

슬라이딩 모드를 이용한 DC Servo Motor 의 위치 제어

이 운종 이 일형 손 영대 오 원석 김 신섭\*

한양 대학교 전기 공학과

Position Control of D.C. Servo Motor  
Using Variable Structure Control with sliding mode

Yoon Jong Lee , Il Hyung Lee , Young Dae Son , Won Seok Oh , Sin Sup Kim

Dept. of Electrical Eng. Han Yang Univ.

ABSTRACT

A position control system of D.C. Servo motor based on discrete variable structure system with sliding mode is presented. The sliding mode has been designed for a continuous system, but it is often realized in digital fashion because the complex switching logic can be easily carried out. In digital control system, the ideal sliding mode does not occur since the structure can't be switched during sampling interval. However, there can be exist a motion which is confined to a region including the sliding surface and proceeds to the origin along the surface. This motion is called quasi-sliding mode.

In this paper, we introduce this control scheme to the D.C. Servo motor position control in order to reduce the chattering phenomenon.

1. 서론

최근 서어보 모터에 의한 구동제어 기술의 고도화 및 정밀화가 점점 요구되고 있는데 서어보 제어성능을 나타내는 평가지표로서 응답시간, 오버슈트, 정확도 및 강인성등을 들 수 있다. 일반적으로 사용되어 온 PID 제어기나 선형 상태 피드백 제어기 만으로는 위의 여러 특성을 만족 시키기가 곤란하므로 적응제어기를 비롯한 비선형 제어기에 관한 연구가 이루어져 왔다. 이중의 하나로 최근 강인성을 중시한 제어로서 주목을 받고있는, 가변구조계 (Variable Structure System) 의 이론을 이용한 슬라이딩 모드 제어 (Sliding Mode Control) 가 있다. 이는 제어대상의 상태에 따라서 제어기의 궤환 이득을 바꿔 위상평면에 설정한 스위칭 평면 (switching hyperplane) 근방에 상태를 구속 하면서 목표값에 도달시키는 제어방식인데 이 평면 상에서 동작할 경우 시스템 매개변수의 변동이나 외란에 거의 영향을 받지 않는 특성을 갖는다. 또한, 슬라이딩 동작을 발생 시키기 위해서는 상태가 스위칭 평면을 통과하는 순간에 제어 입력을 스위칭 하지 않으면 안되는데 그현리는 오래전부터 알려져 왔음에도 불구하고 하드웨어의 제약 때문에 본격적인 실용화는 이루지 못했다. 그러나, 최근의 고속 스위칭 반도체 소자와 마이크로 프로세서의 출현으로 이 이론이 실제 시스템에 적용되고 있는데, 마이크로 프로세서를 사용한 디지털 제어시 샘플링 주기로 인한 스위칭 지연과 chattering 이 발생하게 된다. 이때, 상태가 스위칭 평면을 포함하는 임의의 영역내에 구속 되어 원점으로 복귀하는 동작이 존재하게 되는데 이 동작을 의사 슬라이딩 모드 (quasi-sliding mode)라 부르며 이상적인 슬라이딩 모드와 유사한 특성을 가진다. 따라서, 본 연구에서는 마이크로 프로세서에 의한 한 D.C. 서어보 모터의 슬라이딩 모드 제어시 스위칭 평면 근방에 임의의 경계를 설정하여 이 영역 내에서 연속적인 입력을 가하므로써 chattering 현상을 줄일 수 있었다.

2. 시스템의 수학적 모델

본 연구의 모델은 전기자 전압에 의해 제어되는 영구 자석형 직류 서어보 전동기를 사용했다. 이 전동기의 발생 토크는 다음 식과 같다.

$$Tg(t) = J \frac{dw}{dt} + Bw(t) + Tl(t) = Kt ia(t) \quad (1)$$

전기자 루프의 전압 방정식은 다음과 같다.

$$Va = L \frac{dia}{dt} + Ria + Vg \quad (2)$$

$$Vg(t) = Kew(t)$$

식 (1), (2) 로 부터 상태변수 X1을 위치오차, X2를 각속도로 선택하고, 시스템의 전기적 시정수를 무시하면 본 시스템은 다음과 같은 상태 방정식으로 표시된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{X1} \\ \dot{X2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/\tau m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X1 \\ X2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b/\tau m \end{bmatrix} U - \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix} Tl \quad (3)$$

