

강체요소법에 의한 구형셸의 탄소성해석에 관한 연구(I)

- 구형셸의 탄소성 해석에 관한 이론적 고찰 -

A STUDY ON ELASTO-PLASTIC ANALYSIS OF SPHERICAL SHELL BY RIGID ELEMENT METHOD(I)
- Theoretical Consideration on Elasto-Plastic Analysis of Spherical Shell -

0 권 택 진* 한 상 을** 서 삼 열** 박 강 근**
Kwun, Taek Jin Han, Sang Eul Suh, Sam Uel Park, Kang Geun

- ABSTRACT -

This study on the elasto-plastic analysis of spherical shell by rigid element method is classified into two parts ; (1) theoretical consideration on elasto-plastic analysis of spherical shell, (2) elastic and elasto-plastic analysis of spherical shell with the open stiff ring.

In 1982, Y. Tsuboi proposed the new analytical method which is called the rigid element method, for analyzing the elasto-plastic behavior of wall-type precast concrete structures by applying the concepts of rigid bodies-spring model (i.e., when structures reach their ultimate state of loading, they may be yield, collapsed and crushed into pieces, and each part or piece of structures may move like a rigid body.).

In this paper, for improvement and expansion this rigid element method, it is proposed the adaptation equation of rectangular-shaped spherical element and rectangular-shaped spherical bending element developed by present authors, and the analytical procedure for the elastic and the elasto-plastic increment method of structures.

1. 서 론

강체요소법에 의한 구형셸의 탄소성해석에 관한 본 연구는, (1) 구형셸의 탄소성 해석에 관한 이론적 고찰, (2) 개구부 링을 갖는 구형셸의 탄성 및 탄소성 해석의 두 부분으로 나누어진다.

강체요소법은 1982년 Tsuboi가 Kawai에 의해서 제안된 강체 스프링 모델의 개념에서 착안하여 벽식 프리캐스트 구조물의 탄소성해석에 적용함으로써 시작된 수치해석법이다.

저자들은 이러한 강체요소법을 원통셸의 해석에 적용하기 위해서 사각형 원통요소와 능형 원통요소의 일반화 적합방정식을 유도하여 보다 효과적인 원통셸의 해석이 가능 하도록 하였다. 또 강체요소법을 구형셸의 해석에 적용시키기 위해서 사각형 구요소들을 개발하였다.

최근에 저자들은 상기와 같은 원통요소 및 구요소를 셸구조물의 탄성 및 탄소성해석에 적용해 본

결과 두께방향의 휨 및 비틀림이 작용하는 구조물의 해석에는 적합하지 않다는 것이 입증되었다. 저자들은 이러한 문제점을 보완하기 위해서 두께방향의 휨 및 비틀림의 효과를 고려한 새로운 사각형 평판원요소, 사각형 원통원요소, 능형 원통원요소 및 사각형 구원요소를 개발하여 강체요소법을 보다 일반화된 해석법으로 개발확장 하였다.

본 논문에서는 사각형 구요소 및 사각형 구원요소의 적합방정식, 구형셸을 해석하기 위한 구성방정식 및 구조물을 탄소성 해석하기 위한 하중증분법을 제안한다.

