

1988년도 가을

한국전산구조공학회 학술발표회 논문집

반무한영역 문제에 대한
유한요소와 경계요소의 조합

A Coupling of Finite Elements and Boundary Elements for Half Plane Problems

○김'문'겸 *
Kim Moon Kyum

임'윤'목 **
Lim Yun Mook

ABSTRACT

A procedure which may be useful in dealing with problems of half plane is considered. Boundary elements are combined with finite elements to facilitate their merits. Boundary elements for semi-infinite region are composed using the Melan's solution for half plane. Finite elements are used to model irregularity or the nonhomogeneity of materials, which is usual in underground structures. In order to verify the procedure, a shallow tunnel under internal pressure is analysed using the finite element method, the boundary element method, and the combined method. It is shown that the developed procedure is accurate enough compared with other method.

1. 서론

지하구조물, 도로포장, 수로의 해석, 재료의 파괴해석 등 공학의 여러 분야에서 반무한영역의 문제를 자주 접하게 된다. 특히 산업의 발달과 함께 지하구조물 및 터널, 광산의 지하강도등의 건설이 증가됨에 따라 이에 대한 정확한 해석이 요구되고 있다.

이러한 대상에 대한 이론적인 해석, 실험 해석 등은 이론 해의 한정성과 실험여건의 불충분 등으로 상당히 제약되어 있으므로 현재는 전산기의 보급과 함께 수치해석 방법이 다각적으로 시도되고 있다. 수치모형에 의한 해석방법으로는 유한요소 해석과 경계요소 해석 방법을 들 수 있다.

일반적으로 유한요소와 경계요소 해석을 비교하면, 유한요소 해석은 수학적 이론이 간단하고, 재료의 성질 및 구조 거동에 대한 다양한 이론을 고려하기에 용이하며, 강성행렬이 일반적으로 대칭이고 대각행렬을 중심으로 부분적으로 분포하므로 해를 구하는데 이점이 있다. 반면에 경계요소 해석은 경계만을 요소로 분할하므로 입력자료 및 계산 양이 적고, 경계조건이 무한 및 반무한인 경우에 적용하기 용이하다.

따라서 본 연구에서는 각 방법의 장단점을 보완하여 형상이 복잡하고 재료의 성질에 변화가 있는 부분, 응력이 집중되는 부분은 유한요소로, 등방성 단일물성의 반무한 영역은 경계요소로 구성하고 두 부분을 조합하여, 보다 효율적인 구조해석을 시도하였다.

경계요소법은 Rizzo¹ (1967) 에 의해 처음 탄성학적 문제에 적용된 이래, Lachat² (1975) 와 Danerjee³ (1976) 등에 의해 직접과 간접경계요소법으로 각각 발전되어 많은 연구가 진행되고 있다. 최근에는 유한요소법과 경계요소법의 조합에 의한 해석방법이 시도되고 있다. 유한요소와 경계요소의 조합에 관한 논의는 Zienkiewicz⁴ (1977) 에 의해 거론된 이후 Kelly⁵ (1979), Brebbia, Gergiou⁶ (1979), Mustoe⁷ (1980) 에 의하여 'interior 문제' 에 대하여 적용되었다. Beer and Meek⁸ (1981) 는 'exterior 문제' 에 대하여 조합방법을 적용한 바 있다.

경계요소법에 의한 반무한영역의 고려는 Telles 와 Brebbia⁹ (1981) 및 Wang 과 Liu¹⁰ (1986) 등에 의하여 시도된 바 있다. Brebbia 는 무한영역의 기본해와 반무한 영역에 대한 보충항을 고려함으로써 전체 기본해를 구성하여 경계요소해석을 실시하였다. 본 연구에서는 Brebbia 의 접근방법을 이용하여 반무한 영역을 경계요소법에 의하여 고려하고, 이를 유한요소법과 조합하여 반무한영역에 존재하는 구조물을 효율적으로 해석하고자 한다.

2. 경계요소법

기본방정식

그림 1 에서와 같이 영역 Ω 와 경계 Γ 를 갖는 정적 하중계에 대하여, 내부 응력벡터 σ_{ij} 와 물체력 f_j 와의 평형조건은

$$\sigma_{i,j,j} + f_i = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

이 성립한다. 영역의 경계조건은 전체 경계 Γ 를 기하학적 경계 Γ_1 과 역학적 경계 Γ_2 로 분할하였을 때, 식 (2) 및 (3) 과 같이 된다.

