

입방체 3축시험에 의한 콘크리트의 구성모델

Constitutive Modelling for Hard Materials Using Cubical Triaxial Test

1. 서론

경화재료 (Concrete 나 Rock)에 대한 응력-변형율의 거동특성이 선형탄성, 비선형탄성, 탄소성론 등의 이론을 도입하여 오랜 기간동안 연구되어 왔으며 이는 다양한 하중하에서 재료의 거동특성을 보다 정확하게 설명할 수 있는 적절한 구성방정식이 요구되기 때문이다.

콘크리트의 파괴거동을 정의하는 초기모델중의 하나가 Kupfer 와 Qerstle (1973)에 의해 제안되었는데 이들은 2축인장, 2축압축 그리고 인장, 압축영역에 대한 파괴면의 정의를 서술하였다. William과 Warnke(1974)는 파괴포락선을 서술하는데 5개의 매개변수를 필요로 하였으며 평균등방응력 ($J_1/3$), 8면체전단응력의 평균치 ($\tau = \frac{2}{5} \sqrt{J_{2D}}$), Lode angle (θ)의 향으로써 표현하였으며 Ottosen (1977)에 의한 모델은 4개의 매개변수를 이용하였는데 8면체전단응력 ($\tau_0 = \sqrt{2J_{2D}/3}$), 평균수직응력 ($J_1/3$), 각 θ 로써 표현하였다. 또한 Lade(1982)는 콘크리트에 대한 파괴거동을 예측하기 위해 J_1, J_2, J_3 의 향으로 나타낸 항복합수 F로써 Model을 제시하였다.

한편 Concrete와 Rock의 경화거동을 서술하기 위한 탄소성모델이 Mroz(1972), Sudian and Schnobrich(1973), Wu(1974), Chen and Chen(1975, 1980) 등에 의해 제안되었다. 이 개념은 Concrete와 Rock에 대한 탄성한계를 나타내는 초기항복면과 지속적인 하중에 의한 항복궤적을 나타내는 항복면을 정의하고 있으며 파괴면에서 최종 항복면은 체적변화가 없는 응력상태로써 정의하고 있다.

또한 Bazant(1980)은 2개의 항복면에 기

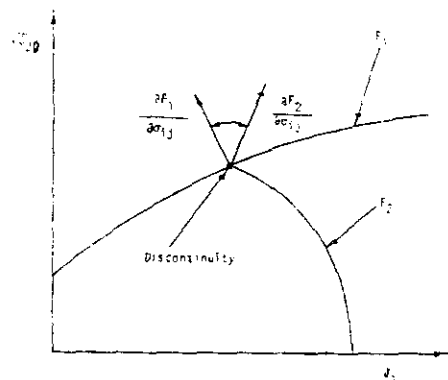


Fig.1.1. Typical Example of Two Yield Surface

초를 두고 탄성 혹은 소성체적변화를 나타내는 평균응력 ($J_1/3$), Strain-softening, 전단으로 인한 소성체적변화, 그리고 파괴거동 등 많은 요소들을 설명하고 있다. 그러나 이들 모델의 중요한 결점은 항복이 각각 다른 기울기의 불연속교차로 인해 두개의 분리된 항복함수에 의해 지배된다는 점이다(Fig.1.1). 이것은 불연속교차점에서 normal 에 대한 비유일성을 나타낸다. 즉 associative flow rule 에서 소성변형률증분은 하중점에서 항복면에 수직이라 정의하고 있으나 두 항복면의 교차점에서는 이를 정의할 수 없다. 따라서 이들을 해결하기 위해 두 항복곡면 대신 만일 유일한 항복면이 이용된다면 이와같은 문제점을 해결할 수 있다. 본문은 콘크리트를 등방경화재료로 가정하고 소성이론에 기초를 둔 구성방정식에 대한 항복조건을 만족시키도록 연속적인 경화와 극한파괴에 대한 적절한 모델을 서술하고 이를 입방체 3축시험을 통해 매개변수를 결정하고 동시에 이들을 증명코자 한다.