2. 구형셸의 구성방정식

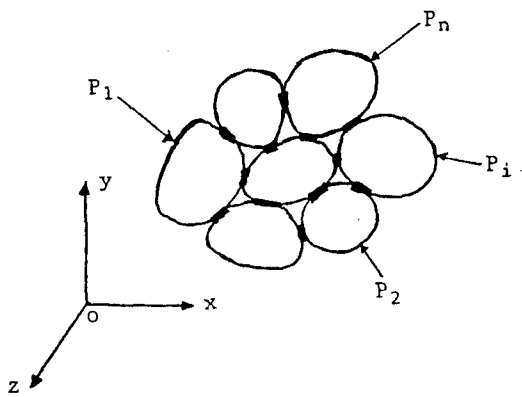
2-1. 기본 개념

1977년에, Kawai는 유한요소 비선형해석(finite element nonlinear analysis)에서 직면하게

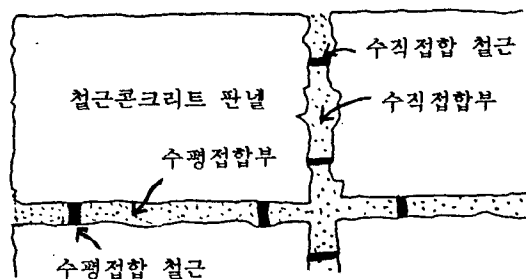
* 정회원, 성균관대 교수, 공학박사

** 정회원, 성균관대 박사과정

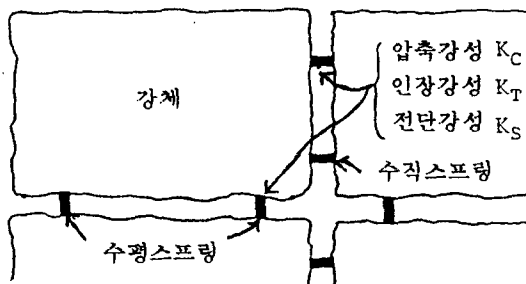
되는 문제점들을 해결하기 위해서 <그림-1>과 같은 강체스프링모델(rigid bodies-spring model)이라는 새로운 해석모델을 제안하였다. 강체스프링 모델은 구조물이 극한상태에 도달할때, 구조물은 항복을 하거나 각 조각들로 나누어지게 되고, 구조물의 각 조각들은 강체와 같은 거동을 한다는 개념이다. 구조물의 내력은 인접한 요소의 접촉면에 취해진 스프링 시스템에 분포한다고 가정한다. 이러한 해석모델은 구조물의 극한해석에 매우 효과적인 해석모델로 입증되었다.¹⁾



<그림-1> 강체스프링 모델의 개념



(a) 철근콘크리트 벽식프리캐스트 구조물



(b) 강체요소법에 의한 모델화

<그림-2> 벽식프리캐스트 구조물의 모델화

1982년 Tsuboi는 상기와 같은 강체스프링 모델의 개념에서 착안하여 철근콘크리트 벽식프리캐스트 구조물의 탄소성 해석을 위한 새로운 사각형 평면요소를 개발하였다. 이러한 사각형 평면요소를 이용하여 철근콘크리트 벽식프리캐스트 구조물을 모델화하면 <그림-2>와 같다. 철근콘크리트 프리캐스트 구조물의 판넬을 강체요소로 가정하고, 판넬 주위에 취해진 접합부를 스프링으로 가정하여 판넬의 접합부의 응력을 평가한다. 이때 사각형 평면요소의 자유도는 요소의 중심에 취하고 내력은 요소 주변의 스프링에 분포한다고 가정한다. 이러한 개념을 이용한 해석법이 강체요소법이라고 명명하였다. 이러한 개념으로 철근콘크리트 벽식프리캐스트 구조물의 탄소성해석에 적용한 결과, 기존의 해석법에 비해서 강체요소법에 의한 해석법의 결과가 보다 더 정확하고 경제적인 해석법으로 입증되었다.²⁾

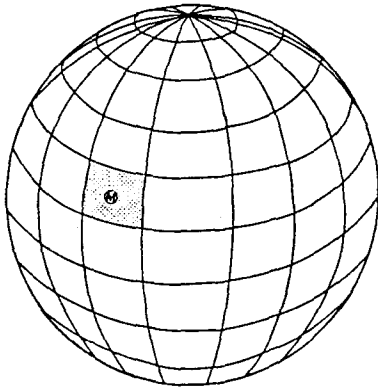
강체요소법은 연속체를 수치분할적 방법으로 해석할때 분할된 각 요소를 강체라고 가정하고, 분할된 각 요소들은 요소의 강성으로 치환된 탄성스프링으로 서로 연결되어 있다고 가정한다. 이때 요소의 주변에 취해진 스프링은 해석의 단순화를 위해서 축력, 면내 전단력 및 면외 전단력을 전달한다고 가정한다. 요소의 자유도는 요소내의 임의의 한 점에서 취하고 이 점에서의 강체변위는 요소의 주변에 취해진 스프링을 통하여 다른 요소로 전달되어 진다. 그리고 전체구조물의 해영역은 스프링 및 요소의 거동에 의해서 평가되어 진다.