여기서, X1 =  $\theta - \theta_{ref}$  : 위치오차  
 X2 =  $dX1/dt = w$  : 각속도  
 $\tau m = RJ/(RB+KtKe)$ ,  $b = Kt/(RB+KtKe)$ ,  
 $d = 1/J$

3. 가변구조 제어 시스템의 설계

가변구조계 (Variable Structure System) 이론은 시스템의 운행중에 현재의 상태오차와 그 미분값에 따라 시스템의 구조를 의도적으로 바꾼다는 점에서 고전적인 제어이론과 다르며, 슬라이딩 모드 상태에 있을때 매개변수 변화와 외란에 거의 영향을 받지 않고 물리적인 실현이 간단하여 실시간 제어 (real time control) 에 유리한 장점을 가지고 있다. 슬라이딩 모드 제어기 설계를 위해서는 다음의 두 과정을 거친다.

- (i) 안정한 스위칭 평면 S를 설정.
- (ii) 스위칭 평면을 설정한 후 시스템의 상태들이 평면상에 구속 시키는 제어입력 U를 결정.

3.1 스위칭 평면의 결정

스위칭 평면 (Switching hyperplane) 은 다음과 같이 정의 한다.

$$S = \sum_{i=1}^n C_i X_i, \quad C_i = \text{const}, \quad C_n = 1 \quad (4)$$

슬라이딩 모드에서 시스템의 궤적은 스위칭 평면상으로 제한 되므로 다음 두 식으로 나타낼 수 있다.

$$S = 0 \\ dS/dt = 0 \quad (5)$$

이에 따른 상태의 궤적은

$$X1(t) = X1(t_0) \exp[-C(t-t_0)] \quad (6)$$

여기서,  $t_0$ 는 스위칭 평면에 도달하는 시간이다. 그러므로, 상태 궤적이 일단 스위칭 평면에 도달하여 슬라이딩 동작을 할 때에는 시스템 매개변수 변동의 영향을 받지 않고, 슬라이딩 라인의 기울기인  $C$ 값에 따라서 응답속도가 달라짐을 알 수 있다. 즉,  $C$ 를 크게 하면 응답속도는 빨라지나 reaching time  $t_0$ 가 길어져서 전반적으로 강인성이 떨어지게 된다. 따라서, 원하는 과도특성을 갖도록  $C$ 를 결정한다. 슬라이딩 모드가 존재할 조건은

$$\lim_{S \rightarrow 0} S(dS/dt) < 0 \quad (7)$$

과 같은데 이 식으로부터 제어기 이득값을 결정할 수 있다.

3.2 제어입력의 설계

스위칭 평면이 결정되면 상태를 스위칭 평면에 구속시키는 제어입력  $U$ 를 결정해야 하는데, 이 불연속 제어입력은 다음과 같은 여러 형태가 있으며 목적에 따라 이들을 적절히 조합하여 사용할 수 있다.

- a) 일정 이득을 가지는 릴레이 (relay)  
 $U(X) = M \text{sgn}(S), \quad M > 0$
- b) 상태 종속 이득을 가지는 릴레이 (relay)  
 $U(X) = m(X) \text{sgn}(S), \quad m(\cdot) > 0$
- c) 스위칭 이득을 가지는 선형궤환  
 $U(X) = P X, \quad P = [P_{ij}]$   
 $P_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij} & \text{if } S_i X_j > 0 \\ \beta_{ij} & \text{if } S_i X_j < 0 \end{cases}$

여기서, 가장 일반적인 제어입력  $U$ 의 형태는

$$U = \sum_{i=1}^{n-1} P_i X_i + M \text{sgn}(S) \quad (8)$$

와 같은데, 우변의 첫번째항은 상태궤환 항이며 평형점 (equilibrium point,  $X_i \rightarrow 0$ )에 가까이 왔을 때 무시된다. 두번째항은 외란을 보상하기 위한 항이며  $X_i \rightarrow 0$ 일 때 지배적인 값이 된다.