2. 항복조건에 관한 다항식

항복함수는 주로 응력성분의 항으로 나타낸 다항식이나 응력 tensor 의 불변량으로 나타낸다. Desai(1980) 에 의해 제안된 항복함수 F는 다음과 같이 $J_1, J_2^{1/2}, J_3^{1/3}$ 의 다항식으로 나타내고 있다.

$$\begin{aligned}
 F(J_1, J_2^{1/2}, J_3^{1/3}) = & \alpha_0 + \alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2^{1/2} + \alpha_3 J_3^{1/3} + \alpha_4 J_1^2 + \alpha_5 J_1 J_2^{1/2} + \alpha_6 J_2 \\
 & + \alpha_7 J_1 J_3^{1/3} + \alpha_8 J_2^{1/2} J_3^{1/3} + \alpha_9 J_3^{1/3} + \alpha_{10} J_1^3 + \alpha_{11} J_1^2 J_2^{1/2} \\
 & + \alpha_{12} J_1^2 J_3^{1/3} + \alpha_{13} J_1 J_2 + \alpha_{14} J_1 J_3^{2/3} + \alpha_{15} J_2 J_3^{1/3} + \alpha_{16} J_2^{3/2} \\
 & + \alpha_{17} J_2^{1/2} J_3^{2/3} + \alpha_{18} J_3 + \alpha_{19} J_1 J_2^{1/2} J_3^{1/3} + \dots \dots \dots \quad (2-1)
 \end{aligned}$$

여기서 $J_1 = \sigma_{ii}$, $J_2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ji}$, $J_3 = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki}$ 로써 응력 tensor 불변량이다.

상수 α_i ($i=1, 2, \dots, 3$)는 재료의 반응함수이다.

식(2-1)은 여러 연구자들에 의해 제안된 식들의 일반화로써 설명할 수 있으며 초기 등방재료에 대해 다음과 같이 F로써 표현할 수 있다.

$$F = F(J_i, I_i^P, K_j, \alpha_m) \quad (2-2)$$

여기서 I_i^P ($i=1, 2, 3$)는 소성변형률 tensor (ϵ_{ij}^P) 불변량

K_j ($j=1, 2, 3, 4$)는 응력불변량과 소성변형률 tensor 의 혼합한 것으

로 소성변형의 비등방성을 내포하고 있다.

$a_m (m=1, 2, \dots, n)$ 은 소성일과 같은 Scalar 값

식 (2-1) 은 식 (2-2) 의 특별한 경우로서 소성체적변형율과 소성축차변형율의 합인 전소성변형율의 항에서 재료상수나 반응함수로서 나타내는 계수 α_i 와 혼합한 항복경화거동과 더불어 J_1 의 항으로 표현한 것이다. 여기서는 등방경화의 경우이므로 K_j 는 포함되지 않는다. 또한 식 (2-1) 의 다항식으로부터 적절한 항을 선택함으로써 Tresca, Von Mises, Mohr-Coulomb, Drucker-Prager, Critical State, Cap 과 같은 model 에 적용한 항복함수를 얻을 수 있다 (1980). 또한 최근에는 Lade (1982) 에 의해 수정된 식이 Concrete 의 거동을 서술하는데 이용되고 있다. 극한조건은 응력-변형률곡선에서 응력의 접근치로서 나타냈다. Peak 상태와 같은 파괴상태, 체적변형율이 무시되는 한계상태 등은 극한상태와 일치하거나 그 아래에 존재한다. 여기서 극한상태란 극한항복상태로 표현되기도 하며 기본적으로

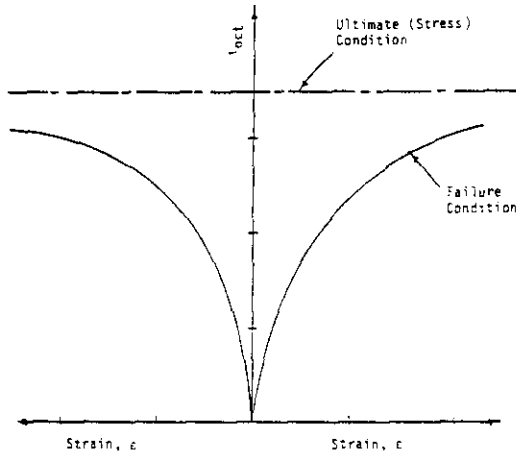


Fig.2.1. Stress Condition
Typical Stress-Strain
Response

$$\frac{J_1 J_3^{\frac{1}{3}}}{J_2} = C \quad (2-3)$$

로써 모든 재료에 대해 극한조건에서 불변값 C로 나타낸다.

흙의 거동을 서술하는 소성증분론에서 항복을 정의하는데 이용되는 항복함수의 하나로서 식 (2-1) 을 근거로 하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F = J_{2D} - F_D F_S \quad (2-4)$$

여기서 J_{2D} 는 축차응력 tensor 의 불변량
 F_D 는 기초함수, F_S 는 형상함수이다.

