

최신 비선형 pH 제어 방법의 실험적 비교

천 일근, 유성덕, 이지태

경북대학교 화학공학과

Abstract : Two recent nonlinear control methods of nonlinear geometric method and nonlinear optimal control method are applied to a pH control system with severe nonlinear characteristics. Simulations and experiments show that their performances are very good and robust for various realistic situations such as model parameter mismatches.

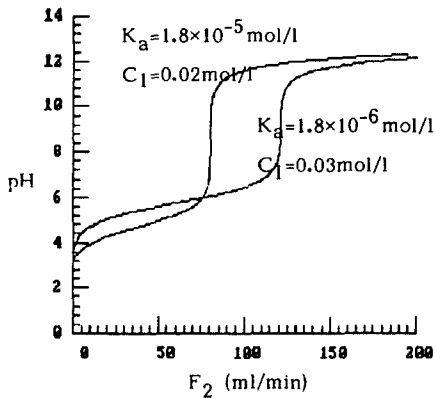


Fig. 1. Steady-state titration curves for the dissociation constant and concentration variations of the influent weak acid.

1. 서 론

많은 화학공정이 다변수적이고 비선형성인 것은 잘 알려진 사실이며 또한 자원의 효율적 이용, 고품질 제품의 요구, 환경오염에 관한 법적 규제의 강화는 공정을 더욱 복잡하게 하고 어려운 영역에서 조업하도록 한다. 이런 공정에 대하여 비선형 제어가 아주 좋은 결과를 주는 예가 속속 보고되고 있으며^{5,6)} 그 중의 하나인 비선형 geometry 법이 개발된 이래, 현재 화학공정에 적용이 시도되고 있는 중이다. 이 방법은 몇

몇 사람들에 의해 robust하다^{4,6)}고 알려졌으며 set point 변화에도 변수를 새로 계산하지 않고 performance가 좋으며 적용이 간단하다는 장점이었다. 반면에 적용이 불가능한 공정이 많고 계산이 복잡하며 시스템에 대한 완벽한 정보를 요구하는 문제점을 안고 있다.

비선형 최적제어법은 일찌기 개발된 것으로 모든 비선형 시스템에 적용할 수 있으나 계산의 어려움, 적용의 어려움 등으로 그간 거의 사용되지 않았었다. 그러나 최근에 적용이 간단한 급수해를 계산할 수 있는 프로그램이 개발되어¹⁾ 실제 적용할 수 있게 되었다. 이 방법은 IQ문제에서 경험으로 보면 robust할 것으로 예측된다. 적용은 쉬우나 계산이 복잡하고 set point 변화에 변수를 새로 계산해야 하는 단점이 있다.

Computer의 발달로 두 방법을 실제 적용하는데는 별 문제가 없으나 실제 적용할때 항상 문제시되는 robustness에 관한 비교를 약산과 강입기로 이루어진 pH 제어 시스템에서 모사와 실험을 통해 하고자 한다.

2. 이 론

i) 비선형 geometry 법[8]

다음식

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (1)$$

$$y = h(x) \quad (2)$$

으로 기술되는 비선형 시스템을 다룬다.

$$L_f h \equiv \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial h(x)}{\partial x_i}$$

의 notation을 도입하고, 입력으로

$$u = \frac{k_1 r - L_f h - \sum_{i=1}^{\alpha} k_i L_f^{i-1} h}{L_g L_f^{\alpha-1} h} \quad (3)$$

을 취한다. 여기서 α 는 $L_g L_f^{\alpha-1} h \neq 0$ 가 되는 제일 작은 양수이다. 그러면 시스템 (1)과 (2)는

$$\frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} + k_\alpha \frac{d^{\alpha-1} y}{dt^{\alpha-1}} + \dots + k_1 y = k_1 r$$

로 선형화된다.

ii) 비선형 최적제어법[9]

식 (1)과 (2)로 기술되는 시스템을 제어하면서 다음의 비용

$$J = \int_0^{\infty} [m\{x(t)\} + r u^2(t)] dt$$

을 최소화하는 문제를 다룬다. 최적제어규칙

$$u^*(x) = -\frac{1}{2} r^{-2} g(x) \cdot \phi(x) \quad (4)$$

을 얻을수 있으며, 여기서 $\phi(x)$ 는 다음 Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB)식

$$\begin{aligned} \nabla \phi(x) \cdot f(x) - \frac{1}{4} r^{-2} \{g(x) \cdot \nabla \phi(x)\} \\ \cdot \{g(x) \cdot \nabla \phi(x)\} + m(x) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\phi(0) = 0$$

의 해이다. 식(5)의 편미분방정식을 풀게 되면 적용이 간편한 제어기(4)을 얻을수 있으나 간단히 풀리지 않으므로 급수법을 이용, 급수해를 얻는다. 급수법에 서는 먼저 $\phi(x)$ 를 다음과 같이 전개한다.

$$\phi(x) = \phi^{(2)}(x) + \phi^{(3)}(x) + \dots \quad (6)$$

이 식(6)을 식(5)에 대입하고 양변을 계수비교하여 $\phi^{(2)}(x)$, $\phi^{(3)}(x)$, ... 들을 순차적으로 결정한다. 이

렇게 하여 구한 $u^*(1) + u^*(2) + \dots$ 는 원점근처에서 u^* 를 아주 잘 근사하는 Taylor 급수해가 된다.

