

유한요소법에 의한 선형 유도전동기의 등가회로 정수 산정에 관한 연구

임 달 호 최 창 규 김 규 탁 이 현 수\*

한 양 대 학 교

A Study on the Calculation of S.L.I.M. Equivalent Circuit Parameter by Finite Element Method

Dal-Ho Im , Chang-Gyu Choi , Gyu-Tak Kim , Heon-Soo Lee

Dept. of Electrical Eng. Hanyang University

ABSTRACT

In this paper, the governing equation of each analyzed region of Single-sided Linear Induction Motor was induced from Maxwell's electromagnetic equation. And the linear induction motor was analyzed by finite element method. For calculating inductance, energy perturbation method was applied.

1. 서 론

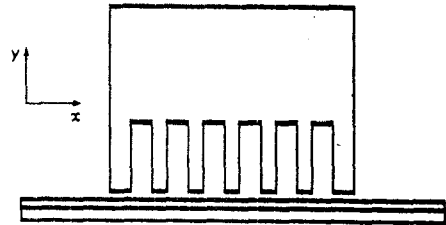
선형 전동기는 전기 에너지를 직접 직선적인 역학적 에너지로 변환하여 직선추력을 발생하는 전동기로서, 레이저 프린터를 비롯한 정밀 P.A, O.A 기기 및 자동반송장치 등과 같은 저속용으로 널리 이용되고 있으며, 앞으로 그 응용 범위는 초고속 자기 부상 열차 등의 고속에까지도 확대될 것으로 기대된다.

일반적으로 선형 유도 전동기의 특성을 해석하기 위해서는 고전적인 등가 회로법을 이용하기보다 그 구조적 특징 때문에 나타나는 End effect, 2차 도체판의 영향 등을 고려할 수 있는 전자장 이론을 적용하여 해석하는 경우가 대부분이다. 이러한 전자장 이론에 의한 특성 해석은 계의 지배방정식에 대한 수학적 모델을 설정하고 구조적, 물리적 성질에 따른 경계조건을 설정하여 해를 구하게 된다. 편미분방정식으로 주어진 계의 지배방정식을 풀기 위한 수치해법으로는 유한요소법이 재료의 비선형성이나 불균일 등의 처리가 용이하여 현재 전기기기의 특성 해석에 널리 이용되고 있으나, slip 변화에 따라 제반 특성을 재계산하여야 하며, 제어계에 도입하는 경우에는 실시간 제어문제로 인하여 전자장 이론의 적용이 곤란하므로 등가회로를 주로 이용하고 있다. 따라서, 본 연구에서는 각 해석 영역에서의 지배방정식을 Maxwell의 전자방정식으로 부터 도출하여 이 편미분 방정식에 유한요소법을 적용, 해석하고, 에너지 섭동법을 이용하여 인덕턴스를 도출하므로서 제어계 등과 같이 속속성을 요구하는 경우에도 신속히 대처할 수 있도록 하였다.

2. 유한 요소법 적용

그림 1.과 같은 해석모델을 2차원으로 해석하기 위하여 다음과 같은 가정을 두었다.

- 1) 입력 전류는 2방향 성분만 존재하며, 2방향의 변화는 무시한다.
- 2) 2차 도체판의 표피효과는 무시하며, 2차 축은 X축 방향으로만 이동한다.
- 3) 자계는 준정상상태로 변위전류는 무시한다.
- 4) 각 해석영역의 재료는 등방성이며 균일하다.
- 5) 각 요소내에서의 부자율은 일정하다.
- 6) 2차 축은 진행 방향으로 무한히 연장되어 있다.

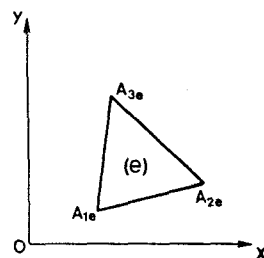


< 그림 1. > 해석 모델

이상과 같은 가정하에서 Maxwell의 전자방정식을 적용하여 지배 방정식을 유도하면, 식 (1)과 같은 Vector Potential에 대한 2계 편미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \sigma \left( \frac{\partial A_x}{\partial t} + v_z \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) = -J_x \quad (1)$$

여기서,  $A_x$  및  $J_x$  는 Vector Potential (Wh/m) 및 입력 전류밀도 ( $A/m^2$ )의 2방향 성분이며,  $\nu$ 는 자기 저항률이다.



