SRLS을 이용한 파라미터 추정에 관한 연구
(A STUDY ON THE PARAMETER ESTIMATE USING SELECTIVE RECURSIVE LEAST SQUARE)

°유 치형 이 재하 정 찬수
(C. H. YOU J. H. LEE C. S. JUNG)

숭실 대학교 전기공학과(SoongSil.Univ.Dept of elec)

This correspondence presents a recursive estimation algorithm which,unlike conventional ones; updates the estimates only when a sufficient improvement can be obtained with a bounded noise assumption,the resulting sequence of estimates is a sequence of convex sets(ellipsoids) in the parameter space.For the cases studied,the algorithm use less than 20 percent of the data to update the estimate and still acquired good accuracy for spectral estimation.

1.서 론

신호처리 분야에서 접하는 대부분의 프로세스는 선형 이산시간 차분방정식으로 모형화되며 특히 자동회귀(Autoregresive ; AR) 모형 혹은 이동평균자동회귀(Autoregresive moving average ; ARMA)모형이 많이 사용된다.

AR 혹은 ARMA 모형의 계수를 추정하는 방법으로는 수렴속도가 빠른 순환 최소자승법(Recursive Least Seqare method ; RLS)이 많이 쓰인다.[1][2][3][4]

위 방법은 수렴속도가 빠르며 강인성이 높은 장점이 있으나 신호처리분야에서는 계산량이 많은 것이 단점이다.

이 문제의 해결점으로 고속칼만 이득계산법 혹은 격자형 여파기와 같이 계산량을 줄일 수 있는 알고리즘이 연구 되어 왔으며 또 한편으로는 새로운 측정값에 여파기의 계수를 갱신 할만한 정보가 있는지를 검증하고 그가치가 있다고 판단될때만 갱신함으로 계산량을 줄이고 간인성을 높이려는 연구가 진행되었다.

본 논문은 후자의 부류에 속하는 것으로서 선택갱신순환최소자승법(Selective updating RLS ; SRLS)에 관한 연구이다.

SRLS에서 갱신여부를 판단하기 위해서는 잡음의크기가 제한되어 있으며 이 크기를 알고 있어야한다.

많은 문제에서 잡음은 정규분포를 갖는 백색 잡음으로 추정되며 이 경우 잡음의 최대크기를 결정하기는 어려운 문제이다. 따라서 본 연구는 잡음의 최대크기의 가정값과 실제값과의 차이가 SRLS의 특성에 미치는 영향을 검토 분석하여 SRLS를 사용할 때 유용한 지표를 제공하고자 한다.

2. SRLS 알고리즘

AR 모델은 다음과 같다.

$$y_t = \sum_{i=1}^{p} a_i y_{t-i} + \sum_{j=0}^{q} b_j u_{t-j} + v_t \tag{1}$$

여기서 $\{v_t\}$는 잡음이고 $\{u_t\}$는 입력이다. 식(1)을 재표현하면 다음과 같다.

$$y_t = \theta_0^T x_t + v_t \tag{2}$$

여기서 $\theta_0^T=[a_1\, a_2 \cdots a_p\, b_0\, b_1 \cdots b_q]$, $x_t = [y_{t-1} \cdots y_{t-p}\, u_t\, \cdots u_{t-q}]$ 이며 잡음 v_t는 다음과 같이 크기가 제한 되었다고 가정한다.

$$|v_t|^2 \le \gamma^2 \quad t = 1,2,3.\ldots. \tag{3}$$

식(2)와(3)을 조합하면 다음과 같이 표현되어진다.

$$(y_t - \theta_0^T x_t)^2 \le \gamma^2 \tag{4}$$

여기서 θ_0 는 n차원의 벡터이고, $n = p+q+1$이다. R^n에서 식(4)를 만족시는 θ_0 의 벡터는 여러가지 경우가 있을 것이다. 이런θ_0 벡터집합을 다음과 같이 정의한다.

