

입력 가중치를 이용한 예측제어.  
(Predictive controller using weighted input)

○나 상섭\* 신 세희\* 여 영구\*\*  
(S.S. La, S.H. Shin, Y.K. Yeo)

\*중앙대학교 화학공학과 (Chung-Ang Univ., Dept. of Chem. Eng.)  
\*\* 과학기술연구원 화학공정연구실 (KIST, Chem. Proc. Lab)

In this paper, predictive control method using actual applied input which is the weighted summation of past inputs is presented. In conventional predictive control methods, a set of control inputs is computed and in these only the first element is applied to the process at each time instant. But this predictive control method based on conventional methods considers all computed control inputs. Consequently, the characteristic of response and the reliability of the control scheme in the case of imperfect model are improved.

1. 서론

대부분의 공정에는 외부로부터 교란이 도입되는데 이러한 공정의 제어에 있어서는 적응제어방법이 흔히 이용된다. 이러한 적응제어방법을 위시한 여러 가지 제어방법들은 제어되는 공정의 모델로써 자동회귀모델 (autoregressive model) 을 이용하고 있다. 많은 경우 제어작용의 수행에 있어서 계산적으로 간편한 제어기들은 공정의 특성이 모델로부터 예측되는 특성과 차이가 있을 때 문제점들이 야기되게 된다. 이는 모델에 의한 실제공정의 표현에 있어서 많은 불확실성이 내재되어 있기 때문이다. 예로서 최소편차 제어방법 (minimum-variance control method) 은 비최소위상시스템 (nonminimum phase-system) 이나 수송지연이 존재하는 시스템에 적용하면 불안정한 폐회로 제어시스템이 유발된다. 이러한 제어시스템의 안정성을 향상시키기 위해서는 매우 복잡한 과정을 거쳐야 한다. 최근 들어 컴퓨터기술의 발달로 여러 가지 다양한 제어알고리즘의 실제활용이 가능하게 되었다. 공정의 모델로서도 그 인식과정이 복잡한 자동회귀모델 외에 계단응답모델이나 impulse 응답모델이 널리 이용되고 있다. 대표적인 전산제어방법으로서 모델예측제어방법을 들 수 있는데 이 방법은 모델에 의한 공정출력의 예측에 근거하고 있으며 이미 오래전부터 연구되고 활용되어 온 최소편차제어방법, 극배치법 (pole placement), deadbeat 방법들과 비교했을 때 보다 증진된 건실성 (robustness) 을 보여주고 있다. 이는 출력에 대한 예측시간범위 (horizon) 와 입력에 대한 예측시간범위를 미리정해주는 일반예측제어방법 (GPC) 과 DMC 에서 실제로 입증되고 있다. 본 연구에서 다루고 있는 제어기는 DMC와 기본구조를 같이 하지만 실제로 적용되는 제어입력의 계산은 이용가능한 계산된 여러입력치들의 가중된 합으로부터 이루어진다. 이렇게 함으로써 부정확하고 잘못된 입력 계산이 미치는 영향을 능률적으로 감소시킬 수 있다. 또한 제어구조자체의 적분작용 (integral action) 으로 인하여 제어에서 나타나는 offset을 효과적으로 감소시킬 수 있다.

2. 예측제어의 구조

제어하고자 하는 시스템은 다음과 같은 단일변수의 선형방정식으로 나타내어지는 것으로 가정한다.

$$Ay(t) = Bu(t-1) + Ae(t) \quad (1)$$

여기서 A와 B는 다음과 같이 정의되는 다항식이다

$$A = 1+a_1Z^{-1}+a_2Z^{-2}+ \dots + a_nZ^{-n}$$

$$B = b_0+b_1Z^{-1}+b_2Z^{-2}+ \dots + b_nZ^{-n} \quad (2)$$

위에서 y(t)와 u(t)는 각각 출력과 입력을 표시하며 e(t)는 외란을 의미한다.