4. 이산 가변 구조 제어 시스템

지금까지의 가변구조 제어이론은 거의 연속시간 제어를 전제로 한 것이므로 연속적인 제어입력을 발생하게 된다. 그러나, 마이크로 프로세서를 응용한 실제 시스템의 디지털 제어시에는 이 이론을 적절히 수정할 필요가 있다.

4.1 이산 가변 구조 시스템

가변구조 이론을 고찰하기 위해 다음과 같은 2차 시스템을 생각하자.

$$\dot{X}(t) = A X(t) + B U(t) - F T1(t) \quad (9)$$

여기서,  $X$ : 상태변수 (2 by 1)  
 $A$ : 매개변수 행렬 (2 by 2)  
 $B$ : 매개변수 행렬 (2 by 1)  
 $F$ : 매개변수 행렬 (2 by 1)  
 $U$ : 스칼라 제어입력  
 $T1$ : 부하 토크

식 (9)를 차분 방정식으로 변환하면 다음과 같다.

$$X [(m+1)T] = \phi X(mT) + \Gamma U(mT) - D T1(mT) \quad (10)$$

여기서,  $\phi = \exp(AT) = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}$ ,

$$\Gamma = \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix} \exp [A (T-\tau)] d\tau \quad B = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix} \exp [A (T-\tau)] d\tau \quad F = \begin{bmatrix} d1 \\ d2 \end{bmatrix}$$

$T$ 는 sampling time 이다.

그러므로, 식 (3) 과 (10) 으로부터, 본 연구의 차분 방정식을 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} X1[(m+1)T] \\ X2[(m+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tau m [1 - \exp(-T/\tau m)] \\ 0 & \exp(-T/\tau m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X1(mT) \\ X2(mT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b[T-\tau m [1 - \exp(-T/\tau m)]] \\ b[1 - \exp(-T/\tau m)] \end{bmatrix} U(mT) + \begin{bmatrix} d1 T [1 - \exp(-T/\tau m)] \\ d2 \tau m [1 - \exp(-T/\tau m)] \end{bmatrix} T1(mT) \quad (11)$$

그리고 상태  $X(t)$ 는 sampling 주기  $T$ 마다 직접 관측할 수 있고 제어입력은 이 상태에 대해 다음 식과 같이 주어지며, 샘플링 시간 동안 일정한 값을 가진다.

$$U(t) = U(mT) = -P X1(mT) - M \text{sgn}[S(mT)], \quad (12) \\ mT \leq t < (m+1)T, \quad (m=1,2,\dots)$$

$$\text{여기서, } P = \begin{cases} \alpha & \text{if } X1(mT) S(mT) > 0 \\ \beta & \text{if } X1(mT) S(mT) < 0 \end{cases} \quad (13)$$

$$M \text{sgn}[S(mT)] = \begin{cases} M & \text{if } S(mT) > 0 \\ 0 & \text{if } S(mT) = 0 \\ -M & \text{if } S(mT) < 0 \end{cases} \quad (14)$$

슬라이딩 평면은 식 (4)로부터 다음과 같이 놓을 수 있다.

$$S(mT) = C X1(mT) + X2(mT) \quad (15)$$

이산계에서는 시스템 구조의 스위칭 지연 때문에 이상적인 슬라이딩 모드는 존재하지 않으며, 스위칭 평면의 근방에서 진동하면서 원점으로 복귀하는 의사 슬라이딩 모드가 발생한다. 이 의사 슬라이딩 모드가 존재할 조건은 다음과 같다.[7]

$$\lim_{S \rightarrow 0} S(mT) \nabla S(mT) \leq 0 \quad (16)$$

$$\nabla S(mT) = S((m+1)T) - S(mT) \quad (17)$$

그러므로, 이 조건으로부터 구할 수 있는 스위칭이득과 M 값의 범위는 다음과 같다.