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (2)$$

$$t_i = \sigma_{j,i} n_j = \bar{t}_i \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (3)$$

여기서, u_i 는 변위, \bar{u}_i 는 기지의 변위이며, t_i 는 표면력, n_j 는 외부로 향한 수직벡터의 방향여편, \bar{t}_i 는 기지의 표면력이다.

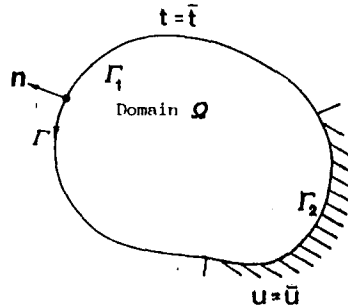


그림 1. 대상영역의 정의

식 (1) 에 가중함수 u_k^* 를 사용하여 weighted residual equation 을 구성하면 식 (4) 와 같다.

$$\int_{\Omega} (\sigma_{k,j,j} - f_k) u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (t_k - \bar{t}_k) u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u_k - \bar{u}_k) t_k^* d\Gamma \quad (4)$$

여기서, t_k^* 는 weighting field 에서의 변위 u_k^* 와 일관된 표면력이다. 식 (4) 의 첫번째 항을 두번 부분적분하고 응력-변형률 관계에 의하여 정리하면

$$\int_{\Omega} \sigma_{k,j,j} u_k^* d\Omega + \int_{\Omega} \epsilon_{k,j} u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} u_k t_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u}_k t_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} t_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{t}_k u_k^* d\Gamma \quad (5)$$

을 얻는다. 식 (5) 는 영역 Ω 의 문제를 경계 Γ 만의 문제로 전환한 것이다.

* 정희원 연세대학교 토목공학과 조교수

** 정희원 연세대학교 토목공학과 석사과정

여기서 다음 식 (6) 을 만족시키는 기본해를 생각한다.

$$\sigma_{,jk..j} + \delta_{ik} = 0 \quad (6)$$

여기서 δ_{ik} 는 i 점에서 x_k 방향으로 작용하는 단위하중이다. 식 (6) 의 해를 식 (5)에 대입하고 체적력을 무시하면 식 (7) 을 얻을 수 있다.

$$u_{ik}^i + \int_{\Gamma} u_{,k} t_{ik}^* d\Gamma = \int_{\Gamma} t_{,k} u_{ik}^* d\Gamma \quad (7)$$

여기서 u_{ik}^i 는 i 점에서의 x_k 방향 변위를 표시하며, $u_{,ik}$ 와 t_{ik}^* 는 그림 2 에서와 같이 i 점에서 x_k 방향으로 작용하는 단위하중에 의한 x 점에서의 x_k 방향의 변위와 표면력을 의미한다.

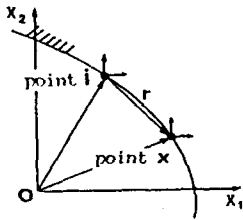


그림 2. 기본해를 위한 좌표계

이들 u_{ik}^* 와 t_{ik}^* 는 Kelvin¹⁾의 기본해로부터 구할 수 있다.

$$u_{ij}^* = \frac{-1}{8n(1-\nu)n} \left\{ (3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right\} \quad (8)$$

$$t_{ij}^* = \frac{-1}{4n(1-\nu)r} \left\{ (1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i} r_{,j} - \frac{\partial r}{\partial n} \right. \\ \left. - (1-2\nu)(r_{,i} n_{,j} - r_{,j} n_{,i}) \right\} \quad (9)$$

여기서, G 와 ν 는 전단탄성계수와 Poisson 비이며, r 은 재하점 i 와 변위 및 표면력이 발생하는 x 점 사이의 거리를 나타낸다. 또한, δ_{ij} 는 Kronecker delta 이다.

반무한영역 문제

그림 3 에서와 같이 Kelvin 문제의 영역을 무한의 수평 경계 $\bar{\Gamma}$ 와 그 경계 밑의 반무한영역으로 본뜬다. 반무한영역은 그림에서와 같이 공동의 경계 Γ' 과 무한경계영역 Γ_p 를 포함하고 있다.