식(1)로부터

$$y(t) = A^{-1}Bu(t-1) + e(t)$$

δ = (1-Z<sup>-1</sup>)로 두고 위의 식의 양변에 δ를 곱하면

$$\delta y(t) = A^{-1}B\delta u(t-1) + \delta e(t)$$

이 경우 δe(t) = ε(t)로 둔다. 위의 식에서 t를 t+1로 치환하면

$$\delta y(t+1) = A^{-1}B\delta u(t) + \epsilon(t+1)$$

이식을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$(1-Z^{-1})y(t+1) = y(t+1) - y(t)$$

$$= A^{-1}B\delta u(t) + \epsilon(t+1)$$

$$= H' \delta u(t) + \epsilon(t+1)$$

즉  $y(t+1) = y(t) + H' \delta u(t) + \epsilon(t+1) \quad (3)$

위에서  $H' = A^{-1}B$   
 $= h_0+h_1Z^{-1}+h_2Z^{-2}+ \dots +h_nZ^{-n} \quad (4)$

식(4)에서 h<sub>1</sub> 값은 식(2)의 다항식 A 와 B 의 long-division 에 의해 다음과 같이 얻어진다.

$$h_0 = b_0$$

$$h_1 = b_1 - h_0a_1$$

$$h_2 = b_2 - h_0a_2 - h_1a_1$$

$$h_3 = b_3 - h_0 a_3 - h_1 a_2 - h_2 a_1$$

$$\vdots$$

따라서  $h_1$  는

$$h_1 = b_1 - \sum (h_{i-j} \cdot a_j)$$

식(3)으로부터 1단계 예측값(one step ahead prediction)은 다음과 같이 쓸수있다.

$$\hat{y}(t+1) = y(t) + H\delta u(t) \quad (5)$$

식(4)로부터 H는 다음과 같이 정의하기도한다.

$$H = h_0 + h_1 Z^{-1} + h_2 Z^{-2} + \dots + h_N Z^{-N} \quad (N \leq n_b)$$

N값은 두 다항식(A와B)으로부터  $h_1$  값을 계산할때 계산값들이 어느 일정한 값에 도달하는 순간의 i값으로 둔다.

첫 식으로부터

$$\hat{y}(t+k) = \hat{y}(t+k-1) + H\delta u(t+k-1) \quad (6)$$

$k=1$ 인 경우

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+1) &= y(t) + (h_0 + h_1 Z^{-1} + \dots + h_N Z^{-N}) \delta u(t) \\ &= y(t) + h_0 \delta u(t) + (h_1 Z^{-1} + \dots + h_N Z^{-N}) \cdot \delta u(t) \end{aligned}$$

이것을 vector matrix 형태로 다시쓰면

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+1) &= y(t) + [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_N] \cdot \begin{bmatrix} \delta u(t-1) \\ \delta u(t-2) \\ \vdots \\ \delta u(t-N) \end{bmatrix} + \\ & \quad [h_0 \ 0 \ \dots \ 0] \cdot \begin{bmatrix} \delta u(t) \\ \delta u(t+1) \\ \vdots \\ \delta u(t+N) \end{bmatrix} \quad (7) \end{aligned}$$

한편  $k=2$  일때는

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+2) &= \hat{y}(t+1) + H\delta u(t+1) \\ &= \hat{y}(t+1) + [h_2 \ h_3 \ \dots \ h_N 0] \cdot \begin{bmatrix} \delta u(t-1) \\ \delta u(t-2) \\ \vdots \\ \delta u(t-N) \end{bmatrix} \\ & \quad + [h_1 \ h_0 \ 0 \ \dots \ 0] \cdot \begin{bmatrix} \delta u(t) \\ \delta u(t+1) \\ \vdots \\ \delta u(t+N) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