$$\beta \leq P^0 \leq \alpha \quad (18)$$

여기서,

$$P^0 = \frac{1}{C^T 1 + T^2} (C \phi_{11} + \phi_{21} - C^2 \phi_{12} - C \phi_{22}) \quad (19)$$

$$M \geq \frac{C d_1 + d_2}{C^T 1 + T^2} |T| \quad (19)$$

#### 4.2 경계 영역의 설정

제어 입력의 높은 스위칭 주파수로 인한 진동(chattering) 현상을 줄이기 위해 스위칭 평면 근방에 임의의 영역을 설정한다. 따라서, 상태가 이 경계 영역을 벗어 나면 다시 이 영역으로 돌아 오도록 식 (12)와 같은 불연속 입력을 가하고, 이 영역 안에서는 연속 입력으로 대치하여 입력의 chattering 현상을 제거할 수 있다. 또한, 정상상태 오차가 생기지 않도록 하기 위해 상태 궤적이 원점으로 수렴해 감에 따라 경계 영역의 폭도 영으로 수렴하도록 한다. 이 영역을  $\Omega$ 이라 하면 [3], 이 영역은 다음과 같이 두 가지 궤적이득으로부터 얻어지는 경계선 안의 영역을 의미하며 원래의 슬라이딩 라인을 포함한다.

(i)  $\alpha$  gain으로 부터 얻어지는 경계선

$$S\alpha(\mu) = \{ X \in R^2 \mid C^T \phi \alpha(\delta) X = 0, 0 \leq \delta \leq \mu \} \quad (20)$$

(ii)  $\beta$  gain으로 부터 얻어지는 경계선

$$S\beta(\mu) = \{ X \in R^2 \mid C^T \phi \beta(\delta) X = 0, 0 \leq \delta \leq \mu \} \quad (21)$$

여기서,  $\phi \alpha(\delta) = \exp[A(\alpha)\delta]$ ,  $\phi \beta(\delta) = \exp[A(\beta)\delta]$

또한, 상태궤적이 이 영역내에 존재하는지의 여부는 다음 식으로 알 수 있다.

$$\text{sgn}[C^T \phi \alpha(\delta) X(mT)] = \text{sgn}[S(mT)] \quad (22)$$

혹은

$$\text{sgn}[C^T \phi \beta(\delta) X(mT)] = \text{sgn}[S(mT)] \quad (23)$$

이런 상태궤적은 영역  $\Omega$ 에 포함되며 이 때 연속 입력을 가한다.

그림 1. 에 경계영역을 설정한 시스템의 phase plane 을 나타내었다.

#### 5. 해석 결과 및 검토.

본 연구의 해석에 적용한 DC 서어보 전동기의 제정수는 표 1.에 나타나 있으며, 시스템 블록선도는 그림 2에 나타나 있다. 여기서, limiter에서 입력전압의 크기가 제한되며 power Amp.는 4상한 chopper 로 구성된다.

그림 3 은 제어입력을 다음 식과 같이 주었을 때의 결과들이다.

$$U(mT) = - P X1(mT) - M \text{sgn}[S(mT)] \quad (24)$$

그림 4 는 제어입력을 다음과 같이 주었을 때의 결과들이다.

$$U(mT) = - P^0 X1(mT) \quad (25)$$

(영역 외)

$$U(mT) = \begin{cases} - P X1(mT) - M \text{sgn}[S(mT)], & X1(mT) > \text{err} \\ - P X1(mT), & X1(mT) < \text{err} \end{cases}$$

(26)

err : 허용오차

위의 결과들을 비교해 볼 때, 과도상태의 진동은 경계 영역을 설정하여 줄일수 있었고, 정상상태에서는  $X1(mT)$  가 거의 zero이므로 입력의 외란 보상항인  $-M \text{sgn}[S(mT)]$  이 지배적인 입력항이 된다. 이 때, 이 보상항이 정상상태의 진동현상과 전력 손실을 가져오므로 상태 오차가 허용 범위 안에 들어왔을 때에는 이 항을 제거한 입력  $U = - P X1(mT)$  로 주었다.

또한, 정격 토오크의 50% 정도인 외란이 가해졌을 때 그림에서 알 수 있듯이 시스템이 이 변동에 거의 영향을 받지 않음을 알 수 있다.

표.1 전동기 파라미터.