식 (2-4) 의 특별한 형태의 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} F(J_1, J_{2D}, J_{3D}) &= J_{2D} - (-\alpha J_1^n + r J_1^2) (1 - \beta S_r)^m \\ &= J_{2D} - F_D F_S \end{aligned} \quad (2-5)$$

여기서 α, β, r, n, m 은 반응함수로서 β, r, n 은 재료상수, α 는 growth 함수 (hardening 혹은 softening), $m = -\frac{1}{2}$, J_{2D} 는 축차응력 tensor 의 2차불변량, $S_r = J_{3D}^{\frac{1}{3}} / J_{2D}^{\frac{1}{2}}$ 이다.

식 (2-5) 는 콘크리트나 암반과 같이 압력에 예민한 재료의 항복과 파괴를 서술

하기 위해 이용되고 여러 평면에서 항복곡면의 형상을 잘 나타내고 있다. 또한 항복과 극한파괴를 유일한 항복곡면으로 나타낼 수 있다.

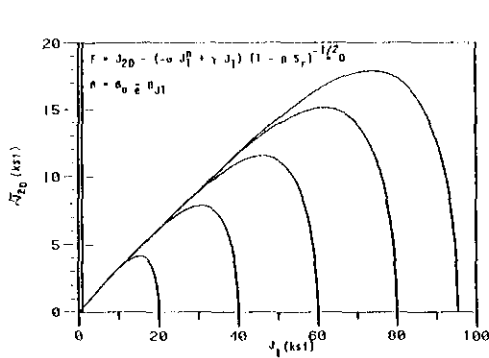


Fig.2.2. Plot of the Proposed Yield Function in $\sqrt{J_{2D}}-J_1$ Plane for TC Test ($\theta = -30^\circ$) for Various α .

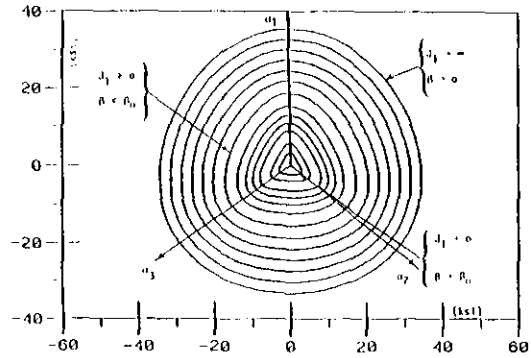


Fig.2.3. Typical Proposed Yield Surface for J_1 .

또한 8면체면에서 높은 압력에서는 항복곡면은 거의 원과 같고, J_1 이 감소하면 각이 둥그스런 3각형으로 변하고 J_1 이 0인 한계에서는 각이 뾰족한 삼각형꼴이 된다.

식 (2-5)에서 β 는 다음과 같이 J_1 의 함수로 나타낼 수 있다.

$$\beta = \beta_0 e^{-\beta_1 J_1} \quad (2-6)$$

여기서 β_0 와 β_1 은 재료상수이고 식 (2-6)으로부터 $J_1 = 0$ 일때 $\beta = \beta_0$ 이고 J_1 이 무한대일때 $\beta = 0$ 이다 (Fig.2.3).

Fig.2.4는 실험에 대한 다양한 응력경로를 나타내고 있다.

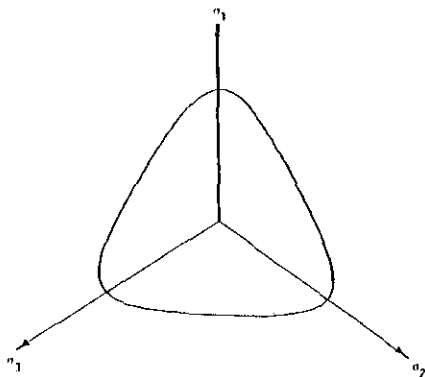


Fig.2.4(a) Plot of the Proposed Yield Function in π -Plane ($J_1 = 0$)

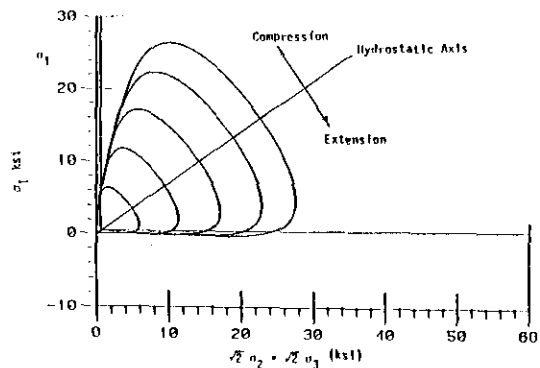


Fig.2.4(b) Plot of the Proposed Yield Function in Triaxial Plane

경화함수 α 는 다음과 같이 매개변수 (ξ)의 함수로 나타낸다.

$$\alpha = \alpha(\xi) \quad (2-7)$$

$$\text{여기서 } \xi = \int (d\varepsilon_{ij}^p \ d\varepsilon_{ij}^p)^{\frac{1}{2}} \quad (2-8)$$

로써 소성변형을증분 tensor 로 나타낸 전소성변형을계적이다.