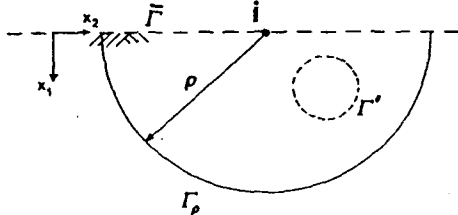


그림 3. 반무한영역의 정의

기본방정식 (7) 을 그림 3 의 반무한영역에 적용하면, 반무한영역의 표면 $\bar{\Gamma}$ 에서 표면력이 0 인 조건으로부터 식 (10) 의 형태로 바꿀 수 있다.

$$u_{ik}^i + \int_{\Gamma} u_{,k} t_{ik}^* d\Gamma = \int_{\Gamma} t_{,k} u_{ik}^* d\Gamma \quad (10)$$

식 (10) 또한 Kelvin 의 기본해를 포함하고 있으므로 경계 Γ' 을 따라 가해지는 하중점에 대하여 Kelvin 의 기본해에 의한 특이점이 발생하게 된다. 따라서 이에

대해 고려하면 식 (10) 은

$$u_{ik}^i + \int_{\Gamma} u_{,k} t_{ik}^* d\Gamma = \int_{\Gamma} t_{,k} u_{ik}^* d\Gamma \quad (11)$$

이 된다. 여기서 u_{ik}^i 는 내부점에서는 δ_{ik} 이고, 연속적인 곡면에서는 $\frac{1}{2}\delta_{ik}$ 의 값을 갖는 계수로서 그림 4 와 같이 특이점 i 에서 인접한 미소경계영역 $\bar{\Gamma}_i$ 을 생각하여

$$u_{ik}^i = \delta_{ik} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_i} t_{,k} u_{ik}^* d\Gamma \quad (12)$$

에 의하여 계산되어진다.

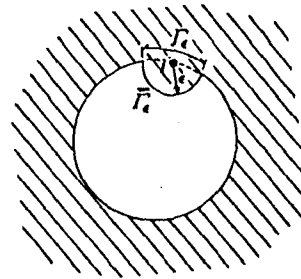


그림 4. 특이점의 고려

반무한영역의 기본해

동방성 반무한체의 내부에 작용하는 집중하중에 대한 문제는 Melan²⁾에 의해 해석되었으며, 3 차원 문제에 대하여 Mindlin³⁾이 확장하였다. 그림 5 와 같이 반무한영역에서 i 점에 단위하중이 가해질 때 x 점의 변위를 구한다.

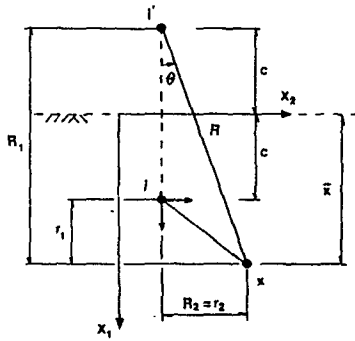


그림 5. 반무한영역 기본해의 보충항

기본해는 무한탄성영역에 대한 Kelvin 의 기본해 식 (8) 및 식 (9) 와 반무한영역의 보충항을 추가하여 구성한다. 즉 2차원 Kelvin 기본해항을 $()^k$ 라 표시하고 보충항을 $()^o$ 로 표시하면 반무한영역의 기본해 $()^*$ 는

$$()^* = ()^k + ()^o \quad (13)$$

로 할 수 있다. 보충항에 대한 기본해는 그림 5. 에 보인 바와 같이 i 점의 이미지점 i' 에 작용되는 하중에 대한 해이다. 여기서, u_{ik}^* 는 i 에 작용하는 i 방향의 단위하중에 대한 x 방향의 변위이다.

$$u_1^0 = K_d \left\{ -1R(1-v)^2 - (3-4v) |e_n R| \frac{1}{R^2} \left[(3-4v)R_1^2 - 2\alpha\bar{x} \right] + \frac{4\alpha\bar{x}R_1^2}{R^4} \right\}$$

$$u_2^0 = K_d \left\{ \frac{(3-4v)r_1 r_2}{R^2} + \frac{4\alpha\bar{x}R_1 r_2}{R^4} - 4(1-v)(1-2v)\theta \right\} \quad (14)$$

$$u_1^2 = K_d \left\{ \frac{(3-4v)r_1 r_2}{R^2} + \frac{4\alpha\bar{x}R_1 r_2}{R^4} + 4(1-v)(1-2v)\theta \right\}$$

$$u_2^2 = K_d \left\{ -1R(1-v)^2 - (3-4v) |e_n R| \frac{1}{R^2} \left[(3-4v)R_1^2 - 2\alpha\bar{x} \right] + \frac{4\alpha\bar{x}R_1^2}{R^4} \right\}$$

여기서,

$$\theta = \tan^{-1}(R_2/R_1) \quad R_1 = x_1(x) - x_1(1)$$

$$r = (r_1 r_2)^{1/2} \quad \alpha = x_1(1) \geq 0$$

$$R = (R_1 R_2)^{1/2} \quad \bar{x} = x_1(\eta) \geq 0$$

$$r_1 = x_1(x) - x_1(1) \quad R_d = 1/|8n\alpha(1-v)|$$

이다.