R	1.1 $\Omega$
L	0.4 mH
J	1.0388 * 10 <sup>(-5)</sup> Kg m <sup>2</sup>
B	1.7 * 10 <sup>(-6)</sup> Kg m <sup>2</sup> /sec
Kt	50 * 10 <sup>(-3)</sup> N m/A
Ke	0.04976 V sec/rad
정격 토오크	0.186 N m

#### 6. 결론

본 연구는 슬라이딩 모드를 갖는 가변구조 제어기법을 도입하여 영구 자석형 DC 서어보 모터의 위치 제어에 적용하였다. 이 제어법은 플랜트의 매개변수를 정확히 알지 못해도 설계가 용이하며 매개변수 변동이나 부하변동 등의 외란에 특히 강한 강인성을 보인다. 그리고 입력의 chattering 문제는, 슬라이딩 라인상에 임의의 경계영역을 설정하여 이 영역안에서는 연속적인 계인값을 취하여 이 문제를 다소 해결할 수 있다. 또한, 알고리즘이 간단하여 프로그램 수행속도가 빠르며, 오버슈트가 없는 신속한 응답특성을 보이므로 빠른 응답 특성을 요구하는 회전기의 제어에 쉽게 응용될 것으로 사료된다.

#### 7. 참고 문헌

1. V.I.Utkin, " Variable Structure Systems with Sliding Modes," IEEE Trans. on Automatic Control, vol.AC-22, no.2, pp.212-222, April,1977.
2. U.Itkis, " Control Systems of Variable Structure," John Wiley and Sons, New York, 1976.
3. M.D.Espana, R.S.Ortega, and J.J.Espino, " Variable Structure Systems with Chattering Reduction: A Microprocessor Based Design," Automatica, vol.20, no.1, pp.133-134, 1984.
4. R.A.DeCarlo, S.H.Zak, and G.P.Matthews, "Variable Structure Control of Nonlinear Multi-variable Systems: A Tutorial," Proc. of IEEE, vol.76, no.3, pp.212-232, March, 1988.

5. N.E.Gough , Z.M.Ismail , and R.E.King , " Analysis of Variable Structure Systems with Sliding Modes , " Int.J.System Sci. , vol.15 , no.4 , pp.401-409, 1984.
6. B.C.Kuo and I.Tal , " DC Motors and Control Systems , " SRL Publishing Company, 1978.
7. C.Milosavljevic , " General Conditions for The Existence of A Quasi-sliding Mode on The Switching Hyperplane in Discrete Variable Structure Systems , " Automat. Remote Control, vol.46, pp.307-314, 1985.

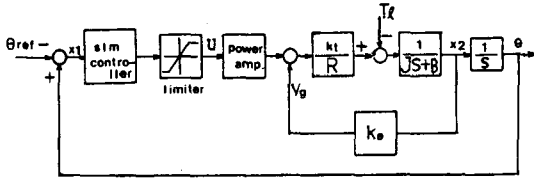


그림 2. 시스템 블록선도.

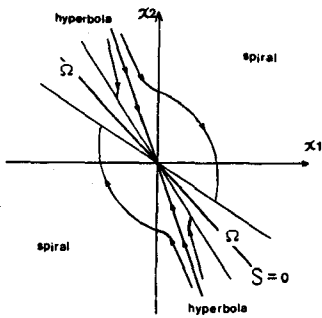
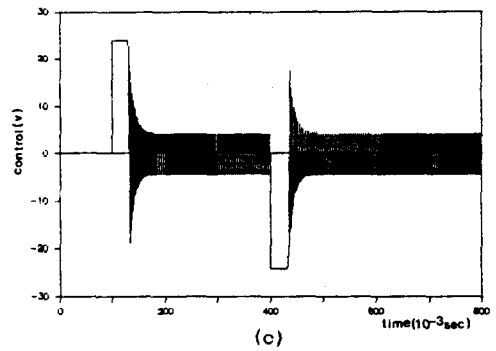
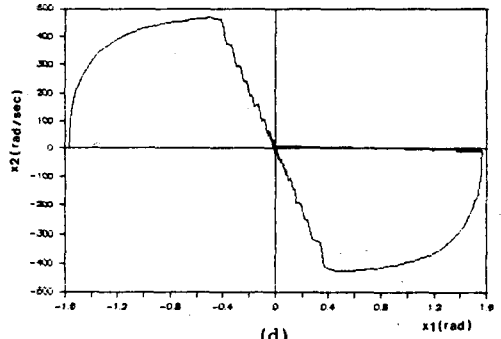


그림 1. 시스템 위상 평면도.