식(7)을 첫식에 대입하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+2) &= y(t) + [(h_1 + h_2)(h_2 + h_3) \ \dots \ (h_{N-1} + h_N) h_N] \\ & \quad \cdot \begin{bmatrix} \delta u(t-1) \\ \vdots \\ \delta u(t-N) \end{bmatrix} + [(h_0 + h_1) \ h_0 \ 0 \ \dots \ 0] \cdot \\ & \quad \begin{bmatrix} \delta u(t) \\ \delta u(t+1) \\ \vdots \\ \delta u(t+N) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\hat{y}(t+3) = \hat{y}(t+2) + H\delta u(t+2)$$

$$\begin{aligned} &= y(t) + [(h_1 + h_2 + h_3)(h_2 + h_3 + h_4) \ \dots \ (h_{N-2} \\ & + h_{N-1} + h_N)(h_{N-1} + h_N) h_N] \cdot \begin{bmatrix} \delta u(t-1) \\ \delta u(t-2) \\ \vdots \\ \delta u(t-N) \end{bmatrix} + [(h_0 + h_1 + \\ & h_2)(h_0 + h_1) \ h_0 \ \dots \ 0] \cdot \begin{bmatrix} \delta u(t) \\ \delta u(t+1) \\ \vdots \\ \delta u(t+N) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

일반적으로

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{y}(t+1) \\ \hat{y}(t+2) \\ \vdots \\ \hat{y}(t+p) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y(t) \\ y(t) \\ \vdots \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_N \\ h_1 + h_2 & h_2 + h_3 & \dots & h_N \\ h_1 + h_2 + h_3 & h_2 + h_3 + h_4 & \dots & h_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta u(t-1) \\ \delta u(t-2) \\ \vdots \\ \delta u(t-N) \end{bmatrix} \\ & \quad + \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 + h_1 & h_0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 + h_1 + h_2 & h_0 + h_1 & h_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta u(t) \\ \delta u(t+1) \\ \delta u(t+2) \\ \vdots \\ \delta u(t+N) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

위에서 P는 출력에 대한 예측시간범위(prediction horizon)이며 일반적으로  $P \geq N$  이다. 위의식을 다시쓰면

$$\underline{Y} = Y_0 + H_0 U_0 + H U$$

$\underline{Y}$ 는 현재시간 t 에서 시간 P까지의 예측출력값들에 대한 열 vector 이고  $Y_0$  는 현재시간에서 측정된 출력값의 열 vector 이다.

행렬  $H_0$ 는 다음과 같이 표시된다.

$$H_0 = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_N \\ h_1 + h_2 & h_2 + h_3 & \dots & h_N \\ h_1 + h_2 + h_3 & h_2 + h_3 + h_4 & \dots & h_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_1 + h_2 + \dots + h_N & h_2 + h_3 + \dots + h_N & \dots & h_N \\ h_1 + h_2 + \dots + h_N & h_2 + h_3 + \dots + h_N & \dots & h_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ( \quad ) & ( \quad ) & \dots & h_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ( \quad ) & ( \quad ) & \dots & h_N \end{bmatrix}$$

행렬  $H_0$  는  $N$ 번째 행부터  $P$  번째 행까지 같은 원소들로 구성되어 있는  $P \times N$  행렬이다. 행렬  $H$  는  $P \times P$  행렬로서 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$H = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & \dots & \dots \\ h_0+h_1 & h_0 & \dots & \dots \\ h_0+h_1+h_2 & h_0+h_1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_0+h_1+\dots+h_{N-1} & h_0+h_1+\dots+h_{N-2} & \dots & \dots \\ h_0+h_1+\dots+h_N & h_0+h_1+\dots+h_{N-1} & \dots & \dots \\ h_0+h_1+\dots+h_N & h_0+h_1+\dots+h_N & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

### 3. 제어계산

제어입력의 계산을 위해 비용함수 (cost function) 를 다음과 같이 정의하였다.

$$J = \sum_{k=1}^P (y(t+k) - v(t+k))^2 + \sum_{k=1}^{NU} \lambda(k) (u(t+k-1))^2 \quad (8)$$

입력에 대한 예측시간범위로서 DMC와 마찬가지로  $k > NU$  일때 모든 입력치들은 ZERO로 가정된다.  $\lambda(k)$  는 제어입력값에 적용되는 costing 으로서 0.5 에서 1.5 사이의 값을 갖는다. 한편  $v(t)$  는 시간  $t$  에서의 출력의 reference 값들로서 setpoint 가 된다. 일반적으로  $P > NU$  이며 행렬  $H$  에서  $P-NU$  만큼의 column 을 제거하는 효과를 가져온다. 앞의식 (8) 을 다시쓰면 다음과 같다.