또한 ξ 는 소성체적변형과 소성축차변형의 차로써 다음과 같이 나타낸다.

$$\xi_D = \int (de_{ij}^p \ e_{ij}^p)^{\frac{1}{2}} \quad (2-9)$$

$$\xi_V = \sqrt{\frac{1}{3}} \int d\varepsilon_{kk}^p \quad (2-10)$$

$$\text{여기서 } de_{ij}^p = d\varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{3} d\varepsilon_{kk}^p \delta_{ij} \quad (2-11)$$

로써 축차소성변형을증분이다.

위 ξ 과 더불어 α 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\alpha = \frac{a_1}{\xi \eta_1} \quad (2-12)$$

여기서 a_1 과 η_1 은 소성경화에 관련되는 재료상수이다.

여러 α 값들에 대해 $\sqrt{J_{2D}} - J_1$ 번에 plot 하면 Fig.2.2와 같이 항복면을 나타낼 수 있다.

3. 실험

본 실험은 $4' \times 4' \times 4'$ ($10.16 \text{ cm} \times 10.16 \text{ cm} \times 10.16 \text{ cm}$)의 입방체시료로써 Fig. 3.1(a, b, c)과 같이 3차원응력공간 8면체면, 3축면에 있는 3축응력 상태에서 콘크리트 재료의 구성관계와 강도를 얻기 위해 Truly 3축시험을 시행하였다.

3.1. 3축면에서의 응력경로

3.1.1. Hydrostatic compression test (HC)

체적저동을 알기 위하여 unloading과 reloading을 4회 반복 (2 ksi , 4 ksi , 6 ksi , 8 ksi)하여 $\sigma_{oct} - \varepsilon$, $\sigma_{oct} - \varepsilon_V$ 관계를 나타냈다. 수직변형 (ε_x)이 수평보다 작은데 이는 시료를 제작할 때 다짐의 영향으로 생각된다. 반복하중의 기울기로부터 K (체적계수) 값을 얻는다.

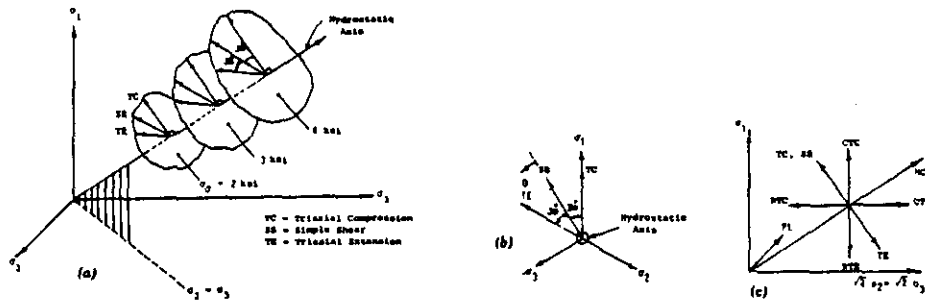


Fig.3.1. Schematic of Commonly Used Stress Paths in: (a) 3-D Stress Space ; (b) Octahedral Plane ; (c) Triaxial Plane (Compression Stresses Positive)

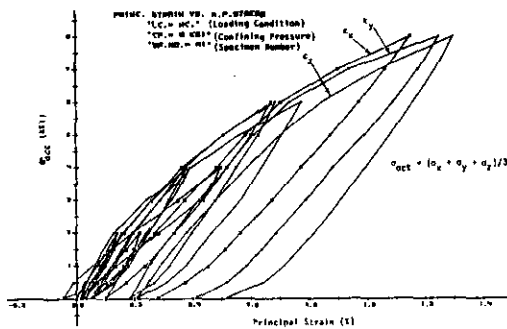


Fig.3.2. Stress-Strain Response Curves for HC Test

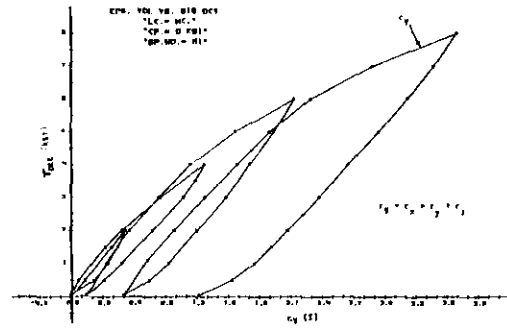


Fig.3.3. Average Stress-Strain Response Curve for HC Test.