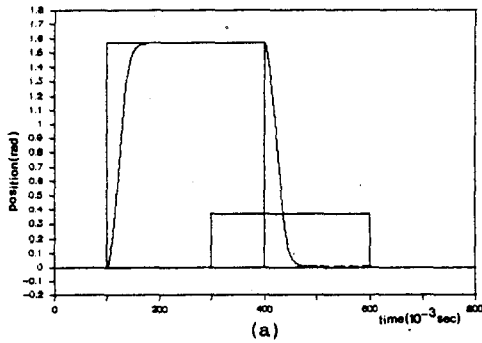
(c)



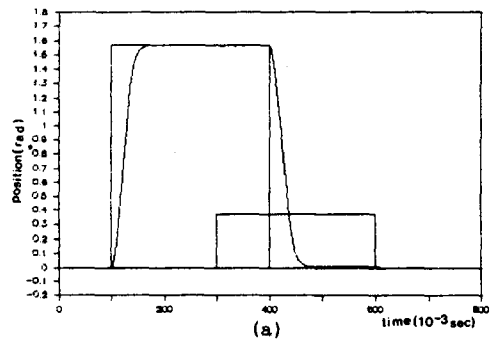
(d)

그림 3. 시간응답특성 (Without Boundary)

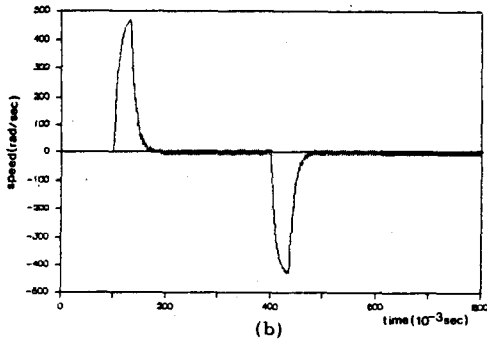
- (a) 위치      (b) 속도  
(c) 제어입력      (d) 상태 궤적



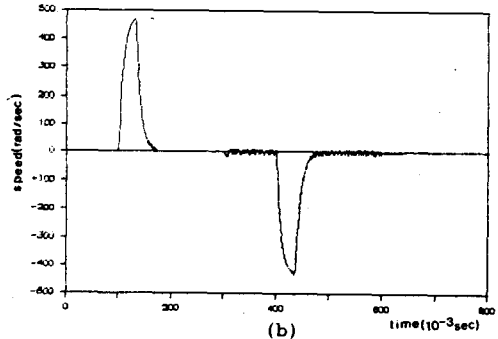
(a)



(a)



(b)



(b)

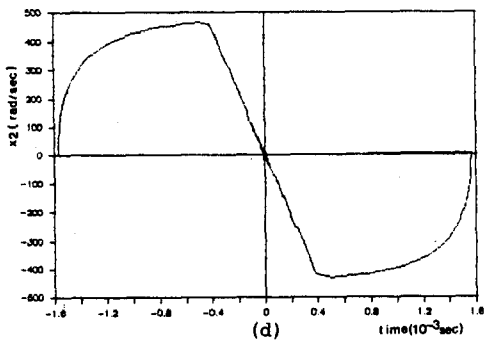
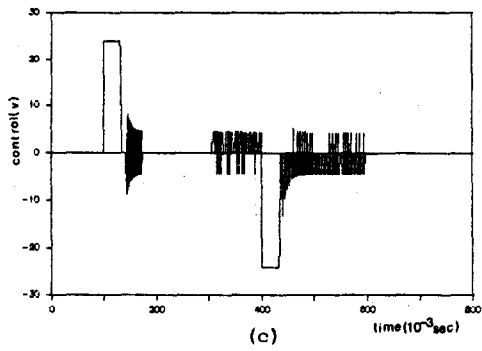


그림 4. 시간응답특성 (With Boundary)

- (a) 위치      (b) 속도
- (c) 제어입력      (d) 상태 궤적