한국통신학회 1988년도 추계학술발표회 논문집(1988. 11. 5)

유한요소법에의한 전자파도파관의 모드해석

강 길 범* °윤 대 일** 김 정 기**
* 동명 전문대학 ** 중앙대학교

Mode analysis of electromagnetic waveguide using a finite-element method

Gil Bum KANG Dae Il YUNE Jung Ki KIM
Dongmyung Junior College, Chungang University

ABSTRACT

A finite-element method in order to investigate the propagation characteristics of waveguide is used and most of variational expressions of the propagation constant are a functional of frequency.

consequently , if the permeability or permitti-vity of the medium is a function of frequency, the calculation becomes almost impossible.

In this paper, our method can be applied to the case where the permittivity or permeability of the media is a function of frequency and is useful for the analysis of any arbitrarily di electric waveguide.

1. 서 론

유한요소법을 이용하여 Maxwell Equation 을 수식화하는 경우 물리적으로 타당한 고유모드와 함께 spurious 모드가 발생하는 것이 큰 장애가 되어 왔다 [1][2]

이러한 spurious 해를 제거하기위한 여러가지 방법들이 제안되어 부분적으로 성과가 얻어지고 있다. [3][4]

이러한 방법들은 전파상수를 주어서 주파수를 구하는 고유치문제에 귀착되어 왔다. 따라서 , 손실이나 이득을 갖는 복소매질에서는 ko가 실수로 계산이 되기까지 많은 시간을 요구하는 반복계산의 필요하게된다.

본 논문에서는 이러한 문제점을 해결하기 위하여 ko 를 주어서 전파상수를 구하는 유한요소법을 이용한 새로운 수식화를 제안한다. 이 해법의 타당성을 확인하기 위하여 구형 유전체 도파관에 대하여 다른 method에 의한 결과와 비교하였다.[5]

2. 이론해석

전파축을 Z축으로 하고, 이 전파축에 수직인 도파로의 단면을 Ω, 영역의 경계를 Γ 라 한다. 해석영역의 매질은 자성체를 포함하지 않은다고 가정하면 유전체 도파관에서 Maxwell Equation 은 다음과 같다.

$$\nabla \times ([K]^{-1} \nabla \times H) - k_0^2 H = 0 \qquad \ldots (1)$$

여기서, k_0는 wavenumber 이며, [K]는 relative permitivity Tensor 이다.

(1)식을 Green 항등식에 의해서 만족하는 functional 은 다음과 같다.

$$F = \iiint_V [(\nabla \cdot H)^* \cdot ([K]^{-1} \nabla \times H) - k_0^2 H^* \cdot H] \, dv$$
$$- \iint_S [H^* \times ([K]^{-1} \nabla \times H)] \cdot n \, ds \qquad \ldots (2)$$

경계 Γ 가 완전 도체이면 에너지가 전달될수 없으므로 포인팅 벡터는 경계면에서 접선 방향이 된다.

$$[H^* \times ([K]^{-1}\nabla \times H)]\cdot n = 0 \qquad \cdots\cdots (3)$$

따라서 완전도체에서 functional 은 다음과 같다.

$$F = \iiint_V [(\nabla \times H)^* \cdot ([K]^{-1}\nabla \times H) - k_0^2 H^* \cdot H] dv \quad (4)$$

3. 유한 요소법의 적용

해석하고자 하는 영역를 그림 1과 같이 3각형요소를 이용하여 분할하고 각 요소에서 형상함수 N_1, N_6는 면적좌표(L_1, L_2, L_3) 로 표시한다.

$$\left.\begin{array}{ll} N_1 = L_1(2L_1 - 1) & N_4 = 4L_2L_3 \\ N_2 = 4L_1L_2 & N_5 = L_3(2L_3 - 1) \\ N_3 = L_2(2L_2 - 1) & N_6 = 4L_3L_1 \end{array}\right| \cdots\cdots (5)$$

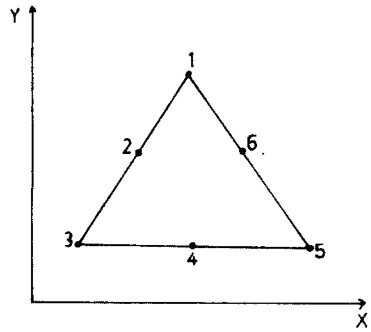

그림 1. Triangular element

자계 벡터 H를 행열표시하면 다음과 같다.