$$J = [\underline{y} - \underline{v}]^T [\underline{y} - \underline{v}] + \underline{\lambda} \bar{U}^T \bar{U}$$

위에서

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} v(t+1) \\ v(t+2) \\ \vdots \\ v(t+P) \end{bmatrix} \in R^{P \times 1} \quad \bar{U} = \begin{bmatrix} \delta u(t) \\ \delta u(t+1) \\ \vdots \\ \delta u(t+NU-1) \end{bmatrix} \in R^{NU \times 1}$$

$$\underline{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda(1) \\ \lambda(2) \\ \vdots \\ \lambda(NU) \end{bmatrix} \in R^{NU \times 1}$$

그리고  $\bar{H}$  는  $H$ 로부터 얻어지는  $P \times NU$  행렬이다. 위의식에  $\underline{y}$  를 대입하면 다음결과를 얻는다.

$$J = [Y_0 + H_0 U_0 + \bar{H} \bar{U} - \underline{v}]^T [Y_0 + H_0 U_0 + \bar{H} \bar{U} - \underline{v}] + \underline{\lambda} \bar{U}^T \bar{U} = C^T C + C^T \bar{H} \bar{U} + \bar{U}^T \bar{H}^T C + \bar{U}^T \bar{H}^T \bar{H} \bar{U} + \underline{\lambda} \bar{U}^T \bar{U}$$

위에서  $C = Y_0 + H_0 U_0 - \underline{v}$  위에서 얻어지는  $J$ 를 최소화 하는 입력벡터는  $\partial J / \partial U = 0$  의 계산으로부터 다음과 같이 얻어진다.

$$\bar{U} = [\bar{H}^T \bar{H} + \underline{\lambda} I]^{-1} \bar{H}^T [Y_0 - Y_0 - H_0 U_0] \quad (9)$$

### 4. 가중입력

식(9)로부터 시간  $t$  에서  $NU$ 개의 입력값들이 계산된다.

$$u(t+k-1/t) \quad (k=1, \dots, NU)$$

즉 시간  $t$  에서의 입력은  $u(t/t), u(t/t-1), u(t/t-2), \dots, u(t/t-NU+1)$  들에 각각 가중치들을 할당하여 다음과 같이 계산된다.

$$U_r(t) = \frac{\sum_{k=1}^{NU} \gamma(k) \cdot u(t/t-k+1)}{\sum_{k=1}^{NU} \gamma(k)} \quad (10)$$

위에서  $\gamma(k)$  는 각 입력값에 할당된 가중치들이다. 예를들어

$\gamma(k) = 1 \quad k=1$   
 $\gamma(k) = 0 \quad k=2, \dots, NU$  인 경우  
 $U_r(t) = u(t/t)$  이며  $t$  시간 이전에 예측된 입력치들은 고려하지 않는 경우가 된다.  
 $\gamma(k)$  는 여러가지 방법에 의하여 결정할수 있겠으나 본 논문에서는 다음과 같은 지수함수형태로 결정하였다.  
 $\gamma(k) = e^{-k+1}$

### 5. EXAMPLES

입력가중치를 이용한 예측제어의 모사를 위해 다음과 같은 다항식  $A$  와  $B$  를 갖는 시스템을 고려한다.

$$A = 1 - 1.2Z^{-1} + 0.36Z^{-2} \\ B = 0.1 + 0.2Z^{-1}$$

시불변인  $\lambda(1), \dots, \lambda(NU)$  값은 전부 1이고 출력 예측시간범위  $P=22$ , 입력예측시간범위  $NU=5$ , 그리고  $N$  값은 20으로 정의했다.

EXAMPLE1. 모델이 실제공정과 일치하는 경우이며 전 시간범위에서 교란은 0.1로 일정하다.

setpoint  $v(t)$  는  $0 \leq t \leq 100$  에서 0이며  $100 < t \leq 200$  에서 1로 일정하다. 진동이 약간 존재하나 offset은 보이지 않는다.

