최적제어설계에 있어서의 하중행렬의 선택과 해석

황 창 선*, 김 정 택°
(부산대 전기과 교수*, 산업과학기술연구소°)

THE CHOOSING AND ANALYSIS OF WEIGHTING MATRIX IN OPTIMAL CONTROL DESIGN.

Chang-Sun Hwang*, Chung-Tek Kim°
(Pusan Univ.*, RIST°)

Abstract - Optimizing transient response for both tracking reference signals and disturbance rejection is determined by the poles and zeros of the transfer function. Thus, optimal pole assignment and how should weighting matrix for the performance index be chosen is very important to achieve optimum transient response. This paper focus its attention on the choosing and analysis of weighting matrix for optimum pole assignment. Optimum pole assignment is defined for linear time-invariant continuous systems.

1. 서론

최근 공업프로세스에는 현대제어이론이 적용되고 있으나 현대제어이론은 고전적제어이론에 비해 대체로 어려운 수학을 사용하고 있으므로 현장엔지니어가 이해하기는 쉽지 않으며 현장적용에는 더 큰 어려움이 있다. 그 외에도 다음과 같은 문제점이 있다.

(1) 가제어성(controllability)은 임의의 극점선택(pole assignment)을 위한 필요충분조건이지만 어디에 극점을 두어야 할까?

(2) 시스템이 가제어성을 가지면

PI(performance index) =

$$\int_0^\infty (x'Qx + u'Ru)dt$$

로 구성되는 평가함수에 대해서 최적 조절기(optimal regulator)로 인하여 안정화된다. 그러나 하중행렬 Q와 R은 어떻게 선택해야 할 까? 우선 본 고찰에서는 Yasukiko Miguchi, Atsuo Kawamura and Richard Hoft의 "OPTIMAL POLE ASSIGNMENT FOR POWER ELECTRONIC SYSTEMS"에서 정의로 도입한 최적극점선택(optimum pole assignment)을 채택하였다. 모든 범위와 조건에서 최적인 응답을 나타내는 최적극점선택(optimal pole assignment)은 존재하지 않는다고 볼 수 있으므로 설계자가 선택할 수 있는 사양을 정의하여 그 정의에 맞는 최적극점선택을 시도 해 나갈 것이다.

행렬계산에 있어서의 뒤엉킴에 의한 영향을 고려하여 우선 주어진 시스템은 2차까지로 한정하여 고찰을 시도하였다.

2. 수식 구성 및 고찰

일반적인 전달함수는 상태공간으로 변환이 가능하다. 즉,

$$G(s)=\frac{a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_1 s+a_o}{b_n s^n+\dots+b_1 s+b_o}$$

은 다음과 같이 변환된다.

$$\mathbf{X} = \mathbf{AX} + \mathbf{Bu}$$
$$y = \mathbf{CX}$$

여기서,

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{-b_0}{b_n} & \frac{-b_1}{b_n} & \dots & \frac{-b_{n-1}}{b_n} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \frac{1}{bn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^T=\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$$

최적제어를 위한 입력 u가
$u(t) = -\mathbf{GX}(t)$ 이고,
평가함수(cost function)가

$$V=\int_{t_0}^{t} (X'QX + u'Ru)dt$$

로 표현되면 RICCATI 방정식은

$$-\mathbf{M} = \mathbf{M A} + \mathbf{A'M} - \mathbf{M B R^{-1} B' M} + \mathbf{Q} \tag{1}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B'M} \tag{2}$$

과 같이 표시된다.
이때 하중행렬 Q와 R을

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = 1$$

(Q와 R은 symmatric semi-definite 행렬)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix}$$

두면,

$$\mathbf{G} = [\ \beta m_2 \quad \beta m_3\ ]$$

$$\mathbf{M\ A} = \begin{bmatrix} am_1+cm_2 & bm_1+dm_2 \\ am_2+cm_3 & bm_2+dm_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A\ M} = (\mathbf{M\ A})' = \begin{bmatrix} am_1+cm_2 & am_2+cm_3 \\ bm_1+dm_1 & bm_2+dm_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M\ B\ R}^{-1}\mathbf{B'\ M} = \begin{bmatrix} \beta^2 m_2^2 & \beta^2 m_2 m_3 \\ \beta^2 m_2\ m_3 & \beta^2 m_3^2 \end{bmatrix}$$

로 표현된다.

a=0, b=1로 두고 (1)을 다시 쓰면,

$$0 = 2cm_2 - \beta^2 m_2^2 + q_3 \tag{3}$$

$$0 = m_1 + dm_2 + cm_3 - \beta^2 m_2 m_3 + q_2 \tag{4}$$

$$0 = 2(m_2 + dm_3) \quad \beta^2 m_3^2 + q_3 \tag{5}$$

와 같이 된다.