3.1.2. Conventional Triaxial Compression test (C.T.C)

초기 등방응력 σ_0 를 0, 1KSi, 2 KSi, 3KSi 에서 시행하여 $\sigma_1 - \epsilon$, $\sigma_{oct} - \epsilon_V$ 관계를 Fig.3.4, Fig.3.5 에 나타냈다.

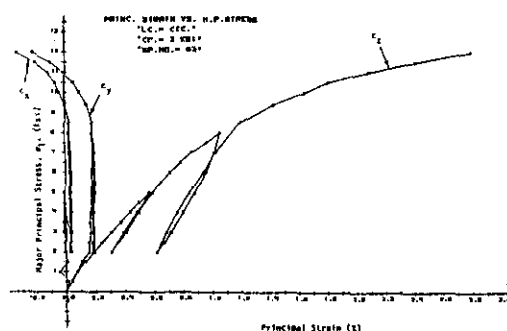


Fig.3.4. Stress-Strain Response Curves for CTC

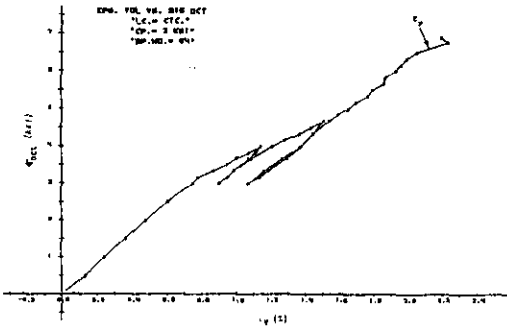


Fig.3.5. Average Stress-Volumetric Strain Response Curve for CTC.

3.1.3. Reduced Triaxial Extension (R. T. E)

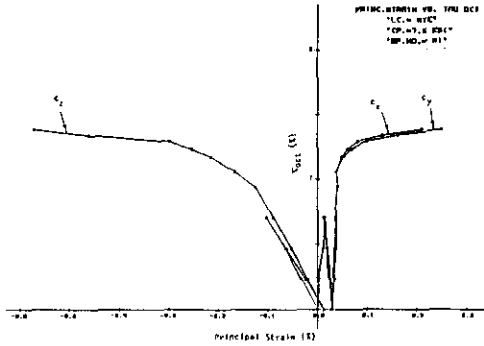


Fig.3.6. Stress-Strain Response Curves for RTC

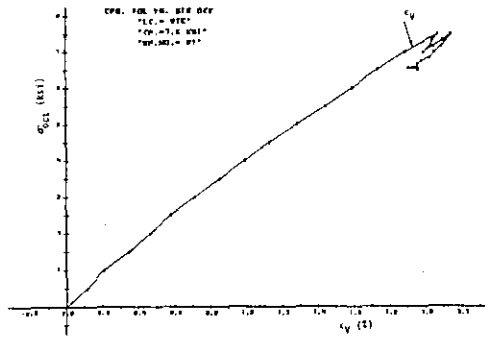


Fig.3.7. Stress-Volumetric Strain Response Curve for RTC

Fig.3.6과 Fig.3.7은 초기 등방압력 σ_0 를 7.5 KSI 이고 $\tau_{oct} - \epsilon$, $\sigma_{oct} - \epsilon_V$ 의 관계를 나타냈으며 $\tau_{oct} - \epsilon$ 관계에서 3개의 주변형률 ($\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$)에 대한 소성변형율을 얻을 수 있다.

3.2. 8면체 평면에서의 실험

3.2.1. Triaxial Compression (T.C)

$\sigma_i = 2, 3 \text{ KSI}$ 로서 최대주응력 σ_1 이 증가할 때 최소주응력 σ_2, σ_3 이 감소한다. 여기서 σ_{oct} 는 $\Delta \sigma_1 = 2\Delta \sigma_2 = 2\Delta \sigma_3$ 이므로 일정하다. 실험동안에 체적거동이 압축을 받다가 dilation 초기에 거의 선형의 인장을 일으킨다. 이 현상은 일정한 구속응력에서 전단비틀림을 일으키기 때문이다 (Fig.3.8, Fig.3.9, Fig.3.10).