EXAMPLE2. IMPERFECT MODEL EXAMPLE1.에서 EXAMPLE5.에서는 시스템 identification 에 의해서 구한 모델이 실제공정과 달라 이들 출력값들 사이의 차( $\epsilon$ )를 이용해 모사한 예들이다.

Fig.2.와 Fig.3.은 전 시간범위에서 교란이 0.1로 일정한 경우의 입력과 출력이며 setpoint는 EXAMPLE1.과 같다. Fig.1.과 비교해서 좀 더 심한 진동이 생겼으며 setpoint에 도달하는 시간이 길다.

### EXAMPLE3.

EXAMPLE2.에서 setpoint  $v(t)$  는  $50 \leq t \leq 100$  에서 1로하고 나머지 범위에서는 0으로 한 예이다. setpoint 의 변화에 잘 따라감을 알수있다.

### EXAMPLE4.

EXAMPLE3.에서 교란을 시간 40에서 60에서만 0.1로 발생시켰으며 진동은 약간있고 offset은 거의 없음을 알수있다.

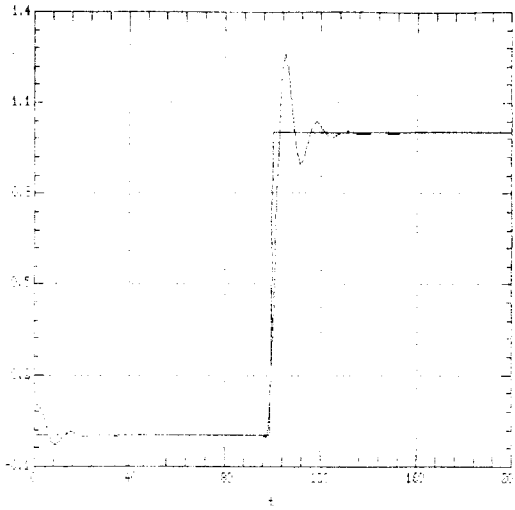


Fig. 1. Plant output for EXAMPLE1.

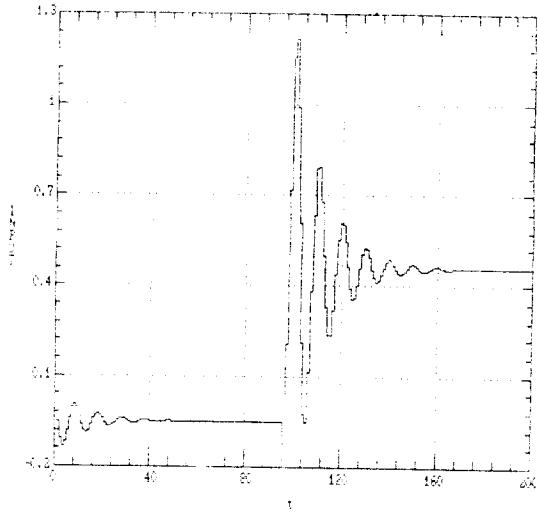


Fig. 2. Control input for EXAMPLE2.

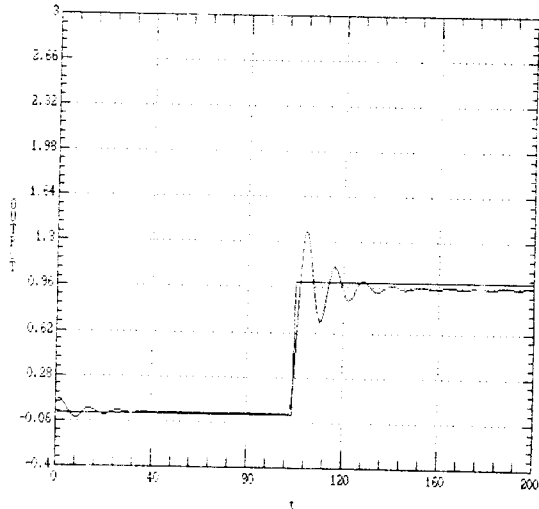


Fig. 3. Plant output for EXAMPLE2.