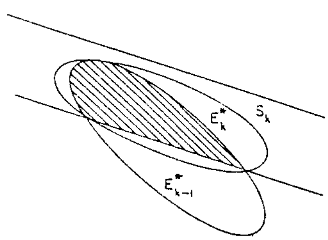
$$S_t = \{\theta : (y_t - \theta^T x_t)^2 \le \gamma^2,\ \theta \in R^n\} \tag{5}$$

만약 측정된 값(y_t , x_t)가 유용하다면 그 때 S_t 안에있는 모든 원소는 참값에 가장 근접했다고 말할 수 있다.

즉 참 파라미터는 시퀜스 S_t 안에 존재한다는 말이 되며 $\Theta_0 \in \Omega_K (\equiv \bigcap_{t=1}^{K} S_t)$인 관계이다. 식(3)에서 γ가 실제값보다 작으면 참 파라미터는 Ω_K 에 속하지 않으므로 이를 방지하기 위하여 모든 k 에 대하여 $\Theta_0 \in \Omega_K$의 관계를 갖게 하기위해 γ 는 $|V_t|$의 상한값을 한다.

이런 집합이론의 중요한 특징은 파라미터를 추정함에 있어 연속적인 갱신을 피할 수 있다는 것이다. 만약 k가 증가함에 따라 어떤 k 에 대해서 $\Omega_K \subset S_{K+1}$인 관계, 다시 말해서 $\Omega_{K+1} = S_{K+1} \cap \Omega_K = \Omega_K$ 인 관계를 가진다면 (y_{K+1} , x_{K+1})은 파라미터 추정을 할때 아무런 정보가 없게 되므로 갱신의 필요성이 없게 된다. 그러나 이런 집합이론의 개념을 다룰 수 있도록 식으로 표현하는 것은 쉬운 일은 아닐 것이다. 이런 집합이론의 개념을 식으로 표현하는 방법은 ELI.FOGEL 과 Y.F.HUANG 에 의하여 연구되었다.[5]

ELI.FOGEL 과 Y.F.HUANG에 의하면 만약 $\Theta \in R^2$ 인 관계가 있다면 그림[1]로 표현되는 것처럼 빗금친 부분 즉 OBE(Optimal Bounding Ellipsoids)를 찾는 문제로 귀착된다.



그림[1]. Optimal Bounding Ellipsoids

그림[1]에서처럼 빗금친 부분,즉 최적의 OBE(optimal Bounding Ellipsoids)를 찾는것은 다음과 같다 .

우선 다음과 같이 모든 참 파라미터를 포함하는 초기타원체를 정의한다.

$$E_0 = \{\Theta: \Theta^T P_0^{-1} \Theta \le 1; P_0 = \frac{1}{\varepsilon} \times I_{n \times n}\} \quad (6)$$

주어진 측정치{y_1 ,x_1 }과의 응답 S 은 다음과 같이 주어진다.

$$S_1 = \{ \Theta : (y_1 - \Theta^T x_1)^2 \le \gamma^2 \} \quad (7)$$

이 때 OBE E_1는 $S_1 \cap E_0$로 다음과 같다.

$$E_1 = \{\Theta: \Theta^T P_0^{-1} \Theta + \lambda_1 (y_1 - \Theta^T x_1)^2 \le 1 + \lambda_1 \gamma^2$$
$$: 0 \le \lambda_1 \le \infty\} \quad (8)$$
$$= \{\Theta : (\Theta - \Theta_c(1))^T Q_1^{-1} (\Theta - \Theta_c(1)) \le \sigma_1^2 \} \quad (9)$$

여기서 $Q_1^{-1} = P_0^{-1} + \lambda_1 x_1 x_1^T$, $Q_c(1) = \lambda_1 y_1 Q_1 x_1$ (9a)

$$\sigma_1^2 = 1 + \lambda_1 \gamma^2 - \lambda_1 y_1^2 [1 - \lambda_1 x_1^T Q_1 x_1] \quad (9b)$$

이다.

