한국통신학회 1988년도 추계학술발표회 논문집(1988. 11. 5)

4광파 혼합을 이용한 결합파 방정식 해석에 관한 연구

서 석 철*, 김 은 수, 양 인 응
광운대학교 전자공학과

A Study on the Analysis of Coupled Wave Equations using the Four Wave Mixing

Suk Chul Suh*, Eun Soo Kim, In Eung Young
Dept. of Electronics Eng. Kwang-Woon University

국 문 요 약

본 논문에서는 처음으로 펌프파의 세기가 선형흡수를 무시한 광굴절 결정체 내에서 변하는 경우를 고려한 반사형 4광파 혼합 결합파 방정식의 정확한 해를 구하였다.

위상공액거울(Phase Conjugate Mirror; PCM)과 연관된 수치 해석 결과, 다안정성(Multistability)과 자기발진(Self-Oscillation)도 가능함이 분석되었다.

1. 서 론

최근 광굴절 결정체에서 4광파 혼합을 이용한 위상공액 광학에 관한 연구가 활발히 진행되고 있다.

광굴절 결정체는 가시광선 영역 이상의 주파수를 갖는 낮은 출력의 광파에 대해서도 강한 비선형 효과를 나타내므로, 이런 성질을 광 왜곡보상, 실시간 광 신호 처리, 광빔 증폭, 실시간 홀로그래픽 간섭계, 비선형 레이저 분광학, 레이저 동공 내 왜곡보상 등에 이용할 수 있다. [1],[3],[4]

1972년 Zel'dovich 등은 유도 Brillouin 산란(Stimulated Brillouin Scattering)실험에서 최초로 광 위상공액 현상을 관찰하였으며, 1977년 Yariv와 Pepper에 의해 간섭패턴과 회절격자 사이에 위상 차가 존재하지 않는 Kerr-like medium에서 4광파 혼합 광 위상공액 이론이 공식화 되면서, 간섭패턴과 회절격자 사이에 위상차가 존재하는 광굴절 결정체에서의 4광파 혼합 결합파 이론이 연구되었다. [2] - [4] 그 결과로 광 위상공액 반사율의 쌍안정성(Bistability)과 다안정성(Multistability), 그리고 자기발진(Self-Oscillation)과 같은 흥미로운 특성이 관찰 되었다. [4] - [6]

그러므로 본 논문에서는 선형흡수를 무시한 광굴절 결정체에서 펌프파의 세기가 결정체 내에서 변하는 경우를 고려한 반사형 4광파 혼합 결합파 방정식의 일반해를 구하고, 이 때 나타나는 위상공액 반사율의 불안정 특성을 연구한다.

2. 결합파 방정식의 정확한 해

일반적으로 위상 공액파를 발생시키기 위하여 축퇴 4광파 혼합법을 사용하는데 그 개요도를 그림1에 나타내었다.

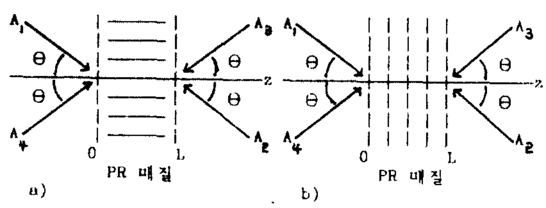

그림 1. 4광파 혼합법의 개요도.
a) 투과형 실시간 홀로그래피
(빔 A_1, A_4와 A_2, A_3 가 서로 가간섭성)
b) 반사형 실시간 홀로그라피
(빔 A_1, A_3와 A_2, A_4 가 서로 가간섭성)

먼저 그림1 b 에서 빔 A_1, A_3와 A_2, A_4가 서로 가간섭성이어서 반사형 회절격자가 지배적인 경우, 결합파 방정식은 다음과 같이 간단히 쓸 수 있다. 이 때 선형흡수 α는 무시할 수 있다고 가정한다.

$$-\frac{dA_1}{dz} = \frac{\gamma}{I_0} \left[A_1 A_3^* + A_2^* A_4 \right] A_3 \qquad (2\text{-}1a)$$

$$\frac{dA_2^*}{dz} = \frac{\gamma}{I_0} \left[A_1 A_3^* + A_2^* A_4 \right] A_4^* \qquad (2\text{-}1b)$$

$$\frac{dA_3^*}{dz} = \frac{\gamma}{I_0} \left[A_1 A_3^* + A_2^* A_4 \right] A_1^* \qquad (2\text{-}1c)$$

$$\frac{dA_4}{dz} = \frac{\gamma}{I_0} \left[A_1 A_3^* + A_2^* A_4 \right] A_2 \qquad (2\text{-}1d)$$

여기서, 결합상수 γ를 다음과 같이 정의한다.

$$\gamma = -\frac{jWn_{II}\exp(j\phi_{II})}{2C\cos\theta} \qquad (2\text{-}2)$$

식 (2-1)은 다음과 같은 에너지 보존 법칙을 만족한다.