< 그림 2. > 삼각 요소

식 (1)에 유한요소법을 적용하기 위하여 해석영역을 그림 2.와 같이 3각 요소로 분할하고, 각 요소 (e) 내부에서 potential  $A^{(e)}$ 가 선형적으로 변화한다고 가정하면 한 요소 (e)내의 임의의 점 P에 대한  $A^{(e)}(x,y)$ 는 다음과 같이 근사화된다.

$$A_p^{(e)}(x,y) = \sum_{i=1}^3 N_{ie}(x,y) A_{ie} \quad (2)$$

여기서,  $N_k(x,y)$ 는 보간함수 또는 형상함수로 다음과 같이 주어진다.

$$N_k = \frac{1}{2\Delta^m} (a_i + b_i x + c_i y) \quad (3)$$

여기서  $\Delta^m$ 는 해당 요소 (e)의 면적이고,  $a_i, b_i, c_i$  등은  $a_i = x_j y_k - x_k y_j, b_i = y_j - y_k, c_i = x_k - x_j$ 로 표현되며,  $i, j, k$ 는 순관수이다. 식 (1)의 지배방정식으로 부터 해석 영역의 에너지 범함수를 유도하면 다음과 같다.

$$\chi = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Delta^m} \left[ \frac{1}{2} \nu \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \nu \left( \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\sigma}{2} \left( j \omega A_x + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) A_x - J_s A_x \quad dx \quad dy \quad (4)$$

(  $N_e$  : 총 요소수 )

식 (1)의 2개 편미분방정식의 해를 구하는 것은 식 (4)의 에너지 범함수가 최소화되는 걸림치  $\{A_p\}$ 를 구하는 것과 동가이므로

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{A_p\}} = \sum_{e=1}^{N_e} \frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial \{A_p\}} = 0 \quad (5)$$

을 만족하는  $\{A_p\}$ 가 식 (1)의 해가 된다. 이를 행렬로 나타내면 식 (6)과 같은 계 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{A_p\}} = \left\{ \begin{bmatrix} SR \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} SI \end{bmatrix} \right\} \{A_p\} - \{F\} = 0 \quad (6)$$

여기서,

$$\begin{bmatrix} SR \end{bmatrix} = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Delta^m} \nu \left\{ \frac{\partial N_{ie}}{\partial x} \frac{\partial N_{je}}{\partial x} + \frac{\partial N_{ie}}{\partial y} \frac{\partial N_{je}}{\partial y} \right\} dx \quad dy + \int_{\Delta^m} v_x \sigma \frac{\partial N_{ie}}{\partial x} dx \quad dy$$

$$\begin{bmatrix} SI \end{bmatrix} = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Delta^m} \sigma \omega N_{ie} dx \quad dy$$

$$\{F\} = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Delta^m} J_s N_{ie} dx \quad dy$$

### 3. 인덕턴스 계산

유한요소법을 이용하여 전기 기기의 인덕턴스를 계산하는 방법으로는 최고 자속법과 에너지 섭동법이 널리 이용되고 있다. 본 연구에서는 에너지 섭동법에 의하여 인덕턴스를 산출하였다.  $n$ 개의 코일로 구성된 시스템의 저장에너지를 고려해 보면,  $j$ 번째 코일의 전류를  $i_j$ , 이때의 최고 자속을  $\lambda_j$ 라 할 때  $j$ 번째 코일의 단자전압  $V_j$ 는

$$V_j = R_j i_j + \frac{d\lambda_j}{dt} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

로 쓸 수 있다.