**EXAMPLE5.**

setpoint  $v(t)$ 를 전 시간범위에서 1로 고정시키고  
교반 또한 전 시간범위에서 0.1로 일정하다. 단

$$\begin{aligned} \gamma(k) &= 1 & k &= 1 \\ \gamma(k) &= 0 & k &= 2, \dots, \text{NU 토서} \end{aligned}$$

과거의 입력값을 무시하고 현재의 입력만을 사용한  
예이다.

Fig. 7.은  $\gamma(k) = e^{-k}$ 로 한 것으로서 Fig. 6.과 비  
교 했을때 offset이 작게 됨을 알수있다.

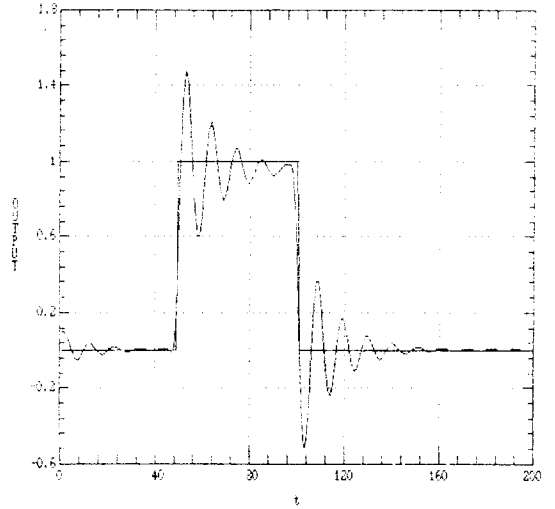


Fig. 4. Plant output for EXAMPLE3.

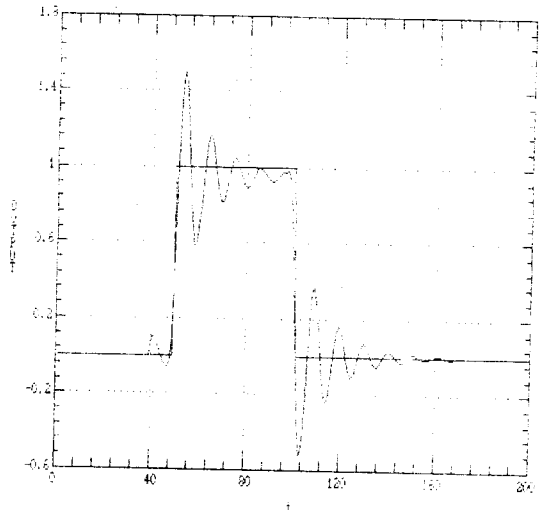


Fig. 5. Plant output for EXAMPLE4.

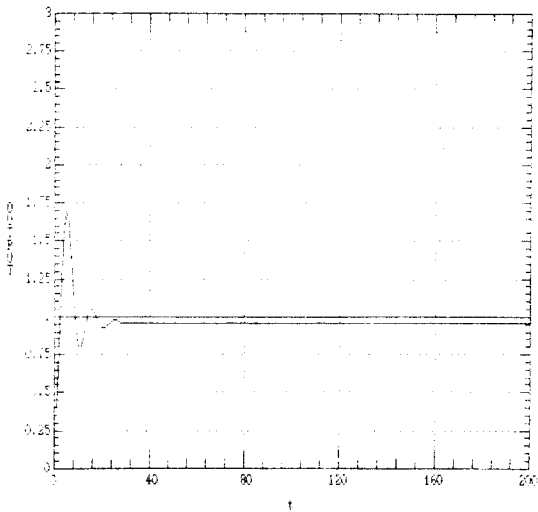


Fig. 6. Plant output for EXAMPLE 5.