$$H = [N]^T\{H\}_e \exp(-j\beta z) \qquad \cdots\cdots\cdots (6)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} \{N\} & \{0\} & \{0\} \\ \{0\} & \{N\} & \{0\} \\ \{0\} & \{0\} & j\{N\} \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots (7)$$

(6)식을 (4)식에 대입하여 이산화하면

$$F_e = [H]^T[S]_e\{H\} - k_0^2[H]^T[T]_e\{H\} \quad \cdots\cdots (8)$$

여기서

$$[S]_e = \iint_e [P]^*[K]^{-1}[P]^T\, dx\, dy \qquad \cdots (9)$$

$$[T]_e = \iint_e [N]^*[N]^T\, dx\, dy \qquad \cdots\cdots\cdots (10)$$

$$[P] = \begin{vmatrix} \{0\} & j\beta\{N\} & \partial\{N\}/\partial y \\ j\beta\{N\} & \{0\} & \partial\{N\}/\partial x \\ j\partial\{N\}/\partial y & \partial\{N\}/\partial x & \{0\} \end{vmatrix} \quad (11)$$

(8)식을 모든 요소에 대해서 중복해서 정류조건을 이용하면 행렬방정식은 다음과 같다.

$$[S]\{H\} - k_0^2[T]\{H\} = \{0\} \qquad \cdots (12)$$

4. 고유값 문제

(12) 식에서 β를 주어서 고유값을 구하는 경우, 복소매질이나, 매질 정수값이 Ko와 함께 변하는 경우는 많은 시간을 요하는 반복계산의 필요하게 된다 여기서, Ko값을 주어서 β값을 구하는 방법으로서, 비대각 성분은 갖지 않는다고 가정한다.

(12)식에서 [S]성분을 다시 표시하면

$$[S] = \beta^2[A] + \beta[B] + [C] \qquad \cdots (13)$$

$$[A] = \begin{vmatrix} [A_{xx}] & [A_{xy}] & [A_{xz}] \\ [A_{yx}] & [A_{yy}] & [A_{yz}] \\ [A_{zx}] & [A_{zy}] & [A_{zz}] \end{vmatrix} \qquad \cdots (14)$$

$$[B] = \begin{vmatrix} [B_{xx}] & [B_{xy}] & [B_{xz}] \\ [B_{yx}] & [B_{yy}] & [B_{yz}] \\ [B_{zx}] & [B_{zy}] & [B_{zz}] \end{vmatrix} \qquad \cdots (15)$$

$$[C] = \begin{vmatrix} [C_{xx}] & [C_{xy}] & [C_{xz}] \\ [C_{yx}] & [C_{yy}] & [C_{yz}] \\ [C_{zx}] & [C_{zy}] & [C_{zz}] \end{vmatrix} \qquad \cdots (16)$$

일반적인 고유치 문제는 다음과 같이 푼다.

$$\lambda^2[P]\{H\} + \lambda[Q]\{H\} + [R]\{H\} = \{0\} \quad (17)$$

이 식에서 주파수에 의해서 고유값을 구하기 위해서 다음과 같이 표시한다.

$$\left.\begin{array}{l} [P] = [A] \\ [Q] = [B] \\ [R] = [C] - Ko^2[T] \\ \lambda = \beta \end{array}\right| \cdots\cdots\cdots\cdots (18)$$

일반적으로 (17)식을 다음과 같이 표현 할수있다.

$$\begin{bmatrix} [P] & [O] \\ [O] & [R] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(H) \\ (H) \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} [O] & [P] \\ [P] & [Q] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(H) \\ (H) \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (19)$$

5. 수치계산 예

대칭면을 가진 도파관 단면을 그림 2에 나타낸 바와같이 전체단면의 1/2영역을 6절점 3각형요소로 분할하면 요소수 Ne(4), 절점수 Np(15) 이다.
여기서, 단면의 폭을 a, 두께를 t 라고 하고, 반은 유전체로 채워져 있으며, 이때 비유전율은 1.5, 나머지 반은 진공상태이다.
먼저 전파상수을 0 에서 100 까지 일정한 간격으로 변화시킬때 그 결과를 그림 3 에 나타냈다.

