# 상태변수에 시간지연이 있는 시스템의 강인한 제어기 설계

권욱현 이준화
서울대학교 제어계측공학과

# A State Space Approach to $H_\infty$ Control of State Delayed Systems

Wook Hyun Kwon, Joon Hwa Lee
Dept. of Control and Instrumentation Engr.
Seoul National University

**ABSTRACT**

In this paper, a robust controller of state delayed systems is presented. The suggested controller stabilizes the closed loop system independently of the delay time. It is shown that the controller reduces the effect of disturbances on the output of the given system to a pre-specified level. The proposed controller will stabilize the closed loop system in the presence of plant perturbations whose size are less than a pre-specified value.

## 1. 서론

본 논문에서는 다음과 같이 상태변수에 시간지연이 있는 시스템의 강인한 제어기 설계에 관하여 알아 본다.

$$Sd: \dot{x}(t) = Ax(t) + A_h x(t-h) + Bu(t) + Dw(t)$$

$$z(t) = Ex(t) \qquad (1.1)$$

여기서 h 는 양수이고, $x(t) \in R^n$ 는 상태변수, $u(t) \in R^m$ 는 제어입력 $w(t) \in R^p$ 는 외란, z(t) 는 출력이다. A, $A_h$, B, D, E 는 실변수 계수를 가지는 행렬이다. $x_t(\theta) := x(t+\theta)$ 라 정의하고 다음과 같이 초기조건을 정의하자.

$$x(\theta) = x_\phi(\theta),\ \theta \in [-h, 0] \qquad (1.2)$$

여기서 $x_\phi \in C([-h,0];R^n)$ 이다.

최근 수년간 폐루우프 시스템의 강인한 제어기 설계에관한 논문들이 많이 발표되었다. LQG/LTR 방법이나 $H_\infty$ 방법은 잘 알려진 강인한 제어기 설계방법이다. 특히 $H_\infty$ 방법은 플랜트에 불확실성이 있는 경우 좋은 결과를 보여주고 있다. Zames 가 처음 $H_\infty$ 문제를 제시 했을 때는 전달함수를 직접사용하여 해석함수론이나 연산자이론 등의 방법을 이용하여 문제를 풀었다. 그러나 다변수 시스템의 경우 상태변수 영역에서 제어기를 구하는 것이 유리한 경우가 있고, 상태변수 영역에서 $H_\infty$ 제어기 설계에 관한 많은 연구가 진행되고 있다.

강인한 제어기설계 방법들은 대부분 시간지연이 없는 시스템에 관한것이고, 시간지연이 있는 시스템의 강인 안정화에 관한 연구는 거의 되어있지 않다. 본 논문에서는 상태변수에 시간지연이 있는 시스템의 강인 안정화 제어기를 상태변수 영역에서 구하였고, 구해진 제어기는 상수궤환제어의 형태이다. 무한대시간 LQ 최적제어기는 다음과같이 적분의 형태를 포함하게된다.

$$u(t) = -K_0 x(t) - \int_{-h}^{0} K_1(\theta)x(t+\theta)d\theta$$

이때 $K_0 \in R^{m \times n}$ 이고 $K_1 \in L_2([-h,0],R^{m \times n})$ 이다. $K_0$와 $K_1(\theta)$ 가 만족해야할 식들은 Ross[15] 의 논문처럼 결합된 상미방, 편미방, Riccati 형태의 식들이다. 이러한 식들은 그 해를 구하기 어렵기 때문에 상수궤환제어를 사용한 안정화 제어기를 구하기 위한 연구가 있었다. 제어기를 실제로 구현하기 위해서는

적분형태의 제어기 보다는 상수궤환제어기가 더 바람직하다.

본논문에서는 먼저 강인 안정화 조건을 Nyquist 안정도 판별법으로 부터 구하고, 이조건을 만족하는 강인 안정화 제어기를 구하였다. 강인 안정화란 외란의 영향을 최소화하고, 모델에 오차가 있어도 안정화 시킬 수 있음을 말한다. 본논문에서는 특히 A, A 에 오차가 있는 경우의 강인 안정화 제어기를 구하였다. 이 제어기는 또한 외란에서 출력으로 가는 영향을 줄이게 된다.