응력 텐서 σ_{jkl}^0 는 l 방향에 단위하중이 작용하는 경우의 응력으로 다음과 같은 표면력의 성분을 갖는다.

$$t_{lj}^0 = \sigma_{jkl}^0 n_k \quad (15)$$

여기서 σ_{jkl}^0 값은

$$t_{11}^0 = -K_d \left\{ \frac{(3\bar{x}+\alpha)(1-2v)}{R^2} + \frac{2R_1(R_1^2+2\alpha\bar{x})}{R^4} - \frac{4\bar{x}r_1^2(1-2v)}{R^4} + \frac{16\alpha\bar{x}R_1 r_1^2}{R^6} \right\}$$

$$t_{12}^0 = -K_d r_2 \left\{ \frac{(1-2v)}{R^2} + \frac{2[\bar{x}^2 - 2\alpha\bar{x} - \alpha^2 + 2\bar{x}R_1(1-2v)]}{R^4} + \frac{16\alpha\bar{x}R_1^2}{R^6} \right\}$$

$$t_{21}^0 = -K_d \left\{ \frac{(3\bar{x}+\alpha)(1-2v)}{R^2} + \frac{2R_1(r_1^2+2\alpha^2) - 2\alpha r_1^2 + 2\bar{x}r_1^2(1-2v)}{R^4} + \frac{16\alpha\bar{x}R_1 r_1^2}{R^6} \right\}$$

$$t_{13}^0 = -K_d r_1 \left\{ \frac{(1-2v)}{R^2} + \frac{2[\bar{x}^2 - 5\alpha\bar{x} - \alpha^2 + 2\bar{x}R_1(1-2v)]}{R^4} + \frac{16\alpha\bar{x}R_1^2}{R^6} \right\} \quad (16)$$

$$t_{22}^0 = -K_d \left\{ \frac{(3\bar{x}+\alpha)(1-2v)}{R^2} + \frac{2[R_1(r_1^2+2\alpha\bar{x}) - 2\bar{x}R_1^2(1-2v)]}{R^4} + \frac{16\alpha\bar{x}R_1 r_1^2}{R^6} \right\}$$

$$t_{33}^0 = -K_d r_1 \left\{ \frac{(1-2v)}{R^2} + \frac{2[\bar{x}^2 - 4\alpha\bar{x} - 2\alpha^2 - 2\bar{x}R_1(1-2v)]}{R^4} + \frac{16\alpha\bar{x}R_1^2}{R^6} \right\}$$

이며, $K_d = 1/|4n(1-v)|$ 이다.

하중의 재하점이 반구형영역의 표면에 놓이는 경우 변위와 표면력은 Flamant¹⁴ 의 문제로 표현할 수 있다.

행렬형태의 표현

기본방정식 (10) 을 행렬형태로 나타내기 위하여 전체좌표계에 대한 변위와 표면력을 다음과 같이 벡터로 표현한다.

$$u = \phi^T u^0 \quad (17)$$

$$t = \phi^T t^0 \quad (18)$$

여기서, ϕ 는 변위와 표면력에 대한 형상함수로 식 본 논문에서는 선형요소를 취하였다. 식 (17) 와 (18) 을 식 (11) 에 적용하면 식 (19) 를 얻을 수 있다.

$$\int_{\Omega} u^0 \cdot \left(\int_V t^0 \cdot \phi^T d\Gamma \right) u^0 = \int_{\Omega} \left(\int_V u^0 \cdot \phi^T d\Gamma \right) t^0 \quad (19)$$

식 (19) 의 적분항을 수치적분하기 위한 형태로 표현하면

$$\int_{\Omega} u^0 \cdot \left(\int_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^L |J| e^w e_{\ell} (t_{\ell}^0 \cdot \phi_{\ell}^T) u^0 \right) = \int_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^L |J| e^w e_{\ell} (u_{\ell}^0 \cdot \phi_{\ell}^T) t_{\ell}^0 \quad (20)$$

이되며, 여기서 $|J|$ 는 Jacobian 행렬이며, w 는 Gauss 적분의 가중치이다.