즉, C, g_o, d_1, d_2 는 z방향에 대해 상수이다.

$$C = A_1A_2 - A_3A_4 \qquad (2\text{-}3a)$$

$$g_o = (A_1A_3^* + A_2^*A_4)\exp(-\gamma z) \qquad (2\text{-}3b)$$

$$d_1 = A_1A_1^* - A_3A_3^* = I_1 - I_3 \qquad (2\text{-}3c)$$

$$d_2 = A_2A_2 - A_4A_4 = I_2 - I_4 \qquad (2\text{-}3d)$$

식 (2-3b)를 식 (2-1)에 대입한 후, I_o를 구하면

$$I_o(z) = [\ 4|g|^2 \exp(\gamma+\gamma^*)z + K^2\ ]^{1/2} \qquad (2\text{-}4)$$

여기서 K는 적분 상수로서 $I_o(0)$와 $I_o(L)$에 따라 표현될 수 있으며, 식 (2-4)를 통하여 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

i) 간섭패턴과 굴절지수 회절격자 사이의 위상차가 0인 경우 ; 결합상수 γ의 위상이 0이 되어, 허수값만을 갖게되므로 4광파의 세기 합 $I_o(z)$는 결정체 내에서 z에 무관한 상수값이 된다.

ii) 위상차가 0이 아닌 경우 ; 결합상수 γ의 위상이 0이 아니므로 γ가 허수값과 실수값을 동시에 갖게 되어 $I_o(z)$는 결정체 내에서 변하게 됨을 알 수 있다.

이제 결합파 방정식의 정확한 해를 구하기 위하여, 식 (2-3),(2-4)를 이용하여 $A_{12} \equiv A_1/A_2^*$, $A_{34} \equiv A_3^*/A_4$ 에 대한 표현식을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{dA_{12}}{dz} = -\frac{\gamma}{I_o}\,[\ C + (\ d_1 - d_2)\ A_{12} - C^*(A_{12})^2] \qquad (2\text{-}5a)$$

$$\frac{dA_{34}}{dz} = \frac{\gamma}{I_o}\,[\ C^* + (\ d_1 - d_2)\ A_{34} - C\ (A_{34})^2] \qquad (2\text{-}5b)$$

식 (2-4)를 식 (2-5)에 대입한 후, 일차 선형 미분 방정식을 직접 적분법에 따라 풀면 $A_{12}(z)$와 $A_{34}(z)$에 대한 일반해가 다음과 같이 구해진다.

$$A_{12}(z) = \frac{S_+D\ \exp(-\mu(z)) - S_-D^{-1}\exp(\mu(z))}{2C^*[\ D\ \exp(-\mu(z)) - D^{-1}\exp(\mu(z))\ ]} \qquad (2\text{-}6a)$$

$$A_{34}(Z) = \frac{S_+E\ \exp(\mu(z)) - S_-E^{-1}\exp(-\mu(z))}{2C\ [\ E\ \exp(\mu(z)) - E^{-1}\exp(-\mu(z))\ ]} \qquad (2\text{-}6b)$$

여기서,

$$\mu(z) = \frac{Q}{2I}\gamma z \qquad ,\mathrm{Re}(\gamma) = 0 \quad (2\text{-}7a)$$

$$= \frac{Q}{2K}\,\frac{\gamma}{\gamma+\gamma^*}\,\ln [\ \frac{I_o - K}{I_o - K}\ ],\mathrm{Re}(\gamma) \neq 0 \quad (2\text{-}7b)$$

또한 다음과 같은 량을 정의한다.

$$\Delta = d_1 - d_2 \qquad (2\text{-}8a)$$

$$Q = (\ \Delta^2 + 4|C|^2\ ) \qquad (2\text{-}8b)$$

$$S_\pm = \Delta \pm Q \qquad (2\text{-}8c)$$

식 (2-6)에서 D,E 는 적분상수이다.