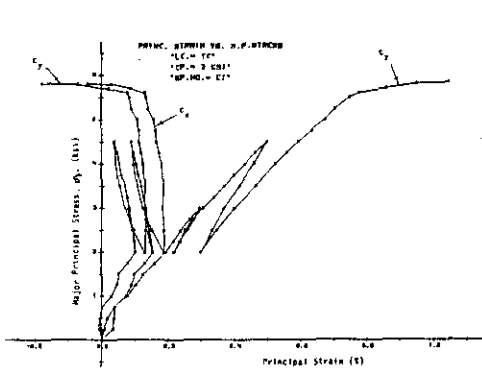


Fig.3.8. Stress-Strain Response Curves for TC Test

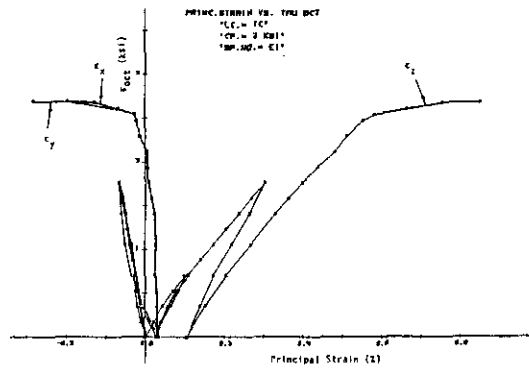


Fig.3.9. Stress-Strain Response Curves for TC Test

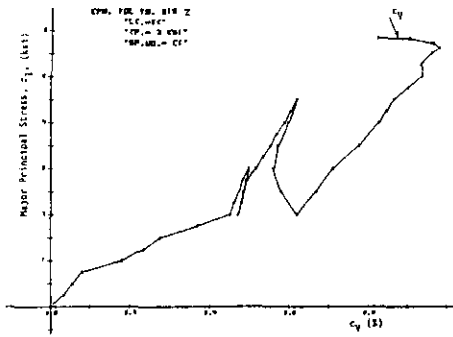


Fig.3.10. Stress-Volumetric Strain Response Curves for TC Test

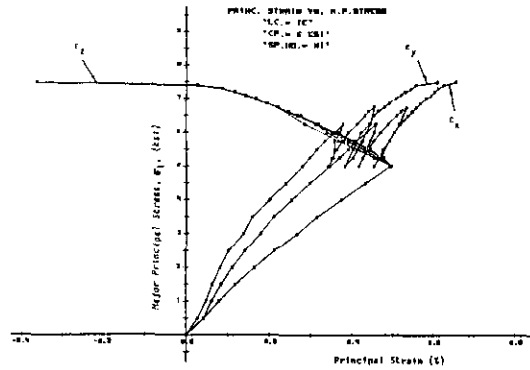


Fig.3.11. Stress-Strain Response Curves for TE Test.

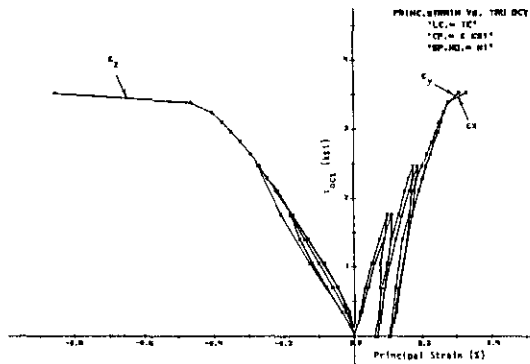


Fig.3.12. Stress-Strain Response Curves for TE Test

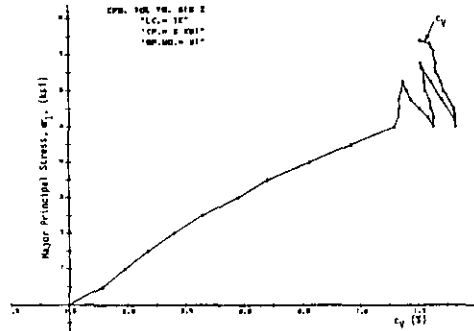


Fig.3.13. Stress-Volumetric Response Curve for TE Test

3.2.2. Triaxial Extension (TE)

초기동방압력 5ksi 에서의 시험결과를 Fig.3.11, Fig.3.12, Fig.3.13과 같이 $\sigma_1 - \epsilon$, $\tau_{oct} - \epsilon_1$, $\sigma_1 - \epsilon_V$ 의 관계를 나타냈다.