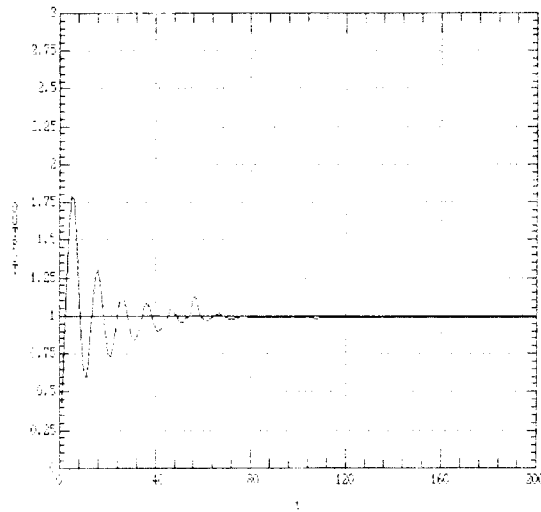


Fig. 7. Plant output for EXAMPLE 3

## 6. 결론

현재의 입력 뿐만 아니라 과거의 입력치를 이용한 예측제어방법은 현재의 입력값만을 이용하는 종래의 예측제어방법보다 건설성의 증진면에서 또한 그들의 응답특성항상면에서 효과가 있음을 입증했다. 본 논문에서 제시한 알고리즘은 각 시간마다 많은 입력의 계산과 예측으로 인한 여러가지 error들을 효과적으로 감소시킬수 있었으며 또한 Imperfect Model EXAMPLE에서도 알수 있듯이 모델이 부정확한 경우에도 제어구조에 대한 신뢰도가 항상됨을 밝혀냈다. 여러 파라미터들의 최적조건으로의 조정이 관건이며 특히 시스템 Identification에 의한 모델파라미터의 결정이 중요시 된다.

## NOMENCLATURE

- A polynomial of the system
- B polynomial of the system

- $\gamma(k)$  operator-specified weighting on the input signals obtained
- $\varepsilon(t)$  zero-mean signal
- H polynomial of impulse response coefficient
- $\underline{H}$  PXP matrix composed of  $h_i$
- $\overline{H}$  PXNU matrix from H
- $H_0$  PXN matrix composed of  $h_i$
- J controller cost function
- $\lambda(k)$  costing applied to the control inputs
- $\underline{\lambda}$  NUX1 vector composed of  $\lambda(k)$
- NU maximum prediction horizon of input
- P maximum prediction horizon of output
- $U_0$  NX1 vector composed of past inputs
- $\underline{U}$  PX1 vector composed of predicted inputs
- $\overline{U}$  NUX1 vector composed of predicted inputs
- $U_r(t)$  weighted input at time t
- $v(t)$  reference input signal
- $\underline{V}$  PX1 vector composed of  $v(t)$
- $Y_0$  PX1 vector composed of output at time t
- $\underline{Y}$  PX1 vector composed of predicted outputs

## REFERENCES

1. Warwick, K. and Clarke, D.W., 'Weighted input predictive controller', IEE PROCEEDINGS, Vol 135, Pt. D, No. 1, January, 1988
2. Gomatan R. Arulalan and Pradeep B. Deshpande 'Simplified Model Predictive Controller', Ind. Eng. Chem. Res, Vol. 26, No. 2, 1987
3. Jacinto L. Marchetti, Duncan A. Melilchamp, and Dale E. Seborg, 'Predictive Control Based on Discrete Convolution Models', Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev., 1983, 22, 488-495
4. Yeong K. Yeo and Dennis C. Williams, 'Bilinear Model Predictive Control', Ind. Eng. Chem. Res, Vol. 26, No. 11, 1987
5. DE KEYSER, R.M.C. and PH. G. A. VAN DE VELDE and F. A. G. DUMORTIER, 'A Comparative Study of Self-adaptive Long-range Predictive Control Method' Automatica, Vol. 24, No. 2, 1988
6. D.W. Clarke and C. Mohatadi, 'Properties of Generalised Predictive Control', January, 1988
7. Manfred Morari and Thomas J. McAvoy, CHEMICAL PROCESS CONTROLLER-CPC111, 'Model Predictive Control', ELSEVIER, 1986