## 2. 정의와 정리

본절에서는 앞으로 사용할 기호와 수식에 관한 정의를 한다. Hardy 공간 H ($1 \leqslant p \leqslant \infty$) 이란 폐 RHP 에서 해석적인 복소함수 G 의 Banach 공간을 말하며 다음을 만족하는 것들이다.

$$\|G\|_p := \sup_{\sigma>0} [1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\sigma+jw)|^p \, dw]^{1/p} < \infty \quad , \ p < \infty$$

$$\|G\|_\infty := \sup_{Re(s)>0} G(s) < \infty$$

이때 각 함수 G 의 norm 이 다음과 같이 주어짐은 잘알려진 사실이다

$$\|G\|_p = [1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |G(jw)|^p \, dw]^{1/p} \ , \ p < \infty$$

$$\|G\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_w |G(jw)|$$

시간지연 시스템의 개루우프 전달함수 G(s) 는 다음과 같은 coprime factorization 을 갖는다는 것이 알려져 있다.

$$G(s) = (sI - A - A_h e^{-sh})^{-1} B = Nr(s)Dr^{-1}(s) \quad (2.1)$$

위와같이 coprime factorization 이 존재하므로 다음의 일반화된 Nyquist 안정화 판별법을 시간지연 시스템에 적용할 수 있게된다.

**정리 2.1[5]** G(s), C(s)가 폐 RHP 에서 , 의 극점을 갖고 허수축에서 극점을 갖지 않는다고 할때, C(s) 가 G(s) 를 안정화 시킬 필요하고 충분한 조건은 det{(I+CG)(jw)}의 그래프가 원점을 + 만큼 감싸도는 것이다. w 는 에서 로 감소 시키면서 그래프를 그리고, 그래프는 원점을 지나지 않아야한다.

위와같은 안정도 판별법은 강인성의 해석에 필수적이다. 제어이론의 중심분야중 하나가 강인안정화 이며, Safonov 와 Athans [20] 는 이 분야에서 좋은 연구결과를 내놓았다. 좀더 일반적인 해석이 폐루우프 시스템의 특성치를 주파수영역에서 다룸으로서 나타났다. 본 논문에서는 시스템 행렬의 변화에 관한 강인 안정화 조건을 유도하였다. 다음의 정의들은 강인 안정화영역과 강인안정화 제어기를 규정한다. 정의 에서 G0(s) 는 플랜트의 기준모델이고 A0,Ah0 는 기준모델의 시스템 행렬이다. 이에 대응해서 오차가 포함된 모델을 G(s) 라하고 A,Ah 를 그러한 시스템의 시스템행렬이라 하자. G0(s) 는 허수축에서 극점을 갖지 않는다고 하자.

**정의 1** G 가 Ap(G0,r) 에 속한다는 것은 다음을 만족하는 경우이다.

i) G(s) 는 G0(s) 와 같은 수의 불안정 극점을 갖는다.

ii) 모든 w R 과 h>0 에 대해서 다음이 만족된다.

$$(A_0 - A) + ( A_{h0} - A_h)e^{-jwh} < r$$

**정의 2** Ap(G0,r) 이 강인안정화 된다는 것은 제어기 C(s) 가 존재해서 각 플랜트 G(s) Ap(G0,r) 가 안정화 됨을 말한다.

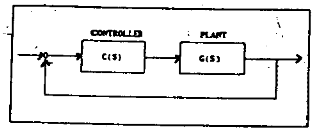

Fig. 1

<그림 1>

## 3. 강인안정화 조건

A어시스템을 설계할때 문제가되는 것들은 여러 원인애의한 모델 오차, 즉 플랜트에 내재한 비선형성, 단순화에의한 오차, 플랜트 변수의 변화에의한 오차 등이다. 이러한 불확실성은 실제 시스템설계에 있어서 불가피하므로 제어시스템은 이러한 문제들을 극복할 수 있도록 설계되어야한다. 즉 강인한 제어기를 설계해야 한다. 이절에서는 강인한 제어기가 만족해야할 조건을 수식적으로 유도한다.