3.3. 8면체 응력-변형을 관계

8면체 수직응력 σ_{oct} 와 전단응력 τ_{oct} , 8면체 수직변형을 ϵ_{oct} 와 전단변형을 τ_{oct} 을 다음 식에 의해 주응력과 주변형율의 향으로 나타낸다.

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$\epsilon_{oct} = \frac{1}{3} (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)$$

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2}$$

Fig.3.14 ~ 3.17 에는 CTC, RTE, TC, TE 의 시험을 하여 $\tau_{oct} - \gamma_{oct}$ 의 관계로 나타냈으며 본 시험을 통해 전단탄성계수 G 값을 얻을 수 있다.

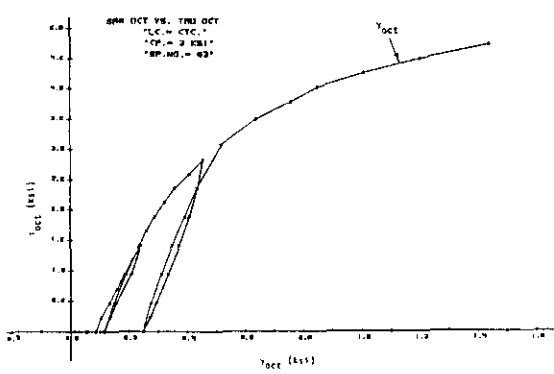


Fig.3.14. Octahedral Stress-Strain Response Curve for CTC Test

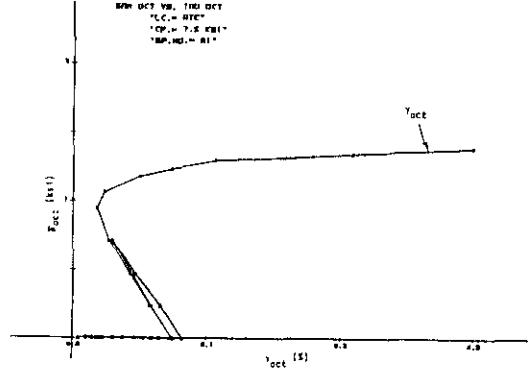


Fig.3.15. Octahedral Stress-Strain Response for RTE Test

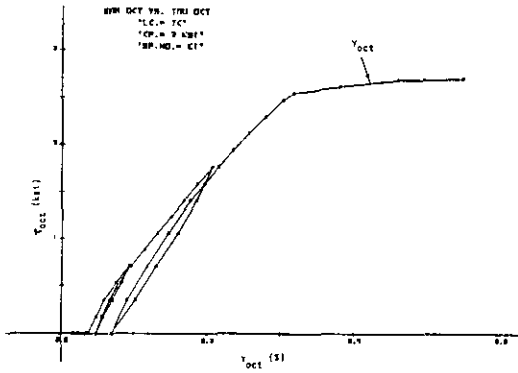


Fig.3.16. Octahedral Stress-Strain Response Curve for TC Test

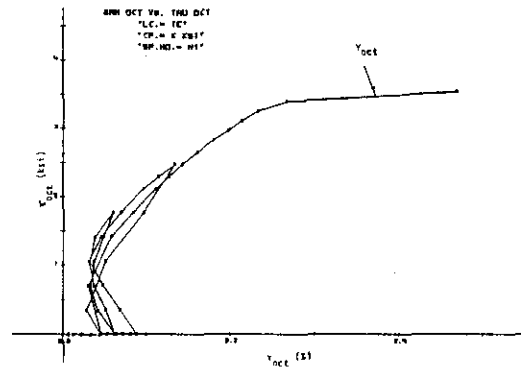


Fig.3.17. Octahedral Stress-Strain Response Curve for TE Test

4. 재료상수의 결정

재료상수는 다음 3 범주로 나눈다.

- 1) 탄성상수 E, ν 혹은 G, K
- 2) 경화항복함수 n, β_0, β_1, r
- 3) 경화상수 a_1, n_1

4.1. 탄성상수

등방압축실험으로부터 σ_{oct} 와 ϵ_V 의 관계에서 unloading-reloading 곡선으로부터 체적계수 K 를 구한다.

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (4-1)$$

또한 TC, TE 시험으로부터 $\tau_{oct} - r_{oct}$ 의 관계에서 G 를 구한다.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4-2)$$

상기 두 식을 연립하여 E, ν 를 구할 수 있다.

4.2. 반응함수 n

n 값은 dialation에 발생 (체적변화가 0) 하는 응력상태에서 실험을 통해 결정한다.