3. 모사 및 실험

본 연구에 사용되는 pH 제어 시스템(Fig. 2)의 이론적 모델링 식은 다음과 같다.[2]

$$\eta = [F_2 C_2 - (F_1 + F_2) \eta] / V \quad (7)$$

$$\xi = [F_1 C_1 - (F_1 + F_2) \xi] / V \quad (8)$$

$$\begin{aligned} [H^+]^3 + (K_a + \eta)[H^+]^2 + (K_a \eta - \\ K_a \xi - K_w)[H^+] - K_a K_w = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$pH = -\log_{10} [H^+]$$

여기서 $\eta = [Na^+]$, $\xi = [CH_3COOH] + [CH_3COO^-]$, K_a 는 초산의 이온화율을, K_w 는 물의 이온화적을 나타낸다. 위의 모델식은 적합하지 않으므로 식(9)을 시간에 대해 미분하고 η , ξ , ξ 를 소거하면 아래의 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \ln(10)V[2z^3 + (K_a + \eta)z^2 + K_a K_w]dP/dt = \\ F_1[z^3 + K_a z^2 - (K_w + K_a C_1)z - K_a K_w] \\ + F_2[z^3 + (K_a + C_2)z^2 - (K_w + K_a C_2)z - K_a K_w] \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 $P = pH$ 이며, $z = [H^+]$ 이다. 그러면 상태방정식은 (7)식과 (10)식이 된다.

공정모사용으로는 식(10)이 stiff하여 적당하지 않았다. 식(7), (8)은 이산시간 동안에 해석적인 적분을 하고, (9)식에 대입, 3차식의 근의 공식을 사용하여 풀어 이를 다시 Newton-Raphson 반복법으로 정밀히

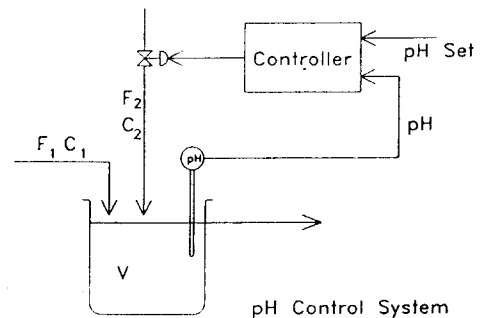


Fig. 2. A pH control system

구하였다.

pH가 주어진 정상상태에서 F_{2s} 와 η_s 는 다음과 같이 쓸수 있다.

$$F_{2s} = \frac{-[b^3 + K_a b^2 - (K_a C_1 + K_w)b - K_a K_w]}{b^3 + (K_a + C_2)b^2 + (K_a C_2 - K_w)b - K_a K_w} F_1$$

$$\eta_s = \frac{C_2 F_{2s}}{F_1 + F_{2s}}$$

1) 비선형 Geometry 법

식(7)과 (10)은 다음과 같이 분리하여 쓸수 있다.

$$\dot{x} = f(x) + g(x) * F_2$$

$$y = h(x)$$

여기서 $h(x) = P$, $x = [\eta \ P]^T$ 를 나타내며 $L_g L_f P = -[z^3 + (K_a + C_2)z^2 + (K_a C_2 - K_w)z - K_a K_w] / \ln(10) V [2z^3 + (K_a + \eta)z^2 + K_a K_w] \neq 0$ 이므로 linearizability index(a)가 1임을 알 수 있다. 그러므로 F_2 를 (11)식와 같이 놓을 수 있고 (10)식은 (12)식으로 된다.

$$F_2 = \frac{k_1 r - f_2 - k_1 P}{g_2} \quad (11)$$

$$\frac{dP}{dt} + k_1 P = k_1 r \quad (12)$$

ii) Optimal Control

식(2-39)과 (2-40)에 deviation 변수를 도입하여 정리하면 다음과 같다.

$$x_1 = [F_1 \eta_s - (C_2 - \eta_s) F_{2s} - (F_1 + F_{2s}) x_1] / V$$

$$+ [C_2 - \eta_s - x_1] u / V$$

$$x_2 = \{F_1 [a^3 + K_a a^2 - (K_a C_1 + K_w)a - K_a K_w] + F_{2s} [a^3 + (K_a + C_2)a^2 + (K_a C_2 - K_w)a - K_a K_w]\} /$$

$$\{ \ln(10) V [2a^3 + (K_a + \eta)a^2 + K_a K_w] \} +$$

$$\{ a^3 + (K_a + C_2)a^2 + (K_a C_2 - K_w)a - K_a K_w \} u / \{ \ln(10) V [2a^3 + (K_a + \eta)a^2 + K_a K_w] \}$$