식 (7)에서 값에 따라 여러 다른 크기를 갖는 타원체를 가질 수 있다. 그러므로 최적의 크기를 갖는 타원체를 다음과 같이 정의한다.

$$P_1 = \sigma_1^2 Q_1 \quad (10)$$

식 (8)으로부터 E_1의 타원체 크기는 det[P_1]의 크기에 비례 한다는 것을 알 수 있다.그러므로 우리의 목적은 $\lambda_1 \ge 0$인 조건하에 det[P_1] 을 최소화 하는데 있다.참 파라미터를 찾는것중 최적의 값을 나타내기 위해 * 를 첨가시킨다.λ_1의 최적의 값을λ_1^* , λ_1^*값이 결정될 때 응답 E_1과 P_1의 값을 각각 E_1^*,P_1^*라 하면 그림[1]에서 설명된 OBE E_K^*는 다음과 같다.

$$E_K^* = \{\Theta : (\Theta - \Theta_c^*(k))^T P_K^{*-1} (\Theta - \Theta_c^*(k)) \le 1\} \quad (11)$$

여기서 $P_K^{*-1} = Q_K^{*-1} / \sigma_K^{*2}$ (11a)

$$\sigma_K^{*2} = 1 + \lambda_K^* \gamma^2 - \frac{\lambda_K^* (y_K - x_K^T \Theta_c^*(k-1))^2}{1 + \lambda_K^* x_K^T P_{K-1}^* x_K} \quad (11b)$$

$$Q_K^* = P_{K-1}^* - \lambda_K^* \frac{P_{K-1}^* x_K x_K^T P_{K-1}^*}{1 + \lambda_K^* x_K^T P_{K-1}^* x_K} \quad (11c)$$

$$\Theta_c^*(k) = \Theta_c^*(k-1) + \lambda_K^* Q_K^* x_K (y_K - x_K^T \Theta_c^*(k-1)) \quad (11d)$$

그리고 각 k에 대해서 σ_K^*는 양수이고 p는 양정치이다 식(9)에서 표시된 최적의 값은 다음과 같이 주어진다.

$$\alpha_1 \lambda_K^2 + \alpha_2 \lambda_K + \alpha_3 = 0 \quad (12)$$

여기서

$$\alpha_1 = (2n-1) \gamma^2 G_K^2 \quad (12a)$$

$$\alpha_2 = G_K[(4N-1)\gamma^2 - G_K + \delta_K] \qquad (12b)$$

$$\alpha_3 = 2n(\gamma^2 - \delta^2) - G_K \qquad (12c)$$

$$G_K = x_K^T P_K^* x_K,\ \delta_K^2 = (y_K - x_K^T \theta_C^*(k-1)) \qquad (12d)$$

이다. det[p]을 최소화하는 식(10)의 해는 다음과 같다.

$$\lambda_K^* = \frac{-\alpha_2 + \sqrt{(\alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_3)}}{2\alpha_1} \qquad (13)$$

λ_K^*가 양수가 되어야 하므로 이를 위해서는 식(11)에서 α_3가 음수이어야 한다. 즉 α_3의 값으로 갱신의 여부를 판단한다.

SRLS 알고리즘을 정리하면 다음과 같다.

과정1) 식(6)처럼 가능한 모든 참 파라미터값을 포함할수있는 큰 타원체 설정한다.

과정2) G_K δ_K^2 를 계산한다.

과정3) 만약 α_3가 음수이면 식(11)를 이용하여 갱신한다.

과정4) 만약 α_3가 양수이면 갱신하지 않는다.

과정5) 정지조건을 만족하면 멈추고 아니면 과정 2)로 간다.