식 (20) 을 i 점에 대하여 나타내면

$$u_1^0 u_1^0 \hat{h}_{11} \hat{h}_{12} \dots \hat{h}_{1r} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} = |K_{11} K_{12} \dots K_{1r}| \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_r \end{bmatrix} \quad (21)$$

이된다. 이를 전체절점에 대한 형태로 표시하면 식 (22)로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \hat{h}_{11} \hat{h}_{12} \dots \hat{h}_{1r} \\ \hat{h}_{21} \hat{h}_{22} \dots \hat{h}_{2r} \\ \vdots \\ \hat{h}_{r1} \hat{h}_{r2} \dots \hat{h}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} K_{12} \dots K_{1r} \\ K_{21} K_{22} \dots K_{2r} \\ \vdots \\ K_{r1} K_{r2} \dots K_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_r \end{bmatrix} \quad (22)$$

또는, 식 (22)는 식 (23)로 표현되어 진다.

$$[H] u = [G] t \quad (23)$$

식 (23) 의 양변에 $[u]^{-1}$ 를 곱하면

$$[G]^{-1} [H] u = [C] u = t \quad (24)$$

이된다.

3. 유한요소법

유한요소법에서 사용되는 형상함수는 경계요소와의 연결부에서의 결합조건을 만족시키기 위하여 경계요소에서 사용한 선형형상함수를 사용한다.

유한요소의 영역에 표면력이 작용할 경우 위치에너지는 다음과 같다.

$$U_p = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T \sigma dv - u^T f \quad (25)$$

여기서 ε 는 변형률벡터이며, σ 는 응력벡터, u 는 변위벡터, f 는 하중벡터이다. 변형률과 변위의 관계, 응력과 변형률의 관계는 식 (26), (27) 으로 나타낼 수 있다.

$$\varepsilon = [B] u^e \quad (26)$$

$$\sigma = [D] \varepsilon \quad (27)$$

평형조건을 찾기위하여 식 (25)를 최소위치에너지의 원리에 적용하면 각 요소당 식 (28)을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial U_p}{\partial u^e} = \left[\int_V [B]^T [D] [B] u^e dv - f^e \right] = 0 \quad (28)$$

또는

$$[K]_{\Omega}^{\Omega} u^{\Omega} - F^{\Omega} = 0 \quad (29)$$

여기서 $[K]_{\Omega}^{\Omega} = \int_{\Omega} [B]^T [D][B] u^{\Omega} dv_{\Omega}$

는 요소의 강성행렬이고 F^{Ω} 는 요소의 절점하중 벡터이다.

요소당의 강성도행렬과 절점하중벡터를 전체강성도행렬과 전체하중벡터로 합하여 식(30)의 유한요소부분의 강성도행렬 $[K]_{P.R.}$ 를 구성한다.

$$[K]_{P.R.} u_{P.R.} = F_{P.R.} \quad (30)$$

여기서 $u_{P.R.}$ 은 유한요소영역의 변위이고 $F_{P.R.}$ 는 유한요소영역에 가해지는 외부하중이다.

4. 조합방법

경계요소 계방정식의 변형

앞에서 얻은 경계요소법에 의한 계방정식 (25) 는 변위 - 표면력의 관계로 유한요소법의 계방정식 (30) 는 변위 - 하중의 관계와 차이가 있다. 따라서, 경계 요소의 계방정식을 변위 - 하중관계로 변형하여야 한다. 여기서는 최소위차에너지의 원리를 적용한다.

경계요소영역에 있어서 전체의 위치에너지는 식 (31) 으로 나타낼 수 있으며, 여기서 변형에너지항을 발산 정리에 의해 식 (32) 로 나타낼 수 있다.

$$n_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^T \epsilon d\Omega - \int_{\Gamma} u^T \bar{t} d\Gamma \quad (31)$$

$$n_p = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} u^T \bar{t} d\Gamma - \int_{\Gamma} u^T \bar{t} d\Gamma \quad (32)$$

여기서, \bar{t} 는 경계에서 작용하는 표면력 벡터이다.