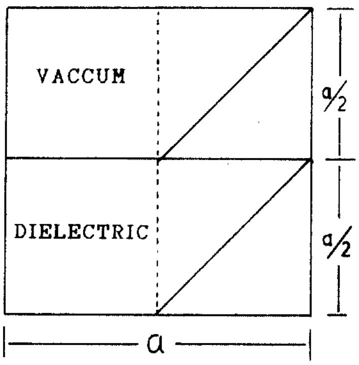

그림 2. The finite element division of dielectric loaded waveguide

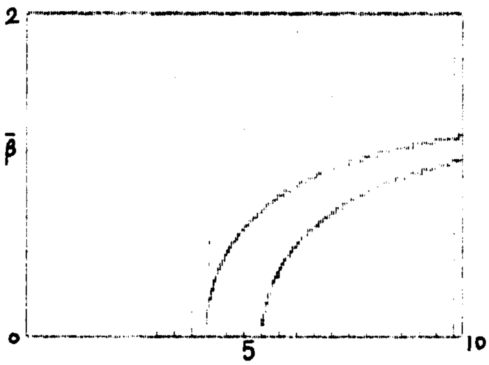

그림 3. Dispersion characteristics of wave number by a propagation constant.

여기서, 임의의 ko에 대하여 90개의 eigenvalues (propagation constants)을 구할수 있다.
앞절의 (17)식에서 주어진 고유값을 구하면 다음과 같은 형태로 표시할수 있다.

$$\frac{k_o}{\beta} = a + jb \ (a,b \text{ 는 실수})$$

와같은 형태로 표시될때 고유치는 4가지 경우로 나눌수 있다.

< 표 1> 고유치 분류

	a	b
CASE 1	0	0
CASE 2	0	≠0
CASE 3	≏0	≠0
CASE 4	≠0	0

< 표 1> 에서 알수 있는 바와 마찬가지로 case 4를 제외하고는 모두 허수 값을 표시하고 있다. 여기서 실수가 아닌 값들은 spurious 모드라고 한다.

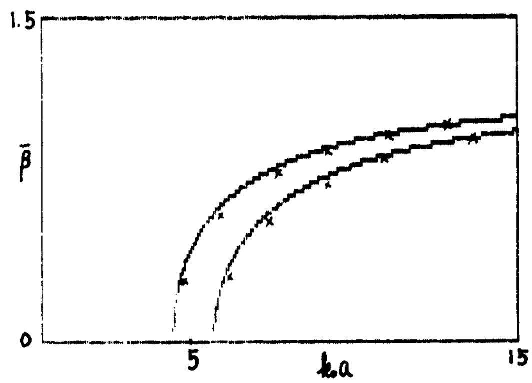

그림 4. Dispersion characteristics of a dielectric loaded waveguied

그림 4는 유전체 부하 도파로의 분산특성를 나타내고 있으며 실선은 이론해에 의해서 얻어진 값이며, X 표시는 유한요소법에 의해서 얻어진 결과로서 아주 잘 일치하는 것을 알수 가 있다.

6. 결 론

유한요소법에 의한 유전체 도파관의 고유모드를 해석하는 경우 주파수값을 주어서 전파상수를 구하는 새로운 유한요소의 **수식화**를 제안하였다.

고유치 문제를 풀때 얻어지는 해중에서 β가 실수인 모드는 도파모드이고, 전파정수가 실수가 아닌것은 spurious 모드이다. 이와같은 조건을 부과함으로서 해를 구별할수 있었다.

이 방법에 의하여 복소 매질이나, 분산성 매질을 포함하는 임의의 형상 도파관에도 적용 할수있다.

참 고 문 헌

1. C.Yeh, S.B.Dong, and W.Oliver, " Arbitrarily shaped inhomogenous optical fiber or integrated optical waveguides,"J.Appl.Phys., Vol.46, PP.2125-2129, May 1975.
2. A.Konrad, " High order triangular finite elements for electromagnetic waves in anisotropic media," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol.MTT 25, PP.353-360, May 1977.
3. M.Mabaya, P.E.Lagasse, and P.Vandenbulcke, " Finite element analysis of optical waveguides," IEEE Trans.Microwave Theory Tech., Vol.MTT 29, PP.600 605, June 1981.
4. B.M.A.Rahman and J.B.Davies, " Finite element analysis optical and microwave waveguide problems,"IEEE Trans.Microceave Theory Tech., Vol. MTT 32, PP.20 28, Jan.1984.
5. J.E.Goell, " A circular harmonic computer analysis of rectangular dielectric waveguides," Bell Syst.Tech.J., 48,7, PP.2133-2160