3. 시뮬레이션 및 검토

그림 [2]는 RLS(Recursive Least Square)에 의한 결과이고 그림[3]- [7]은 SRLS(Selective Recursive east Square)에 의한 결과이다.

앞에서 언급했듯이 잡음은 정규분포를 갖는 백색잡음으로 추정되며 이 경우 잡음의 최대값을 결정하기는 어려우므로 본 연구에서는 잡음은 균일한 분포를 갖는다고 전제하고 잡음이 SRLS의 특성에 미치는 영향을 알기위한 시뮬레이션을 했다.

그림[2]는 RLS 알고리즘에 의한 결과이며 추정값의 상대오차가 -50 - -60(db)정도로 나타났다.

그림[3]은 잡음의 최대크기가 0.85 즉 실제값의 85%일때 결과이다.
이 때에는 추정값의 상대오차가 -30 - -35(db)정도로 나타났으며 RLS에 의한 결과보다 더 큰것이며 진동이 심하여 실제응용이 어려운정도이다.

그림[4]은 잡음의 최대크기가 .97 즉 실제값이 0.97일때의 결과이다.
이 때에는 추정값의 상대오차가 -60 - -70(db)정도로 나타났으며 RLS에 의한 결과보다 더 우수한 특성을 보여 주고 있다.

그림[5]는 잡음의 최대크기가 실제값과 같게 했을때 즉 max | v_t | ≤ 1의 조건을 만족할때 결과이다.
이 때에는 추정값의 상대오차가 -70 - 80(db)정도로 나타났으며 이 때에도 RLS에 의한 결과보다 더 우수한 특성을 보여주고 있다.

그림[6]은 잡음의 최대값을 실제값보다 더 크게 선정했을때 즉 실제값의 1.5배일때의 결과이다.
이때에는 추정값의 상대오차가 -60 - -70(db)정도로 나타났으며 γ = 1인 경우보다는 못하며 γ = 0.97인 경우와 비슷하다.

그림[7]은 잡음의 최대값을 실제값보다 더 크게 선정했을때 즉 실제값의 2배일때 결과이다.
이때에는 추정값의 상대오차가 -50 - -60(db)정도로 RLS에의한 결과와 비슷하개 나타났다.

4. 결 론

이상의 결과를 종합하면 γ를 실제값의 85%정도로 적게 잡으면 특성이 많이 저하되나 실제값에 가까운 값 혹은 그 이상의 값으로 선정하면 좋은특성을 보임을 알수있었다.

참 고 문 헌

[1] D.G.Messerschmitt,"An electronic hybrid with adaptive balancing for telephony", IEEE Trans Commun.,vol.COM-28,pp.1399-1407,1980

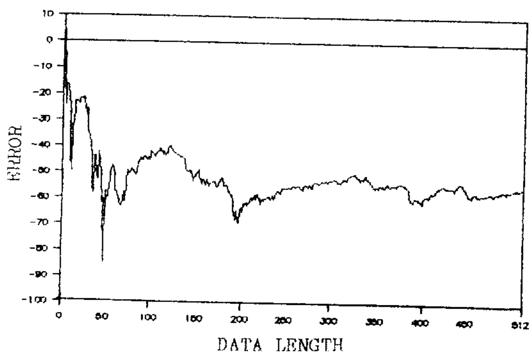
[2] F.K.Soong and a.M.Peterson,"Fast least-square (LS) in the voice echo cancellation application," in Proc. IEEE ICASSP, 1982.

[3] D.T. Lee, M. Morf, and B. Friedkander, "Recursive least - squares ladder estimation algorithms, " IEEE Trans. Acoust.