식(3)과 식(4)는

$$m_2 = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + q_1\beta^2}}{\beta^2} \tag{6}$$

$$m_3 = \frac{d \pm \sqrt{d^2+(2m_2+q_3)\beta^2}}{2} \tag{7}$$

로 정리된다.

따라서 식(2)는

$$\mathbf{G} = [\beta\ m_2 \quad \beta\ m_3] = [\ g_1 \quad g_2\ ]$$

로 되며, 여기서

$$g_1 = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + q_1\beta^2}}{\beta} \tag{8}$$

$$g_2 = \frac{d \pm \sqrt{d^2+(2m_2+q_3)\beta^2}}{\beta} \tag{9}$$

이다.

정의 : G(s)가 q개의 영점과 n개의 극점을 가진다고 가정하자. 그리고 qr개의 영점은 우반면에, ql = q − qr 개의 영점은 좌반면에 놓여 있고 허수축상에는 영점이 없는 것으로 한다.

상태궤환에 의한 주어진 시스템의 최적극점배치(optimal pole assignment)는 다음과 같이 정의된다.

a. ql개의 극점은 좌반면에 놓여 있는 ql개의 영점을 상쇄하도록 둔다.
b. qr개의 극점은 우반면에 놓여있는 qr개의 영점의 mirror images가 되도록 둔다.
c. n-q개의 극점은 BUTTERWORTH형 극점배치로 한다. 즉,

$$s = \omega \cdot \exp[\,j\pi(n-q+1+2\gamma)/2/(n-q)\,]$$

여기서,

$\gamma = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n-q-1$

ω 는 positive real수

2-1. 주어진 시스템에 영점이 없을 때

$$\mathbf{Ac} = \mathbf{A} - \mathbf{BG} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c-\beta m_2 & d-\beta m_3 \end{bmatrix}$$

특성방정식은

$$s^2 + (\beta^2 m_3 - d)s + (\beta^2 m_2 - c) = 0$$

따라서 최적극점배치는 BUTTERWORTH형태에 따라 다음과 같은 하중행렬이 구해진다.

$$q_1 = \frac{1-c^2}{\beta^2} \tag{10}$$

$$q_3 = \frac{2-d^2-2c+2/c\sqrt{c^4+\beta^4}}{\beta^2} \tag{11}$$

식(11)의 q_3는 positive definite이므로,

$$d^2 = \leq 2-2c+2/c\sqrt{c^4+\beta^4} \tag{12}$$

을 만족하여야 한다.

그림1.은 식(12)를 $c(-10^{-2} \leq c \leq -10^{1.2})$와 $\beta(10^{-2} \leq \beta \leq 10^{0})$의 변화에 따른 d^2의 관계를 나타낸 것이다.

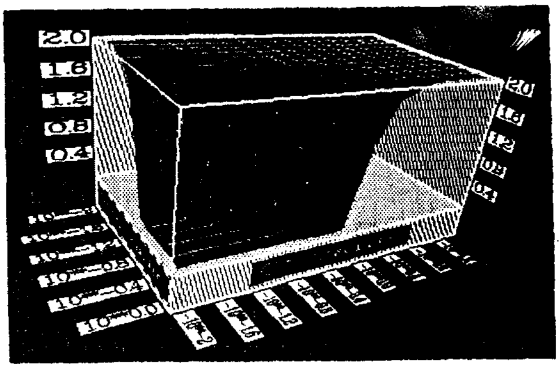

그림1 β와 c의 변화에 따른 d의 궤적
Fig.1 d vs β and c curves.

2-2. 좌반면에 영점이 있을 때

출력방정식은

$$y = [\ a_0 \quad a_1\ ][\ x_1 \quad x_2\ ]^T$$

로 표시되고, 특성방정식은

$$s^2 + (\beta^2 m_3 - d)s + (\beta^2 m_2 - c) = 0$$

따라서 최적극점배치는 BUTTERWORTH형태에 따라

다음과 같은 하중행렬이 구해진다.

$$q_1 = \frac{(a_0/a_1)^2 - c^2}{\beta^2} \qquad (13)$$

$$q_3 = \frac{(1+a_0/a_1)^2 - d^2 - 2c + 2/c\sqrt{c^4 + \beta^4}}{\beta^2} \qquad (14)$$

2-3. 우반면에 영점이 있을 때

출력방정식은

$$y = [\,a_0 \quad a_1\,][\,x_1 \quad x_2\,]^T$$

로 표시되고, 특성방정식은

$$s^2 + (\beta^2 m_3 - d)s + (\beta^2 m_2 - c) = 0$$

따라서 최적극점배치는 BUTTERWORTH형태에 따라 다음과 같은 하중행렬이 구해진다.