외부에서 공급된 펌프파를 갖는 위상공액거울(Phase Conjugate Mirror)의 반사율을 구하기 위하여, 먼저 식 (2-6)에 광굴절 결정체의 경계면 z=0과 z=L을 대입하여 이미 정의한 상수와 알고 있는 4광파의 세기에 따라 D, E를 구한 후 $|C|^2$ 에 대해 풀면 다음식을 얻는다.

$$\frac{Q + [\ \Delta + 2I_2(L)\ ]\tanh(\mu)}{Q - [\ \Delta - 2|C|^2/I_2(L)\ ]\tanh(\mu)} \qquad (2\text{-}9)$$

$$= \frac{I_1(0)\cdot I_2(L)}{|C|^2}\,\frac{Q + \Delta\tanh(\mu)}{Q + [\ \Delta - 2I_4(0)\ ]\tanh(\mu)}$$

여기서,

$$\mu = \frac{Q}{2I_o}\gamma L \qquad ,\mathrm{Re}(\gamma) = 0$$

$$= \frac{Q}{2K}\gamma L\ [1 + \frac{1}{\mathrm{Re}(\gamma L)}\ln\frac{I_o(0) + K}{I_o(L) + K}\ ],\mathrm{Re}(\gamma) \neq 0 \qquad (2\text{-}10)$$

3 결과 분석및 고찰

이 절에서는 본 논문에서 구한 반사형 4광파 혼합 결합파 방정식의 일반해를 $\phi \neq 0$, $\phi = 0$로 나누어서 고찰한다.

i) 간섭패턴과 회절격자 사이의 위상차가 0이 아닌 경우; 위상공액 반사율은 다음과 같이 주어진다.

$$R \equiv |A_{34}(0)|^2 = 4|C|^2 \left(\frac{\tanh(\mu)}{\Delta\tanh(\mu) + Q} \right)^2 \qquad (3\text{-}1)$$

ii) 간섭패턴과 굴절지수 회절격자 사이의 위상차가 0인 경우; 식 (2-9)는 다음과 같이 줄어든다.

$$\tan^2|\gamma|\frac{\gamma L}{2} = \frac{|\gamma|^2(\ B_1 - |\gamma|^2 + B_2)}{|\gamma|^2(\ 1 - B_1) - B_2} \qquad (3\text{-}2)$$

여기서, $|\gamma| = Q/I_o$

$$I_o = I_1(0) + I_2(L) + I_3(L) + I_4(0)$$

$$\Delta = I_1(0) - I_2(L) + I_4(0)$$

$$B_1 = 4I_1(0)I_2(L)/I_o^2,\ B_2 = (\ \Delta/I_o)^2$$

그러므로 위상공액파의 반사율은 다음과 같이 주어진다..

$$R = \frac{4|C|^2\tan^2(\mu)}{\Delta^2(\ 1 + \tan^2(\mu)\ ) + 4|C|^2} \qquad (3\text{-}3)$$

이상으로 수치해석적으로 위상공액 반사율을 구하기에 용이한 식 (3-1)과 식 (3-3)을 유도하였다. 여러가지 입력빔의 세기에 따라 위상공액 반사율를 고려할 때, 다음과 같은 매개변수를 정의하는 것이 편리하다.

펌프율(Pump Ratio): $r = I_2(L)/I_1(0)$ (3-4a)

탐사율(Probe Ratio): $q = I_4(0)/(I_1(0)+I_2(L))$ (3-4b)

위상공액거울의 경우(즉, $I_3(L) = 0$)와 관련된 몇가지 수치해석 결과를 그림2,3에 나타내었다. 그림2에서는 $\phi = 0$인 경우, 펌프율과 탐사율이 $r = 2$와 $q = 0.033$일 때, 유효 결합력 $\gamma L/2$의 함수로 위상공액 반사율 R을 도시

하였다. 결합력이 클수록 R의 최대값이 오른쪽으로 치우치며 쌍안정 동작이 가능하다. 그림2는 Bledowski등이 제시한 그림2의 결과와 일치한다. 그림3에서는 $\phi=\pi/2$인 경우, $\Gamma L = -3$일 때, 펌프율 r과 탐사율 q의 함수로서 위상공액 반사율 R의 경로를 도시하였다. 결과적으로 탐사율이 0에 가까와짐에 따라 위상공액 반사율 R이 무한대가 되어, 자기 발진(Self Oscillation)이 가능하리라 예측된다. 또한 Cronin-Golomb등의 결과는 본 논문에서 탐사율의 역수를 취한 결과인 그림3과 일치하였다. [4],[6] 그 원인은 전방 펌프파와 후방 펌프파의 기호표시가 서로 바뀐 결과이다.