상기와 같은 강체요소법의 개념을 연속체의 탄성 및 탄소성해석에 적용하면 자유도가 요소의 중심에만 취해지므로 구조물의 전체 자유도의 수를 대폭 줄일 수 있다. 또 내력이 스프링에만 작용한다고 가정했기 때문에 스프링의 역학적 거동 상태를 파악하면 구조물 전체의 내력의 흐름, 균열의 진전상황 및 구조물의 파괴형상 등을 파악할 수 있게 된다. 그리고 철근콘크리트 구조물과 같이 균열을 형성하면서 파괴되는 연속체의 해석에는 균열의 개략적인 형상을 요소의 분할 개념에 도입하면 보다 효과적으로 구조물을 해석할 수 있다.

2-2. 구요소의 적합방정식

2-2-1. 사각형 구요소의 적합방정식

구형셀은 일반적으로 위선방향의 응력과 경선방



<그림-3> 구형셸의 요소분할

항의 응력이 중요하다. 이러한 응력들을 보다 효과적으로 파악하기 위해서 <그림-3>과 같은 구형셸을 위선방향의 각 θ , 경선방향의 각 φ 로 된 사각형 구요소로 분할한 후에, 요소의 중심에 취해진 6개의 강제변위가 요소 주변의 임의의 점, 즉 축방향 변위 u , 면내전단 방향의 변위 v , 면외전단 방향의 변위 w 에 미치는 영향을 고려하면 다음과 같은 사각형 구요소의 적합 방정식을 구할 수 있다.

$$\{U\}_M = [A]_M \{D\}_M \quad (2.1)$$

여기서 $\{U\}_M = \{u, v, w\}_M^T$

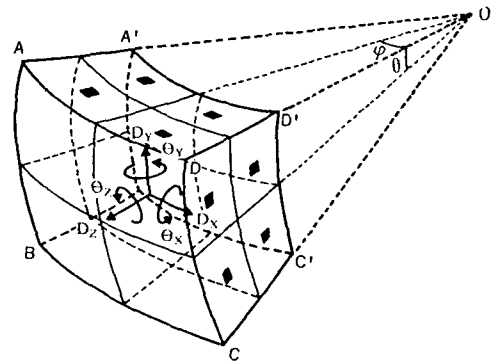
$$\{D\}_M = \{D_x, D_y, D_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z\}_M^T$$

$$[A]_M = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta & -\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta & \cos\theta\cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -R\sin\theta\sin\varphi & R(\cos\theta - \cos\varphi) & -R\sin\theta\cos\varphi \\ R(\cos\theta - \cos\varphi) & R\sin\theta\sin\varphi & R\sin\varphi \\ R\sin\theta & -R\cos\theta\sin\varphi & 0 \end{bmatrix}$$

2-3. 사각형 구힘요소의 적합방정식

사각형 구요소를 이용하여 구형셸의 해석에 적용 해본 결과, 두께방향의 휨이나 비틀림이 작용하는 구형셸의 해석에는 적용할 수 없다는 것이 밝혀졌다. 그 이유는 해석을 단순화 시키기 위해서 스프링의 내력이 축력, 면내전단력 및 면외전단력 만을 전달한다고 가정했기 때문이다. 따라서 이러한 문제점을 개선하기 위해서는 스프링의



<그림-4> 사각형 구힘요소

내력에 휨을 고려하거나, 스프링에 휨을 고려하는 대신에 휨 및 비틀림을 전달할 수 있는 스프링 시스템을 취하면 된다. 스프링의 내력에 휨을 고려하는 경우에는 휨강성을 구하는 것이 실제로 매우 어렵기 때문에, 면내 방향과 두께방향에 대해서 복층 스프링 시스템으로 구성하면, 두께방향 및 면내방향의 휨 뿐만 아니라 비틀림의 효과도 전달할 수 있게 된다. 이러한 복층 스프링 시스템의 개념을 도입하여 <그림-3>의 구형셸에서 임의의 요소를 꺼내어 나타내면 <그림-4>와 같다.