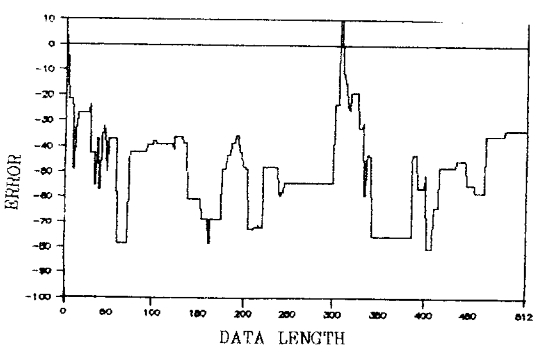
Speech, Signal Processing, vol. ASSP - 29, pp. 627 641, 1981.

[4] G. C. Goodwin and R. L. Payne, Dynamic System Identification: Experiment Design and Analtsis. New York: Academic, 1977. ch. 7

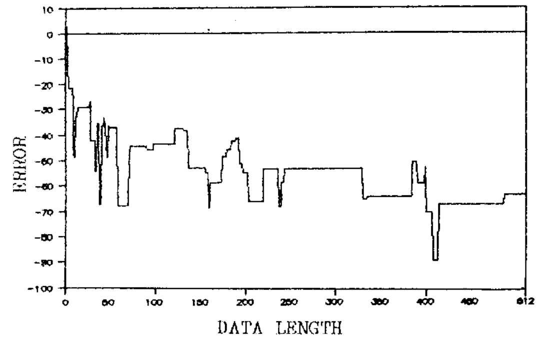
[5] E. Fogel and Y. F. Huang, "On the value of system identification - Bounded noise case, "Automatica, vol. 18. pp. 229-238, 1982.



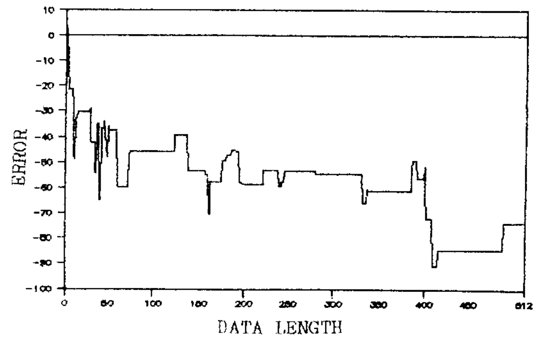
그림[2] $y_t = -0.4y_{t-1} - 0.85y_{t-2}$



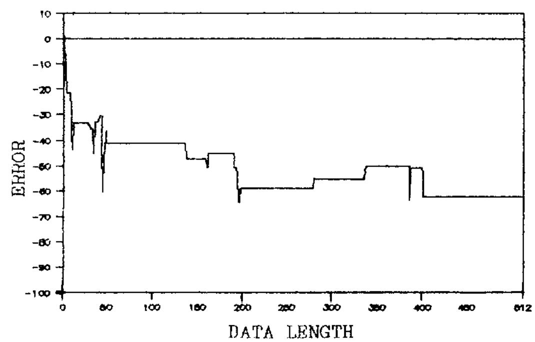
그림[3] $y_t = -0.4y_{t-1} - 0.85y_{t-2}$



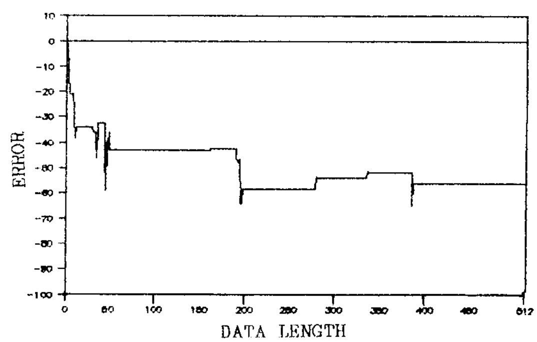
그림[4] $y_t = -0.4y_{t-1} - 0.85y_{t-2}$



그림[5] $y_t = -0.4y_{t-1} - 0.85y_{t-2}$



그림[6] $y_t = -0.4y_{t-1} - 0.85y_{t-2}$



그림[7] $y_t = -0.4y_{t-1} - 0.85y_{t-2}$