전체좌표계에 대한 형상함수를 고려하여 정리하면

$$n_p = \frac{1}{2} u^T [M] u - u^T F \quad (33)$$

를 얻는다. 여기서, $[M]$ 과 F 는 다음과 같다.

$$[M] = \int_{\Gamma} \phi^T \phi d\Gamma \quad (34)$$

$$F = \int_{\Gamma} \phi^T \bar{t} d\Gamma \quad (35)$$

식 (33) 에 경계요소의 계방정식 (25) 를 대입하여 식 (36) 를 얻는다. 여기에 u 의 variation 을 생각하여 식 (37) 을 구성한다.

$$n_p = \frac{1}{2} u^T [M] u - u^T F \quad (36)$$

$$\frac{\delta n_p}{\delta u} = \frac{1}{2} [[M] u + ([M] u)^T] - F = 0 \quad (37)$$

따라서 경계요소의 변위 - 표면력관계의 계방정식은 변위 - 하중관계의 계방정식 (38) 로 변환된다.

$$[K]_{B.R.} u_{B.R.} = F_{B.R.} \quad (38)$$

여기서 $[K]_{B.R.}$ 는 대칭형 강성도행렬으로써

$$[K]_{B.R.} = \frac{1}{2} [[M] u + ([M] u)^T] \quad (39)$$

이고 $u_{B.R.}$ 는 경계요소부분의 변위, $F_{B.R.}$ 는 경계 요소부분에 작용하는 하중이다.

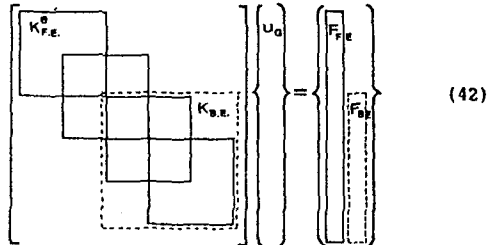
유한요소법과 경계요소법의 조합

앞에서 유도한 유한요소의 강성도행렬 $[K]_{P.R.}$ 와 경계요소의 강성도행렬 $[K]_{B.R.}$ 은 각각의 해석 영역에 대한 같은 성질의 강성도행렬으로써 두 영역의 결합 부분에 따라 합성하여 전체영역의 변위 - 하중관계의 계방정식을 구할 수 있다. 즉,

$$([K]_{P.R.} + [K]_{B.R.}) (u_{P.R.} + u_{B.R.}) = F_{P.R.} + F_{B.R.} \quad (40)$$

$$[K]_{\Omega}^{\Omega} u_{\Omega} = F_{\Omega} \quad (41)$$

여기서, $[K]_{\Omega}^{\Omega}$ 는 전체영역에 대한 강성도행렬, u_{Ω} 는 전체영역에서 고려되는 각 절점의 변위벡터, F_{Ω} 는 유한요소와 경계요소에 가해지는 하중의 합성이다. 식 (41) 은 식 (42) 과 같이 구성된다.



5. 적용 및 검증

본 연구에서 사용한 결합방법을 검증하기 위하여 반무한영역의 영향이 큰 경우로서 얕은 터널 (Shallow tunnel) 을 해석한다. 터널은 그림 7 과 같이 직경이 20 m 인 원형이고 그 중심은 지표에서 40 m 하부에 있는 경우를 택하였다. 하중으로는 터널 내부에 균일하게 작용하는 내압 15 kN/m² 을 취하였다. 지반의 조건으로는 탄성계수가 21000 kg/m² 이고 Poisson비는 0.1 로 하였다.

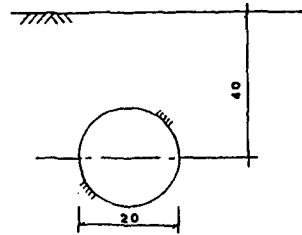


그림 7. 검증모형

검증을 위하여 전승된 구조체에 대하여 유한요소 해석 (FEM), 경계요소해석 (BEM), 조합해석 (FEEM) 을 각각 실시하여 해석된 터널 주변의 수직변위를 비교 하였다. 본 해석에서는 16bit IBM-AT 를 이용하였다.

유한요소 모델은 그림 8 처럼 구성하였다. 일반적으로 대칭성을 고려하면 영역의 반만 해석이 필요하지만 조합모델과 같은 조건을 위하여 전체를 해석하였다 (174 개 요소, 205 개 절점). 경계요소법에 의한 모델은 터널주변을 동일 길이와 24 개 요소와 24 개 절점으로 구성하여 해석하였다.

조합해석은 그림 9 와 같이 (a) 24 개 경계절점, 1층 유한요소 (총 24 요소, 48 절점), (b) 16 개 경계절점, 1층 유한요소 (총 16 요소, 32 절점), (c) 16 개 경계절점, 2층 유한요소 (총 32 요소, 48 절점) 의 경우로 분리하여 실시하였다.