<그림-4>의 사각형 구힘요소도 사각형 구요소와 마찬가지로 방법으로 요소의 중심에 취해진 6개의 강제변위가 요소 주변의 임의의 위치의 위치에 미치는 영향을 나타낸 식, 사각형 구힘요소의 적합방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\{U\}_{M'} = [A]_{M'} \{D\}_{M'} \quad (2.2)$$

여기서 $\{U\}_{M'} = \{u, v, w\}_{M'}^T$

$$\{D\}_{M'} = \{D_x, D_y, D_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z\}_{M'}^T$$

$$[A]_{M'} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta & -\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta & \cos\theta\cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -(R+z)\sin\theta\sin\varphi & (R+z)\cos\theta - R\cos\varphi & -(R+z)\sin\theta\cos\varphi \\ R\cos\theta - (R+z)\cos\varphi & R\sin\theta\sin\varphi & (R+z)\sin\varphi \\ R\sin\theta & -R\cos\theta\sin\varphi & 0 \end{bmatrix}$$

식(2.2)의 사각형 구힘요소의 적합방정식에서 $z=0$ 라 두면 식(2.1)의 사각형 구요소의 적합방정식과 일치한다.

3. 구형첼의 해석을 위한 구성방정식

구요소 M의 주위에 취해진 임의의 스프링이 요소 M의 점 i와 요소 N의 점 j를 서로 연결하고 있다면, 임의의 스프링에 대한 요소 M, N의 적합방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{U\}_M = [A_i]_M \{D\}_M \quad (3.1)$$

$$\{U\}_N = [A_j]_N \{D\}_N \quad (3.2)$$

변위 u, v, w를 요소의 각면에 대응되는 변위 d_A, d_S, d_N 로 변환하는 변환방정식은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} d_A \\ d_S \\ d_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \eta & \sin \eta & 0 \\ -\sin \eta & \cos \eta & 0 \\ 0 & 0 & \xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

$$\text{즉 } \{d\} = [T^1] \{U\} \quad (3.3)$$

여기서 η 와 ξ 는 요소의 각 면에 대한 방향각이다.

식(3.1), (3.2)와 식(3.3)으로부터 다음 공식을 유도할 수 있다.

$$\{d\}_M = [T^1]_M [A_i]_M \{D\}_M \quad (3.4)$$

$$\{d\}_N = [T^1]_N [A_j]_N \{D\}_N \quad (3.5)$$

구형첼의 전체좌표계와 각 요소에 대한 국소좌표계 사이의 변환매트릭스 $[T^1]$ 을 고려한 후에 단위매트릭스 $[I]$ 와 영매트릭스 $[O]$ 을 조합하면 식(3.4), (3.5)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{d\}_M = [T^1]_M [A_i]_M [T^2]_M [I]_M \{\bar{D}\} \quad (3.6)$$

$$\{d\}_N = [T^1]_N [A_j]_N [T^2]_N [I]_N \{\bar{D}\} \quad (3.7)$$

식(3.6), (3.7)을 이용하여 스프링- α 의 상대변위 $\{d\}_\alpha$ 을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{d\}_\alpha &= \{d\}_M + \{d\}_N \\ &= ([T^1]_M [A_i]_M [T^2]_M [I]_M + [T^1]_N [A_j]_N [T^2]_N [I]_N) \{\bar{D}\} \\ &\dots \dots \dots \quad (3.8) \end{aligned}$$