정리 3.1: C(s) 가 G0(s) 를 안정화 시키고 ,G0(s) 는 허수축에서 극점을 갖지않음을 가정하자. C(s) 가 Ap(G0,r) 을 강인안정화 시킬 충분조건은 다음과

같다.

$$\|(jwI-A-A_he^{-jwh}+BC(jw))^{-1}\|\ r < 1 \qquad w \in R,\ h\geq 0 \qquad (3.1)$$

증명) G(s) 를 Ap(G0,r) 의 한 플랜트라하고 다음을 정의하자.

$$\Delta(jw) := (A-A_0) + (A_h-A_{h0})e^{-jwh}$$

그러면 (3.1)에 의해서

$$\|\Delta(jw)\| < r$$

이다. F(jw) 를 다음과 같이 정의 하면

$$F(jw)= (jwI-A_0-A_{h0}e^{-jwh}+BC(jw))^{-1}$$

다음의 식을 얻게된다.

$$\|\Delta(jw)\|\|(jwI-A-A_he^{-jwh})^{-1}\| < 1$$

따라서

$$\det\{ I + \Delta(jw)F(jw) \} \neq 0 \qquad (3.2)$$

이 성립하고, 또한 다음식들을 얻게된다.

$$\det\{(I+GC)(jw)\} = \det \{ I + (jwI-A-A_he^{-jwh})^{-1}BC(jw)\}$$

$$= \det\{(jwI-A-A_he^{-jwh})^{-1}\}\det\{jwI-A-A_he^{-jwh}+BC(jw)\}$$

$$= \det\{(I+G_0C)(jw)\}\ \frac{\det\{ I+\Delta(jw)F(jw)\}}{\det\{ I+ (jwI-A_0-A_{h0}e^{-jwh})^{-1}\Delta(jw) \}}$$

X 를 복소평면에서 원점을 제외한 공간이라 정의하고 복소평면의 위상을 사용하자. 함수 f 와 g 를 다음과 같이 정의 하자.

$$f(jw) = 1 \quad \text{all } w \quad R$$

$$g(jw) = \frac{\det\{ I+\Delta(jw)F(jw)\}}{\det\{ I+ (jwI-A_0-A_{h0}e^{-jwh})^{-1}\Delta(jw) \}}$$

(3.2) 식과 G0(s) 가 허수축에서 극점을 갖지않는다는 조건에서 다음의 함수 h 는 X 상에서 f 를 g 로 연속적으로 변화시킨다. 즉 f 와 g 는 X 상에서 homotopic 하다. 결국 f 와 g 는 0 에 관하여 같은 index 를 갖게 되고 f 의 index 가 0 이므로 g 의 index 도 0 이 된다.

$$\text{ind } g = 0 \quad . \qquad (3.3)$$

다음의 사실을 참고하자.

$$\det(I+G_0C) = \det\{(I+GC)g\} \qquad (3.4)$$

C(s) 가 G0(s) 를 안정화 시키므로 정리 2.1 에의해서 다음이 성립한다.

$$\text{ind det} \{ I + G_0C\} = - (\gamma_{G0} + \gamma_C) \qquad (3.5)$$

이때 $\gamma_{G0}, \gamma_C$ 는 G0, C 의 RHP 극점갯수 이다.
(3.3)-(3.5) 로부터 다음의 결과를 얻는다.

$$\text{ind det} \{ I + GC \} = - (\gamma_{G0} + \gamma_C) \qquad (3.6)$$

G 또한 G0 와 같은 갯수의 RHP 극점을 가지므로 정리2.1 에의해서 C(s) 는 G(s) 를 안정화 시킨다.

<증명끝>

증명에서 ind f 는 f(jw) 의 그래프가 원점을 감싸도는 수를 의미한다.

## 4. 시간지연의 크기에관계없는 안정화방법

상태변수에 시간지연이있는 시스템의 안정화는 LQ 의 해로서 가능하지만 해석적으로 그값을 구하기 어렵기 때문에 근사적으로 그값을 구하여 사용한다 [15]. 그러나 LQ 의 해로 주어지는 제어기는 적분의 형태를 포함하기 때문에 실제로 사용하기에는 상수 궤환제어 보다 불리하다. 또한 시간지연의 크기를 정확히 모르는 경우에는 시간 지연의 크기에 관계없이 안정화 시킬 필요가 있다. 본절에서는 상태변수에 시간지연이 있는 시스템이 시간지연의 크기에 관계없이 안정화 되는 조건과 성질을 알아 본다.