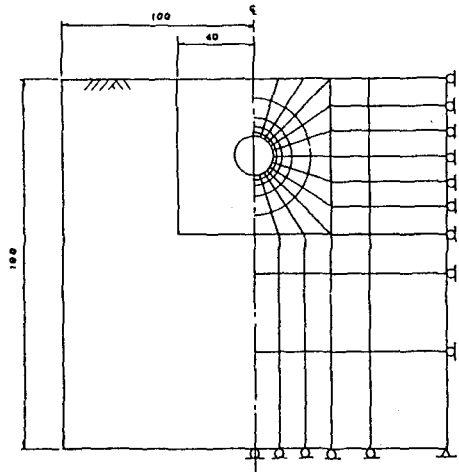


그림 8. 겹중첩 유한요소 수치모델

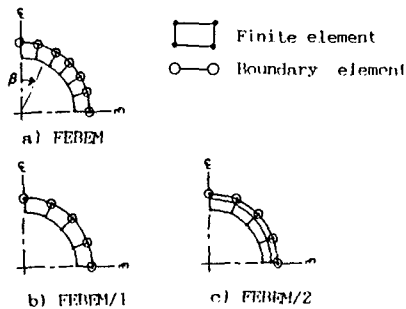


그림 9. FEDEM 겹중첩을 위한 수치모델

표 1. 과 그림 10 은 반부한영역의 영향을 검증하기 위하여 그림 9 (a) 와 같은 조합방법에 의한 FEDEM 해석결과와 FEM 및 BEM 에 의한 결과를 비교한 것이다. 비교된 수치는 각 절점의 수직변위며, 전경 부분으로부터 지면까지를 비교하였다. 이들 결과에서 FEDEM 해석 결과를 기준으로 할 때 터널 상부의 변위는 FEM 및 BEM 결과에 공통적으로 근접하나 하부의 변위는 BEM 결과에 근접함을 알 수 있다. 이는 유한요소 해석에서 하부의 인위적인 경계조건에 의한 오차가 터널 하부에서 발생되는 것으로 사료된다.

표 1. 24 절점 모델비교

	FEDEM	FEM	BEM
1	1.140	1.128	1.127
2	1.100	1.097	1.092
3	1.000	1.005	0.992
4	0.848	0.860	0.839
5	0.655	0.673	0.646
6	0.436	0.459	0.430
7	0.208	0.232	0.204
8	-0.013	0.008	-0.016
9	-0.216	-0.199	-0.218
10	-0.389	-0.375	-0.390
11	-0.520	-0.510	-0.520
12	-0.601	-0.593	-0.602
13	-0.629	-0.622	-0.629

표 2 및 그림 11 은 조합 내에서 사용한 유한요소의 개수에 따른 결과의 비교이다. FEDEM/1 은 16개 절점 16개 요소로 한층의 유한요소로 구성되었으며 FEDEM/2 는 32개 절점 32개 요소로 두층의 유한요소 영역을 갖는다(그림 9. (b),(c)). 한층인 경우가 순수 경계 요소법과 더 유사함을 볼 수 있다. 이는 한층인 경우가 두층인 경우에 비해 경계요소에 의한 영역이 순수 경계 요소법에 가깝기 때문이다.

표 2. 16 절점 층변화에 대한 비교

	FEDEM/1	FEDEM/2	BEM
1	1.120	1.140	1.104
2	1.040	1.060	1.025
3	0.832	0.852	0.819
4	0.539	0.555	0.527
5	0.209	0.221	0.198
6	-0.110	-0.102	-0.120
7	-0.375	-0.370	-0.384
8	-0.550	-0.547	-0.559
9	-0.611	-0.608	-0.619

그림 12 는 24 개 요소 (FEDEM) 와 16 개 요소 (FEDEM/1) 의 결과를 비교한 것으로, 절점 수의 차이에 의한 순수 경계 요소의 오차가 조합 방법에 의한 해석에 미소하게 영향을 미치는 것으로 볼 수 있다.