식 (7)을 chain rule에 의하여 전개하면,

$$V_j = R_j i_j + \frac{\partial \lambda_j}{\partial i_1} \frac{di_1}{dt} + \frac{\partial \lambda_j}{\partial i_2} \frac{di_2}{dt} + \dots + \frac{\partial \lambda_j}{\partial i_n} \frac{di_n}{dt} \quad (8)$$

가 된다. 여기서,  $\partial \lambda_j / \partial i_k$ 는  $i_k$ 전류에 의한 최고 자속의 편미분으로 미분 인덕턴스  $L_{jk}$ 가 됨을 알 수 있다.

$$L_{jk} = \frac{\partial \lambda_j}{\partial i_k} \quad (9)$$

한편  $j$ 번째 코일에 저장된 순시 전력  $W_j$ 는

$$W_j = \sum_{k=1}^n \int_{i_k(0)}^{i_k(t)} L_{jk} i_j \quad di_k \quad (10)$$

로 주어진다. 따라서, 시스템 전체에 저장된 총 순시 에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$W = \sum_{j=1}^n W_j = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n \int_{i_k(0)}^{i_k(t)} L_{jk} i_j \quad di_k \right) \quad (11)$$

전류의 증분  $\Delta i_j$ 가 매우 작을 경우, 식 (9)의 미분 인덕턴스는 그 변화가 매우 작아 일정하다고 할 수 있으므로, 계 전체에 저축되는 총 자기에너지  $W$ 의 증분  $\Delta W$ 는

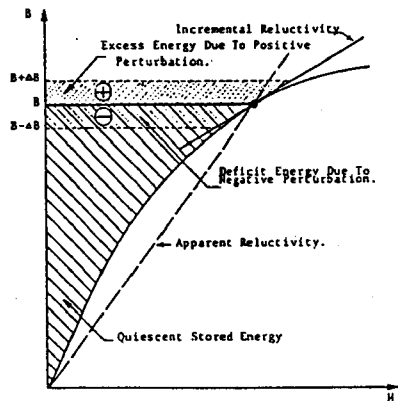
$$\Delta W = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n L_{jk} \int_{i_k}^{i_k + \Delta i_k} (i_j) \quad di_k \quad (12)$$

로 나타낼 수 있다.

식 (12)를  $j = k$ 일 때와  $j \neq k$ 일 때로 분류하여 표현하면

$$\Delta W = \sum_{j=1}^n L_{jj} \int_{i_j}^{i_j + \Delta i_j} (i_j) \quad di_j + \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{k=1}^n L_{jk} \int_{i_k}^{i_k + \Delta i_k} (i_j) \quad di_k \right] \quad (k \neq j) \quad (13)$$

이다. 식 (13)의 수치적분을 수행하기 위해 trapezoidal rule을 적용하면



< 그림 3. > B - H 곡선

$$\Delta W = \sum_{j=1}^n \left( i_j \Delta i_j + \frac{\Delta i_j^2}{2} \right) L_{jj} + \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq j)}}^n \left( i_j + \frac{\Delta i_j}{2} \right) \Delta i_k L_{jk} \right] \quad (14)$$

로 표현할 수 있다. 따라서 각 코일의 전류가 각각 미소분 ( $\Delta i_j$ )만큼 변화한 경우, 전체 시스템의 총 에너지는

$$\hat{W} = W + \Delta W \quad (15)$$

이다. 인덕턴스  $L_{jk}$ 는 미소전류 변화에 대해 일정하다고 가정하였으므로, 총 에너지를  $j$  번째 코일에 대한 전류의 증분  $\Delta i_j$  로 편미분하면

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial (\Delta i_j)} = \frac{\partial W}{\partial (\Delta i_j)} + \frac{\partial (\Delta W)}{\partial (\Delta i_j)} = \frac{\partial (\Delta W)}{\partial (\Delta i_j)} \quad (16)$$

로 쓸 수 있다. 식 (14)와 식 (16)으로부터

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial (\Delta i_j)} = (i_j + \Delta i_j) L_{jj} + \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq j)}}^n \Delta i_k \frac{L_{jk} + L_{kj}}{2} \quad (17)$$

이며, 식 (17)을  $\Delta i_j$ 에 대하여 편미분하면, 자기 인덕턴스

$$\frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial (\Delta i_j)^2} = L_{jj} \quad (18)$$

가 되고, 식 (17)을  $\Delta i_k$ 에 대하여 편미분하면, 다음과 같이 상호 인덕턴스를 구할 수 있다.

$$\frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial (\Delta i_j) \partial (\Delta i_k)} = \frac{L_{jk} + L_{kj}}{2} = L_{kj} \quad (19)$$