**보조정리 4.1** 개루우프 시스템 (1.1) 이 h 의 크기에 관계없이 항상 안정할 충분조건은 다음과 같다.

$$A'P+PA+PA_hQ^{-1}A_h'P+Q < 0 \qquad (4.1)$$

(증명) Lyapunov 함수를 다음과 같이 잡는다.

$$V(x_t) := x'(t)Px(t) + \int_{t-h}^{t} x'(s)Qx(s)\, ds \qquad (4.2)$$

미분은 다음과같다.

$$dV(x_t)/dt = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} -A'P-PA-Q & -PA_h \\ -A_h'P & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h) \end{bmatrix}$$

미분이 양의 값을 가질 충분조건은 다음과 같다.

$$A'P + PA + PA_hQ^{-1}A_h'P + Q < 0$$

<증명끝>

(4.1) 식은 시간지연의 크기 h 에관계없이 안정화 시키는 제어기를 구하는데 사용될 수 있다. (4.1)의 조건은 시스템 행렬 A 가 안정할 것을 요구하고 있다.

## 5. 강인안정화

본절에서는 상태변수에 시간지연이 있는 시스템의 강인안정화 제어기를 구한다. 구해진제어기는 외란으로부터 출력으로 가는 영향을 줄이며, 모델에 오차가 존재 하더라도 시스템을 안정화 시키게 된다. 적분의 형태가 제어기에 포함되는 것이 일반적이지만 본논문에서는 상수상태변수 궤환제어를 사용하였다. 실제적인면에서는 상수상태변수 궤환제어가 유리하다. 구해진 제어기의 안정도 는 보조정리 4.1 에의해 증명하고 강인성은 정리 3.1 로 보장하게된다.

e정화 시킬수있는 프랜트의 범위를 넓히기 위해서는 다음 전달함수 K(s) 의 H norm 크기를 작게할 필요가 있다. 또한 외란의 영향을 줄이기 위해서는 전달함수 T(s) 의 H norm 크기를 줄일 필요가있다. K(s) 는 D=I , E=I 인 T(s) 의 형태이므로 T(s) 의 H norm 크기를 작게하면 K(s) 도 마찬가지방법으로 작게할수 있다. 다음의 정리는 T(s) 의 H norm 크기를 r 보다 작게 하기위한 조건을 보여준다.

**정리 5.1 :** 양의 행렬 P,Q 가 존재해서 다음식 (5.3)을 만족하면 계루우프 시스템 (1.1) 은 안정하고 T(s) 의 H norm 크기는 r 보다 작게된다.

$$A'P + PA + PA_hQ^{-1}A_h'P + Q + E'E/r + PDD'P/r < 0 \qquad (5.3)$$

(증명) 보조정리 4.1 로부터 계루우프시스템 (1.1) 의 안정도는 자명하다. 양의 행렬 S 를 다음과 같이 정의하자.

$$S := -( A'P + PA + PA_hQ^{-1}A_h'P + Q + E'E/r + PDD'P/r )$$

그러면 다음식이 성립한다.

$$A'P + PA + PA_hQ^{-1}A_h'P + Q + E'E/r + PD'DP/r + S = 0$$

또한 다음식을 얻게된다.

$$(-jwI-A'-e^{jwh}A_h')P+P(jwI-A-e^{-jwh}A_h)-PA_hQ^{-1}A_h'P -Q-S-E'E/r-PDD'P/r = -e^{jwh}A_h'P -e^{-jwh}PA_h$$

X(jw) 를 다음과같이 정의 하자.

$$X(jw) := (jwI-A-e^{jwh}A_h)^{-1}$$

그러면 다음식을 얻게된다.

$$D'PX(jw)D + D'X'(-jw)D - D'X'(-jw)PDD'PX(jw)D/r - rI$$

$$= rI + D'X'(jw)\{ W + S + E'E/r \}X(jw)D \le 0$$

$$W := Q + PA_hQ^{-1}A_h'P - A_h'Pe^{jwh} - PAhe^{-jwh}$$

$$= [PA_he^{-jwh} - Q]Q^{-1}[A_h'Pe^{jwh} - Q] \ge 0$$

따라서 다음식이성립한다.