스프링- α 의 축력, 면내전단력 및 면외전단력을 f_A, f_S, f_N 이라 하고 이에 대응하는 스프링의 강성을 k_A, k_S, k_N 라 하면, 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$\begin{Bmatrix} f_A \\ f_S \\ f_N \end{Bmatrix}_\alpha = \begin{bmatrix} k_A & 0 & 0 \\ 0 & k_S & 0 \\ 0 & 0 & k_N \end{bmatrix}_\alpha \begin{Bmatrix} d_A \\ d_S \\ d_N \end{Bmatrix}_\alpha$$

$$\text{즉 } \{f\}_\alpha = [k]_\alpha \{d\}_\alpha \quad (3.9)$$

식(3.8)을 식(3.9)에 대입하면, 스프링- α 의 내력은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \{f\}_\alpha &= ([K]_\alpha [T^1]_M [A_i]_M [T^2]_M [I]_M \\ &+ [K]_\alpha [T^1]_N [A_j]_N [T^2]_N [I]_N) \{\bar{D}\} \quad (3.10) \end{aligned}$$

스프링의 총수를 n 이라 하고, 가상일의 원리를 적용하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

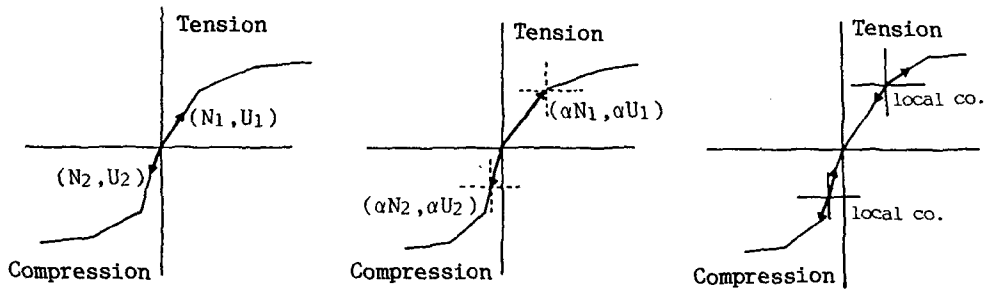
$$\delta \{\bar{D}\}^T \{\bar{F}\} = \sum_{\alpha=1}^n \delta \{d\}_\alpha^T \{f\}_\alpha \quad (3.11)$$

식(3.8)과 식(3.10)을 식(3.11)에 대입하면 다음과 같은 전체 강성방정식을 구할 수 있다.

$$\{\bar{F}\} = [\bar{K}] \{\bar{D}\} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} [\bar{K}] &= \sum_{\alpha=1}^n \{ [I]_M^T [T^2]_M^T [A_i]_M^T [T^1]_M^T [k]_\alpha [T^1]_M [A_i]_M [T^2]_M [I]_M \\ &+ [I]_M^T [T^2]_M^T [A_j]_M^T [T^1]_M^T [k]_\alpha [T^1]_N [A_j]_N [T^2]_N [I]_N \\ &+ [I]_N^T [T^2]_N^T [A_j]_N^T [T^1]_N^T [k]_\alpha [T^1]_M [A_i]_M [T^2]_M [I]_M \\ &+ [I]_N^T [T^2]_N^T [A_i]_N^T [T^1]_N^T [k]_\alpha [T^1]_N [A_j]_N [T^2]_N [I]_N \} \end{aligned}$$

식(3.12)에 하중조건 및 경계조건을 대입하면, 미지의 강제변위 및 반력을 구할 수 있다. 또 구해진 강제변위를 식(3.8)에 대입하면 스프링의 상대변위를 구할 수 있고, 식(3.10)에 대입하면 스프링의 내력, 즉 축력, 면내전단력 및 면외전단력을 구할 수 있다. 그리고 내부스프링과 외부스프링의 축력의 차이에 두 스프링 간의 거리를 곱하면 두께방향의 힘이 얻어진다.