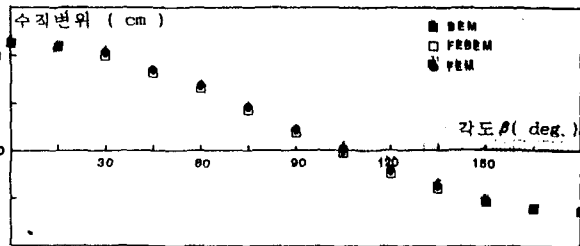


그림 10. FEDEM, FEM, BEM 비교

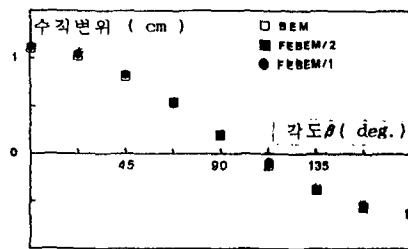


그림 11. FEDEM/1, FEDEM/2, BEM 비교

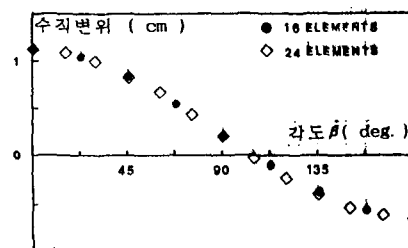


그림 12. FEDEM, FEDEM/1 비교

6. 결론

본 연구는 반무한영역을 고려한 직접경계요소법을 사용하여 유한요소법과의 조합을 실시하였다. 본 연구 결과에서 볼 수 있듯이 유한요소법과 반무한영역을 고려한 경계요소법의 조합에 의하여 타당성있는 결과를 얻을 수 있었다.

조합방법은 유한요소법에 의한 해석에서 하중에 영향을 적은 위치까지 요소망을 구성해야 하는 불편과 불필요한 기억용량을 줄일 수 있다. 따라서, 소형 전산기 용량의 효율적인 이용이 가능하다. 또한 재료의 다양성, 재료의 비선형성등을 유한요소 영역에서 모델화하고 전체 거동에 영향을 적은 영역은 경계요소로 모델화 함으로써 경제적인 해석을 수행할 수 있다.

참 고 문 헌

1. Rizzo, F.J., "An integral equation approach the boundary value problems in classical elastostatics", J. of Appl. Math., Vol. 25, 1967, pp. 83-95.
2. Lachat, J.C., "A further development of the boundary integral technique for elastostatics", Thesis, University of Southampton, 1975.
3. Banerjee, P.K., "Integral equation methods for analysis of piece-wise non-homogeneous three dimensional elastic solids of arbitrary shape", In. J. Mech. Sci., Vol. 18, 1976, pp. 293-303.
4. Zienkiewicz, O.C., Kelly, D.W. and Bettess, P., "The coupling of the finite element method and boundary solution procedures", Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 11, 1977, pp. 355-375.
5. Kelly, D.W., Mustoe, G.G. and Zienkiewicz, O.C., "Coupling boundary element methods with other numerical methods", Ch. 10 in Developments in Boundary Element Methods-1, Applied Science Publisher Ltd., London, 1979.
6. Brebbia, C.A. and Georgiou, P., "Combination of boundary and finite elements in elastostatics", Appl. Math. Modelling, Vol. 3, 1979.
7. Mustoe, G.G. and Volait, F., "A Symmetric direct integral equation method for two-dimensional elastostatics", Paper presented at 2nd Int. Seminar on Boundary Element Methods, Southampton, 1980.
8. Beer, G. and Meek, J.L., "A boundary finite element for underground mining applications", New Developments in Boundary Element Method, CML Publications, Southampton, U.K., 1980, pp. 281-294.
9. Tells, J.C.F. and Brebbia, C.A., "Boundary element solution for half-plane problems", Int. J. Solids Structures, Vol. 17, 1981, pp. 1149-1158.
10. Wang, C. and Liu, X., "Boundary Element Method for Semi-Infinite Region Problem", Boundary Element VIII Conference, 1986, pp. 237-246.
11. Brebbia, C.A., Telles, J.C.F. and Wrobel, L.C., Boundary element techniques, Springer-Verlag, 1984.
12. Melan, E., "Der spannung szuatand der durch eine einzelkraft in innern beanspruchten", Z. Angew. Math. Mech., 1932, Vol. 12.
13. Mindlin, R.D., "Force at a point in the interior of a Semi-infinite Solid", Physics, Vol. 7, 1936, pp. 195-202.
14. Crouch, S.L. and Starfield, A.M., Boundary element methods in solid mechanics, George Allen & Unwin, 1983.
15. Beer, G. and Meek, J.L., "The coupling of boundary and finite element methods for infinite domain problems in elastoplasticity", Boundary Element Method, Edited by Brebbia C.A., Springer-Verlag, Berlin, 1981, pp. 575-591.