$$q_1 = \frac{(a_0/a_1)^2 - c^2}{\beta^2} \qquad (15)$$

$$q_3 = \frac{(1-a_0/a_1)^2 - d^2 - 2c + 2/c\sqrt{c^4 + \beta^4}}{\beta^2} \qquad (16)$$

3. 결론

주어진 2차 시스템에 영점이 없을 경우에는 하중행렬은

$$q_1 = \frac{1 - c^2}{\beta^2}$$

$$q_3 = \frac{2 - d^2 - 2c + 2/c\sqrt{c^4 + \beta^4}}{\beta^2}$$

로 계산되고, 영점이 있을 경우에는

$$q_1 = \frac{(a_0/a_1)^2 - c^2}{\beta^2} \qquad (17)$$

$$q_3 = \frac{(1+|a_0/a_1|)^2 - d^2 - 2c + 2/c\sqrt{c^4 + \beta^4}}{\beta^2} \qquad (18)$$

로 계산된다. 결과식에서 알 수 있듯이
$c^2 \le 1$ 또는 $c^2 \le (a_0/a_1)^2$ 이어야 하며,
$d^2 \le 2$ 또는 $d^2 \le 1 + |a_0/a_1|^2$ 이어야 한다.

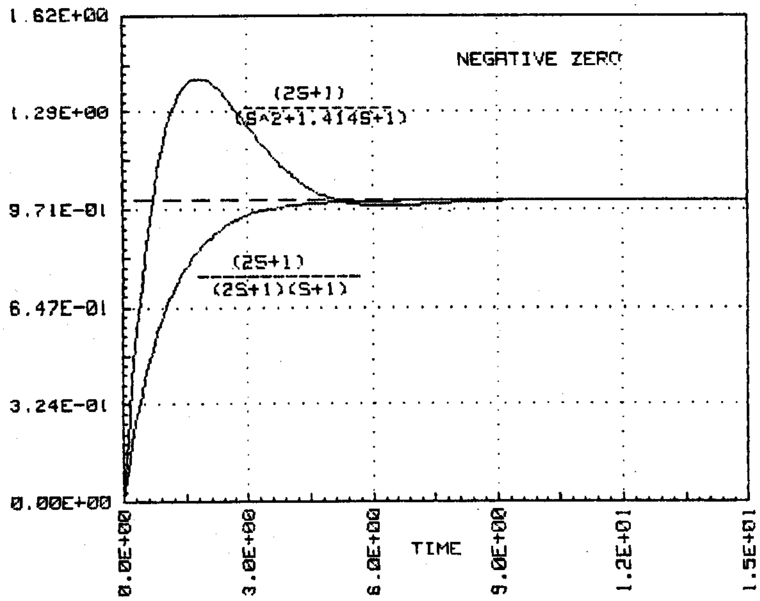

그림2 시스템의 계단응답특성
Fig.2 Unit step response of system.

만일 주어진 시스템이 이범위를 벗어나면, β의 값을 감소시켜 시스템모델을 재구성함으로서 만족시킬 수 있으며 positive definite인 Q행렬을 구성할 수 있다.

4. 시뮬레이션

한개의 영점과 두개의 극점을 가진 다음과 같은 시스템이 주어지면,

$$G(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 0.5s + 1}$$

최적응답을 나타내는 하중행렬은 식(17),(18)에서 $q_1=0$, $q_3=2.688$ 로 구해지며 단위계단입력에서의 응답특성은 그림2.와 같다.

그림2.는 영점을 고려하지 않은 채 극점을 BUTT-ERWORTH형에 가져갔을 때와, 고려하었을 때를 비교하여 그린 것이다.

5. 향후 방향

본 고찰의 실제 적용을 위해서는 관측기의 설계와 새로운 정의에의한 다각적인 조사뿐아니라 고차 시스템에의 확장해석과 디지탈영역에의 적용까지도 필요하므로 이에 연구방향을 잡는다.

참 고 문 헌

1) Yasuhiko Miguchi, Atsuo Kawamura and Richard Hoft, "Optimal pole assignment for electric systems", IEEE Trans. pp. 74-88, 1985.
2) Bernard Friedland, "CONTROL SYSTEM DESIGN - An Introduction to State-Space Methods-", pp. 337-377, 1986.
3) W. M. Wonham, "On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems," IEEE Trans. AC-12, pp. 660-665, 1967.
4) E. J. Davison, "The Robust Control of a Servomechanism Problem for Linear Time-Invarant Multivariable Systems," IEEE Trans. AC-21, pp. 25-34, 1976.
5) B. A. Francis, W. M. Wonham, "The Internal Model Principle of Control Theory," Automatica, Vol. 12, pp. 457-465, 1976.