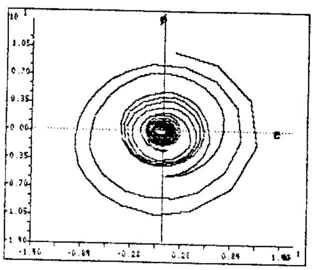
(c)

$v(t)=\text{constant}$ (a) $y_m(t)=6\pi\cos 0.005t$

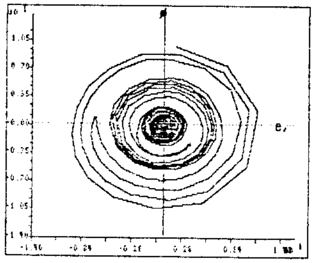
(b) $y_m(t)=6\pi\cos 4.6t$ (c) $y_m(t)=6\pi\cos 20t$

$\dot{e}_1=-e_1+\phi(e_1+y_m)+v$ $\dot{\phi}=-e_1(e_1+y_m)$

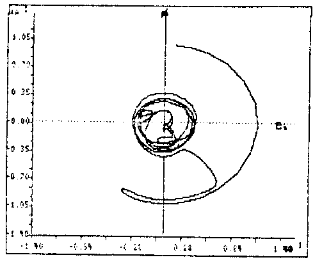
그림 4. 입력 주파수에 대한 시스템 응답의 종속성
Fig 4. Dependence of System Responce on Input Frequeencies



(a)



(b)



(c)

$v(t)=5\cos 3t$ $y_m(t)=\epsilon_0\pi\cos 1.2t$

(a) $\epsilon_0=8$ (b) $\epsilon_0=20$ (c) $\epsilon_0=2$

$\dot{e}_1=-e_1+\phi(e_1+y_m)+v$ $\dot{\phi}=e_1(e_1+y_m)$

그림 5. 입력 크기에 대한 시스템 응답의 종속성
Fig 5. Dependence of System Responce on Input Amplitudes

5. 결론

본 연구에서는 적응계에서 PE와 강건성의 역할을 연구하였다. 먼저 입력 신호들의 PE 특성에 관하여 연구하였다. 이 특성을 이용하여 이상적인 적응계와 유계된 외란이 존재하는 적응계에 적용을 하였다. 모델에서의 신호들의 PE가 외란에 대한 유계보다 크다면, 적응계는 유계된 외란들에 대해서 강건하다는 것을 알 수 있었다. 시변 기준입력의 존재는 전체 시스템을 비자치적(nonautonomous)으로 만듬으로 비록 방정식의 비선형 비자치적인 특성이 해석을 복잡하게 만들지라도, 다루기 쉬운 것임을 나타낸다. PE 입력들의 특성을 사용함과, 시스템의 모델과 외란 에서 유계된 신호들의 결합된 영향들을 고려함 으로서, 해들의 대국적 유계성을 증명하였다.

6. 참고문헌

1. R.V.Monopoli, "Model Reference Adaptive Control with an Augmented Error Signal", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-19, October 1974, pp.474-484
2. K.S. Narendra and P. Kudva, "Stable Adaptive Schemes for System Identification and Control - Parts I and II", IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetices, Vol. SMC-4, November 1974, pp.541-560
3. A.P. Morgan and K.S. Narendra, "On the Stability of Nonautonomous Differential Equations x=[A+B(t)] x with Skew-Symmetric Matrix B(t)", SIAM Journal of Control and Optimization, Vol.15, January 1977, pp.163-176
4. J.S-C.Yuan and W.M. Wonham,"Probing Signals for Model Reference Identification" IEEE Transactions on Automatic. Control., Vol. AC-22, August 1977,
5. A.S. Morse, "Global Stability of Parameter Adaptive control Systems", IEEE Transactions on Automatic Control,Vol AC-25, June 1980, pp.433-439
6. K.S. Narendra, Y.H.Lin and L.S.Valavani, "Stable Adaptive Controller Design - Part II:Proof of Stability", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-25, June 1980, pp. 440-448
7. B.B.Peterson and K.S.Narendra,"Bounded Error Adaptive Control" , IEEE Transactions on Automatic Control., December 1982, pp. 1161-1168
8. G.Kreisselmeier and K.S. Narendra, "Stable Model Reference Adaptive Control in the Presence of Bounded Disturbances", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-27, No 6, pp. 1169-1175, December 1982.
9. R.R.Bitmead, "Persistence of Excitation Conditions and the Convergence of Adaptive Schemes", IEEE Transations on Information Theory, March 1984, pp.117-118
10. K.S.Narendra and A.M.Annaswamy, "Robust Adaptive Control", in K.S.Narendra, ed. Adaptive and Learning Systems : Theory and Applications, pp.3-31, Plenum Press, N.Y. 1985.
11. K.S. Narendra and A.M. Annaswamy,"Robust Adaptive Control in the Presence of Bounded Disturbances", IEEE Transactions. on Automatic Control., Vol. AC-31, No.4. April 1986
12. 양 성 현, 이 기 서 "우주 정거장의 직접 적응 제어에 관한 연구", '87. 한국자동제어 학술 회의',1987