4. 결 론

본 논문에서는 선형흡수를 무시한 광굴절 결정체에서 펌프파의 세기가 결정체 내에서 변하는 경우를 고려한 4광파 혼합 결합파 방정식의 정확한 해를 구하였다.

본 논문에서 구한 몇가지 수치해석 결과를 통하여 광간섭패턴과 굴절지수 회절격자 사이의 위상차 ϕ가 0인 경우, $\Gamma L > \pi$인 조건하에서 다중해가 존재함을 알 수 있었으며, 결합력이 클수록 R의 최대값이 오른쪽으로 치우쳐 쌍안정 동작이 가능하였다. 이 결과는 불안정 특성이 빔세기에 따라 좌우되는 Kerr-Like Medium에서의 경우와 대조되었으며, Bledowski 논문의 결과와 일치하였다. 또한 ϕ가 $\pi/2$인 경우, 펌프율과 탐사율의 함수로 위상공액 반사율 R의 경로를 도시하였으며, 탐사율이 0에 가까와짐에 따라 위상공액 반사율이 무한대로 근사하여 자기발진이 가능함을 예측할 수 있었다.

참 고 문 헌

1. J.P.Huignard and A.MarraKchi,"Coherent signal beam amplification in two-wave mixing experiments with photorefractive Bi SiO Crystals", Opt.Commun., Vol.38, P.249-254, 1981.
2. B.Ya.Zel'dovich, V.I.Popovichev, V.V.Raguel'skii, and F.S.Faizullov, "Connection between the wavefronts of the reflected and exciting light in stimulated Mandel'Shtam-Brillouin scattering", Sov.Phys. JETP, Vol.15, P109-113, 1972.
3. A.Yariv and D.M.Pepper, "Amplified reflection, Phase conjugation,and oscillation in degenerate four-wave mixing", Opt.Lett.,Vol.1, P16-18, 1977.
4. M.Cronin-Golomb, B.Fischer, J.O.White, and A.Yariv, "Theory and Applications of four-wave mixing in photorefractive media",IEEE J.Quantum Electron., Vol. QE-20, P12-30, 1984.
5. A.Bledowski and W.KroliKowsKi, "Anisotropic four-wave mixing in cubic photorefractive Crystals", IEEE J.Quan. Elec., Vol.24, P.652-659, 1988.
6. Bledowski, W.Krolikowski, and A.Kujawski, "Multistabilty in reflection grating real-time holography," IEEE J.Quan.Elec.,Vol. QE-22, P.1547-1550, 1986.

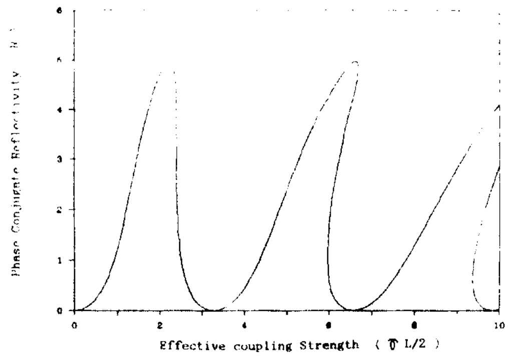

그림 2. 유효 결합력 L/2에 대한 반사율 R의 결과
(r = 2, q = 0.033)

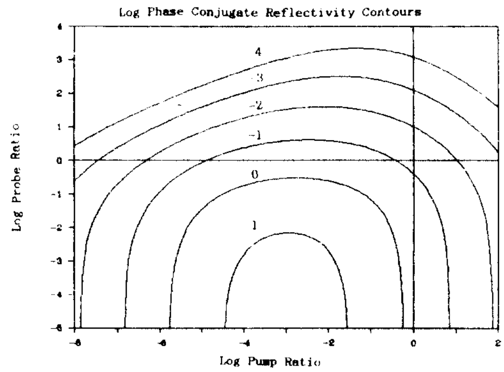

그림 3. 펌프율 r과 탐사율 q에 대한 반사율 R의 경로도
($\Gamma L = -3$)