여기서 $x_1 = \eta - \eta_s$, $x_2 = P - P_s$, $u = F_2 - F_{2s}$, $a = 10^{-(x_1 + P_s)}$ 를 나타낸다. 또한 cost function으로

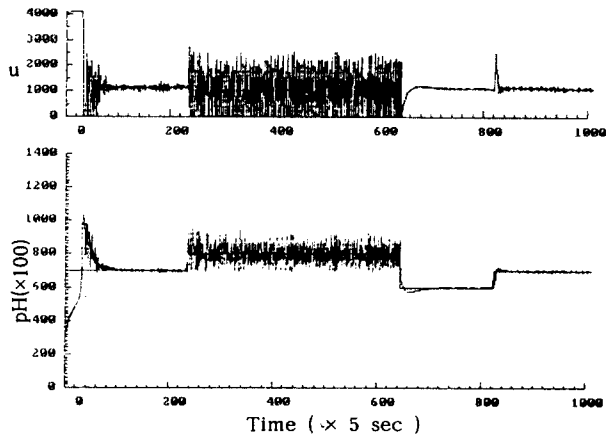
$$J = \int_0^{\infty} [x_2^2 + \gamma x_2^3 + \delta x_2^4 + ru^2] dt$$

를 잡는다. 위의 식들은 다항식 연산 프로그램과 최적제어규칙 $u_*(x)$ 를 구하는 프로그램(see Ref.1)을 거쳐 3차항까지 구하여 사용하였다.

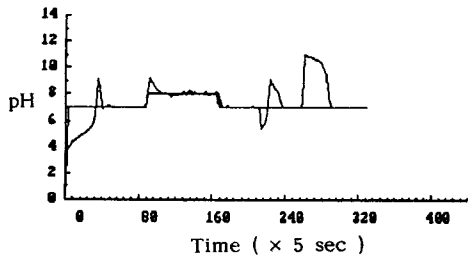
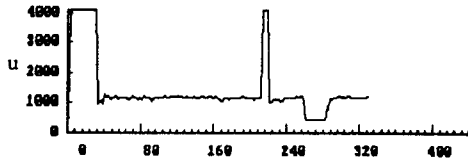
4. 결 론

비선형 geometry 법과 비선형 최적제어법을 pH 제어 시스템에 적용시켜서 얻은 결과는 다음과 같다.

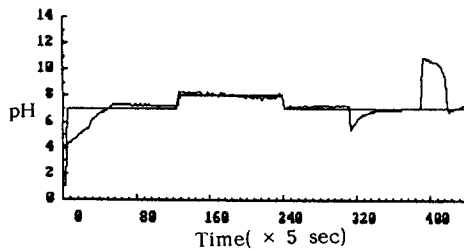
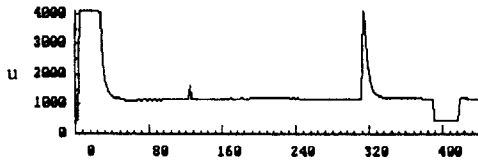
- i) 시스템의 정보를 정확히 알 수 있다면 비선형 시스템이라도 아주 좋은 결과를 준다.
- ii) 위의 두 방법은 noise에 강건하다.
- iii) 시스템의 불확실성에 대해서는 최적제어법이 좋은 결과를 나타낸다.
- iv) 최적제어법은 그 시스템의 특성에 맞게 cost function을 조정할 수 있다.
- v) 비선형 geometry 법은 set point 변화에도 변수를 새로 계산하지 않는다.



PID Control



Nonlinear Geometry Method



Optimal Control Method

Reference

1. 이 지태, "비선형 화학공정을 위한 준최적 궤환제어기의 설계에 관한 연구", 박사학위논문, 한국과학기술원, 화학공학과(1986)
2. 한국 전자 통신 연구소, "STC 공정시험을 위한 pH 적정 공정의 모델링 및 자기동조 제어이론 연구"
3. J. C. Kantor, "An Overview of Nonlinear Geometrical methods for Process Control", The Shell Process Control Workshop, D. M. Prett and M. Moran ed. , Butterworths, 225~250(1987)
4. 김 종철, "비선형성인 탱크에서의 역위제어", 석사학위논문, 경북대학교, 화학공학과(1989)
5. C. Kravaris and Chang-Bock Chung, "Nonlinear State Feedback Synthesis by Global Input/Output Linearization", *AIChE J.*, 33, 592~603(1987)
6. C. Kravaris and S. Palanki, "Robust Nonlinear State Feedback Under Structured Uncertainty", *AIChE J.*, 34, 1119~1127(1988)
7. S. T. Glad, "Robustness of Nonlinear State Feedback - A Survey", *Automatica*, 23, 425~435(1987)
8. J. C. Kantor, "An Overview of Nonlinear Geometrical Methods for process Control", The Shell Process Control Workshop, D. M. Prett and M. Morau ed., Butterworths, 225~250(1987)