(a) 단위하중에 대한 결과 (b) 증분하중의 계산 (c) 국소좌표계의 개념

<그림-5> 인장강성 및 압축강성을 구분하기 위한 탄소성해석의 순서

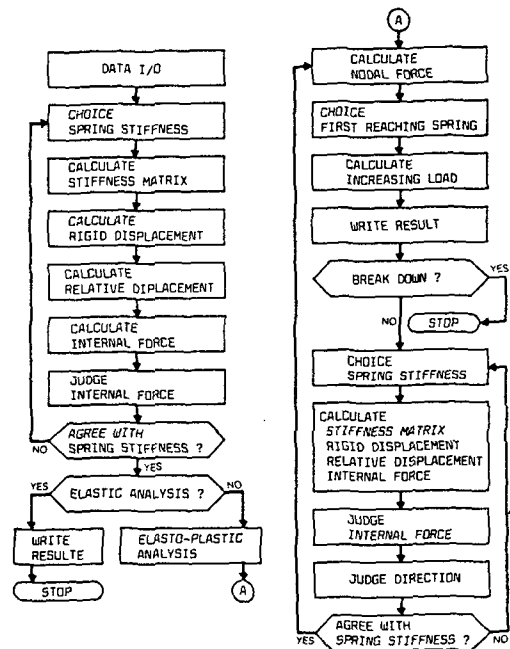
4. 탄소성해석 방법

강체요소법을 이용하여 구조물을 탄소성해석하기 위해서 재료의 역학적 거동을 만족하는 스프링의 복원력 특성(응력-변형도 관계)을 tri-linear model로 가정하고, 소성역(제2구배 이후)에서 응력이 후진 할때는 탄성구배(제1구배)를 채택하였다. 또 철근콘크리트의 역학적 특성을 고려하기 위해서 스프링의 인장강성, 압축강성 및 전단강성을 구분하였고, 특히 인장스프링에서는 인장균열의 효과를, 압축스프링에서는 압축파괴의 효과를 파악할 수 있도록 하였다.

상기와 같은 개념으로 스프링에 증분하중을 고려하여 탄성 및 탄소성해석하는 방법을 나타내면 다음과 같다.

Stage 1 ; 구조물의 해석시에 분할된 요소의 접촉면에 취해진 스프링 강성의 선택이 제일 우선되어야 한다. 그런데 스프링의 축력 강성을 선택할 때에는 스프링의 응력 성분이 인장력인지 압축력인지 미리알 수 없기 때문에 스프링의 인장강성과 압축강성을 미리 구분할 수가 없다. 따라서 우선 모든 스프링의 축력 강성에 인장 강성을 대입하여 계산한다. 그결과 스프링의 상대변위의 부호가 음이면 이때의 스프링의 응력은 압축력이 작용하기 때문에 응력의 성분과 강성이 일치하지 않으므로 압축강성으로 다시 바꾸어 계산한다. 이러한 과정을 반복하여 각 스프링에 대한 상대변위의 부호와 선택된 스프링의 강성이 일치하면 단위하중에 대한 탄성해석을 한다<그림-5(a)>.

Stage 2 ; 단위하중에 대한 탄성범위의 해석으로부터, 절점에 제일 먼저 도달할 수 있는 스프링을 선정하고, 또 이 스프링이 절점에 도달할 수



<그림-6> 탄성 및 탄소성해석에 관한 흐름도

있는 크기의 증분하중을 모든 스프링에 곱해준다<그림-5(b)>.

Stage 3 ; 각 스프링의 변위 및 응력에 증분하중을 고려한 점에서 국소계의 원점으로 생각하고 다시 각 스프링에 대한 강성을 Stage 1에서의 같은 방법으로 스프링의 강성을 선택한 후에 제일 먼저 절점에 도달할 수 있는 스프링에 대한 증분하중을 각 스프링에 곱해준다<그림-5(c)>.

Stage 3 ; 이후의 탄소성해석에서는 Stage 1에서 Stage 3까지 반복계산되고, 스프링의 강성이

3구배를 넘어가면 파괴된 것으로 간주한다.

이러한 개념으로 구조물을 탄성 및 탄소성해석 할 수 있는 흐름도를 나타내면 <그림-6>과 같다.

4. 결 론

본 논문에서는 강제요소법을 이용하여 구형셸의 해석에 적용할 수 있는 사각형 구요소와 사각형 구껍요소들을 제안하고, 이 요소들을 이용하여 구형셸을 해석하기 위한 구성방정식을 정식화 하였다. 또 구조물을 탄소성 해석하기 위한 해석적 방법을 제안하였다.