$$rI + D'X'(-jw)\{W + S\}X(jw)D > D'X'(-jw)E'EX(jw)D/r$$

T(jw)=EX(jw)D 이므로

$$\|T\|_\infty \le r . \qquad (5.4)$$

〈끝〉

$$u(t) = -1/2\ R^{-1}B'P \qquad (5.5)$$

$$A'P+PA+PA_hQ^{-1}A_h'P+Q+E'E/r+PD'DP/r-PBR^{-1}B'P+ = 0. \qquad (5.6)$$

(5.5)와 같은 상수 상태변수 궤환제어를 사용하는 경우에 우리는 (5.6) 의 변형된 Riccati 방정식을 풀어야 된다. (5.6)의 해를 발견하면 (5.5) 의 상수 상태변수 궤환제어로서 원하는 성능을 얻게된다. (5.6) 식은 D 및 Ah 가 B 의 선형변환으로 표시되기만하면 모든 r>0 에 대해 항상 그해가 존재하며, B 의 rank 가 시스템차수 와같을때도 항상 해가 존재한다. E=I, D=I 경우에 (5.6) 식이 풀리면 (5.5) 의 제어입력은 Ap(G0,r) 의 강인안정화 제어기가 됨을 알수 있다. 여기서 G0 는 (2.1) 식으로 주어진다. (5.6) 식에서 r 의 값은 작을 수 록 성능이 좋아지므로 r 값을 줄여가며 해를 구할필요가있다.

## 6. 결론

본논문에서는 상태변수에 시간지연이 있는 시스템의 강인안정화 제어기를 구하였다. 강인안정화 제어기를 구하기 위해서는 (5.6) 의 변형된 Riccati 방정식을 풀필요가 있고, 강인성의 척도는 r 이라는 값으로 명시된다. 이값은 외란이 출력에 미치는 영향을 나타내며, 또한 안정화 시킬수 있는 시스템들의 범위를 말해준다. 제안된 제어기는 시간지연의 크기 에관계없이 시스템을 안정화 시키게되며, 그형태가 상수 상태변수 궤환제어 이므로 실제로 구현하기쉽다.

[1] G.Zames, "Feedback and Optimal Sensitivity : Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-26, pp. 301-320, 1981.

[2] H. Kwakernaak and R. Sivan, Linear Optimal Control systems, Wiley, New York, 1972.

[3] I.R. Pertersen, "A Riccati Equation Approach to the Design of Stabilizing Controllers and Observers for a Class of Uncertain Linear Systems, " IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-30, pp. 904-907, 1985.

[4] I.R. Pertersen, "Disturbance Attenuation and H∞ Optimazation : A Design Method Based on the Algebraic Riccati Equation," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AV-32, pp.427-429, 1987.

[5] M. Vidiyasagar, Control System Synthesis : A Coprime Factorization Approach : MIT Press, 1985.

[6] B.A. Francis and G.Zames, "On H-Optimal Sensitivity Theory for SISO Feedback Systems, " IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-29, Jan. 1984.

[7] G. Zames and B.A. Francis, "Feedback, Minimax Sensitivity and Optimal Robustness." IEEE Trans. Automat Contr., Vol. AC-28, p585, May 1983.

[8] B.A.Francis, J.W. Helton, and G. Zames, "H∞ Optimal Feedback Controllers for Linear Multivariable Systems," IEEE Trans. Autom. Contr. Vol. AC-29, Oct. 1984.

[9] B.C.Chang and J.B. Pearson, "Optimal Disturbance Reduction in Linear Multivariable Systems," IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. AC-29, Oct.

[10] H. Kimura, "Directional Interpolation Approach to H∞ Optimization and Robust Stabilization," IEEE Trans. Autom. Contr., Vol. AC-29, Oct. 1984.

[11] W.H.Kwon and A.E.Pearson, "Feedback Stabilization of Linear Systems with Delayed Control," IEEE Trans. Autom. Contr., Vol. AC-25, Apr. 1980.

[12] A.Feliachi and A.Thowsen, "Memoryless Stabilization of Linear Delay-Differential Systems," IEEE Trans. Autom. Contr., Vol. AC-26, Apr. 1981.

[13] W.H.Kwon and A.E.Pearson, "A Note on Feedback Stabilization of a Differential - Difference systems," IEEE Trans. Autom. Contr., p468, June 1977.

[14] T.Mori., E.Noldus, and M. Kuwahara, "A Way to Stabilize Linear Systems with Delayed State," Automatica, Vol. 19, No.5, pp. 571-573, 1983.

[15] D.W. Ross and Flugge-lotz, "An Optimal Control Problem For Systems with Differential - Difference Equation Dynamics," SIAM J. Contr. Vol. 7, No.4, Nov. 1969.

[16] M.J.Chen and C.A.Desoer, "Necessray and suffiient condition for robust stability of linear distributed feedback systems," Int. J. Contr., vol. 35, no.2, 255-267, 1982.