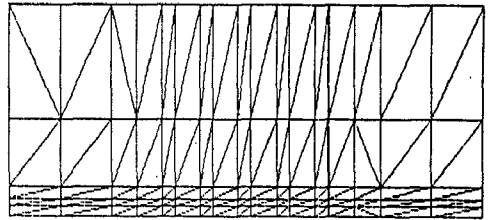
#### 4. 해석 결과 및 검토

그림 1과 같은 편축식 선형 유도 전동기의 등가 회로정수를 유한요소법을 적용하여 산정하기 위해 그림 4.와 같이 요소분할하였다. 선형 유도 전동기는 일반 회전기에서는 발생하지 않는 단부효과가 존재하므로, 이를 고려하기 위하여 입구단과 출구단 외곽 부분도 해석영역으로 설정하였으며, 경계 조건으로는 외부경계에 Dirichlet 경계 조건을 주었다. 이때의 총 요소수는 170개, 절점수는 108개이다. 그림 5.는 slip=0.2, wt=0인 경우의 등potential도이다.

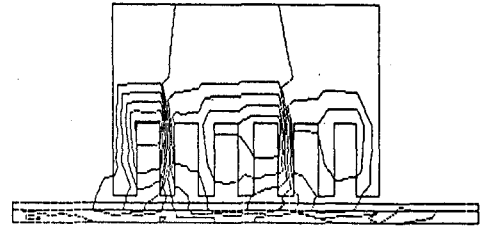
표 1.은 공극 변화에 따른 1차측 누설 리액턴스, 상호 리액턴스, 2차측 누설 리액턴스를 나타낸 것이다. 표 2.는 요소수 170개로 분할한 경우와 355개로 분할한 경우의 각 회로정수를 비교한 것이다. 유한요소법으로 기기의 특성을 해석하는 경우 컴퓨터의 계산용량 등에 의해 요소분할이 제한을 받게 되므로, 어떤 한 요소의 자속밀도가 매우 커지는 경우가 발생하여 리액턴스 값에 큰 영향을 끼치게 된다.

공극	X(1)	X(2)	X(m)
3 mm	0.03686	0.01398	0.22040
5 mm	0.04525	0.01422	0.17218
10 mm	0.05164	0.01473	0.15439

< 표 1. > 공극변화에 따른 reactance 비교



< 그림 4. > 요소 분할도 (총요소수:170, 총절점수:108)



< 그림 5. > 등potential도

#### 5. 결론

본 연구에서는 유한요소법을 이용하여 선형 유도 전동기의 리액턴스를 계산하였다. 요소분할의 정밀성, B-H 특성 곡선의 근사화, 수렴 오차의 설정, F.E.M.의 정도 등이 리액턴스 산정에 큰 영향을 미치므로 정확한 B-H 특성곡선의 근사화가 이루어지면 정도 높은 산정이 가능하리라 기대된다.

#### 참고 문헌

- 1) 沢孝一郎, 太田和樹, 清田 信行, 宮地 邦夫, "FEMによるインダクタンス算定についての検討", RM-85-68
- 2) "有限要素法によるリニアモータ用機器の磁界解析", 成田 隆, 菊田 茂二, 高門 祐三, UDC 519.34, Vol. 27, No.3
- 3) K.Sawa, H.Yamamoto, K.Miyachi, "An Analysis of Armature Circuit Inductance of D.C.Machines by F.E.M." IEE Proc., Vol.132, No.6, pp.307-314, 1985
- 4) T.W.Nehl, F.A.Fouad, N.A.Demerdash, "Determination of Saturated Values of Rotating Machinery Incremental and Apparent Inductances by An Energy Perturbation Method" IEEE Vol.PAS-101, No.12, 1982
- 5) I.Boldea, S.A.Nasar, "A Complete Equivalent Circuit of a Linear Induction Motor with Sheet Secondary" IEEE, Vol.MAG-24, No.1,1988
- 6) 임달호, " 전기계의 유한요소법 ", 동명사

요소수	X(1)	X(2)	X(m)
170	0.03686	0.01398	0.22040
355	0.03324	0.01130	0.20485

< 표 2. > 요소분할정도에 따른 reactance 비교