본 논문에서 제안된 사각형 구요소와 사각형 구껍요소는 연직하중, 내압 등이 작용하는 구형셸의 해석에 효과적으로 적용될 수 있다고 생각된다. 또 요소의 자유도가 요소의 중심에만 취하여 구조물 전체의 자유도를 대폭 감소 시킴으로서 컴퓨터 계산시간을 대폭 줄일 수 있다. 그리고 강제요소법은 미시적인 모델과 거시적인 모델의 중간적인 성격을 가진 해석모델이므로 구조물의 개략적인 거동을 파악하는데 매우 효과적인 해석법이라고 생각된다.

강제요소법에 의한 구형셸의 탄소성해석(I, II)에 관한 본 논문은 1988년 5월 30일 부터 6월 3일까지 개최된 DOMES FROM ANTIQUITY TO THE PRESENT에 관한 IASS 국제심포지움(Istanbul, Turkey)에 게재된 내용을 구체적으로 한글화한 것이다.

참 고 문 헌

1. Kawai, T., "New Element Model in Discrete Structural Analysis," Journal of the Society of Navel Architects of Japan, Vol. 141, PP. 174-180.
2. Tsuboi, Y., "Elasto-Plastic Analysis of Wall-Type Precast R.C. Structures by Rigid Element Method," Report of the Housing Corporation in Japan, April 1982.
3. 권택진, "철근콘크리트 원통 쉬어.월의 탄성해석," 성균관대학교논문집, 1985. 7, pp. 143-149.
4. 여백유, 김수원, 권택진, "강제요소법에 의한 원통요소의 특성에 관한 연구," 대한건축학회학술발표논문집, 1984. 4, pp. 189-192.

5. 김승덕, 서일교, 권택진, 김용부, "강제요소법에 의한 유공보의 응력해석," 대한건축학회논문집, 1985. 4, pp. 365-368.

6. 김승덕, 서삼열, 권택진, "강제요소법에 의한 원통요소의 일반화에 관한 연구," 대한건축학회학술발표논문집, 1985. 9, pp. 337-380.

7. 권택진, "철근콘크리트 원통 쉬어.월의 탄소성해석," 대한건축학회논문집, 1986. 6, pp. 151-162.

8. Kwun, Taek-Jin and Kim Seung-Deog, "Elasto-Plastic Analysis of Spherical Shell by the Rigid Element Method," Proceedings IASS Symposium on Shells, Membranes and Space Frames, Vol. 1., Sept. 1986, pp.137-144.

9. 권택진, 김승덕, 박강근, "강제요소법에 의한 내압용기의 탄소성해석," 성균관대학교논문집, 1986. 8, pp. 167-176.

10. 박강근, 정명채, 김승덕, 권택진, "강제요소법에 있어서 힘을 고려한 셸요소의 이론적 연구," 대한건축학회학술발표논문집, 1986.10, pp. 335-388.

11. 권택진, 김승덕, 박강근, "강제요소법으로 힘이 고려된 셸요소를 이용한 내압용기의 탄소성해석," 성균관대학교논문집, 1986. 11, pp. 459-469.

12. 권택진, 김승덕, 박강근, "강제요소법에 의한 철근콘크리트 셸구조물의 탄소성해석," 셸 및 공간구조에 관한 한.일.컬로우퀴업, 1987. 8, pp. 39-46.

13. 권택진, 박강근, "셸구조물의 탄소성해석에 관한 새로운 해석법의 연구," 한국기술사회지, 1987. 9, pp.5-14.

14. 박강근, 서삼열, 한상을, 권택진, "개구부 링을 갖는 반구형돔의 탄소성해석," 대한건축학회학술발표논문집, 1988. 4, pp. 393-396.

15. Kwun, Taek-Jin, Han, Sang-Eul and Park, Kang-Geun, "New Approach on the Elasto-Plastic Analysis of the Open Spherical Dome," Proceedings IASS Symposium on Domes from Antiquity to the Present, May 1988, pp. 334-342.