식 (2-5)로부터

$$\frac{J_{2D}}{J_1^2} = [-\alpha J_1^{(n-2)} + r] F_s \quad (4-3)$$

극한상태에서 $\alpha = 0$ 이므로

$$\left(\frac{J_{2D}}{J_1^2} \right)_{ult} = r F_s \quad (4-4)$$

dialation 점에서 $\frac{\partial F}{\partial J_1} = 0$ 이므로

$$\left(\frac{J_{2D}}{J_1^2} \right)_{dia} = \left(1 - \frac{2}{n} \right) F_s r \quad (4-5)$$

식 (4-4) 와 식 (4-5)로부터 $\frac{(J_{2D}/J_1^2)_{dia}}{(J_{2D}/J_1^2)_{ult}} = S$ 이므로

$$S = \frac{(1 - \frac{2}{n}) F_s r}{r F_s} = 1 - \frac{2}{n} \quad (4-6)$$

이 식으로부터 n 값을 연는다.

4.3. β_0 와 β_1 의 결정

식 (2-6)인 $\beta = \beta_0 e^{-\beta_1 J_1}$ 에 양변에 l_n 를 취하면

$$l_n(-\beta) = l_n(-\beta_0) - \beta_1 J_1 \quad (4-7)$$

식(4-7)은 Fig.4.1과 같이 $I_n(-\beta)$ 와 J_1 면에 직선으로 나타낼 수 있으며, 여기서 $I_n(\beta_0)$ 와 기울기 β_1 을 구한다.

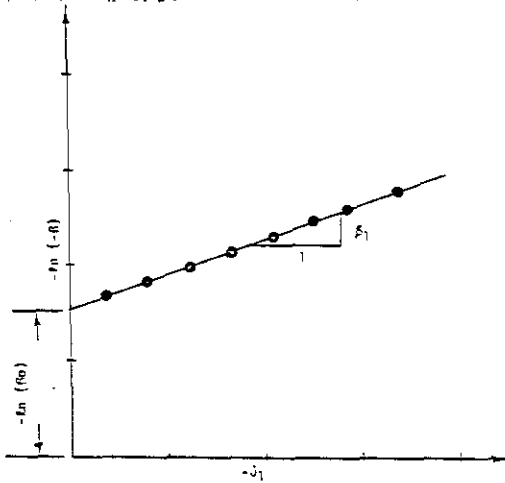


Fig.4.1. Schematic Plot to Determine the Material Constants β_0 and β_1

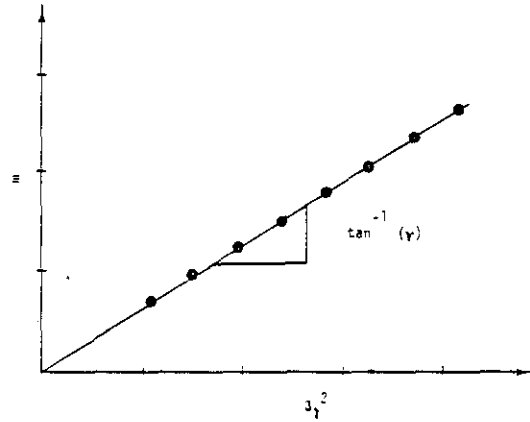


Fig.4.2. Schematic Plot to Determine the Material Constant r

β_0 와 β_1 을 실험으로부터 구하기 위해

- a) 초기등방응력이 같은 상태에서 TC, TE 시험을 한다.
- b) 극한상태에서 다음과 같이 β 를 얻는다.

$$\beta = \frac{(J_{2D}^2)_{TC} - (J_{2D}^2)_{TE}}{(S_r J_{2D}^2)_{TC} - (S_r J_{2D}^2)_{TE}} \quad (4-8)$$

- c) 기저의 J_1 값으로부터 $I_n(-\beta)$ 를 구할 수 있고 이들의 점을 연결하여 β_1 과 β_0 를 얻는다.

4.4. r 값의 결정

극한상태에서 $\alpha = 0$ 이므로

$$J_{2D} = r J_1^2 (1 - \beta S_r)^{-\frac{1}{2}} \quad (4-9)$$

$$r J_1^2 = J_{2D} (1 - \beta S_r)^{\frac{1}{2}} = m \quad (4-10)$$

각 실험의 극한상태에서 J_1^2 과 m 을 계산하며 Fig.4.2와 같이 그릴 수 있고 여기서 직선의 기울기가 r 값이 된다.

4.5. a_1, n_1 의 결정

식(2-12)에서 양변에 대수를 취하면

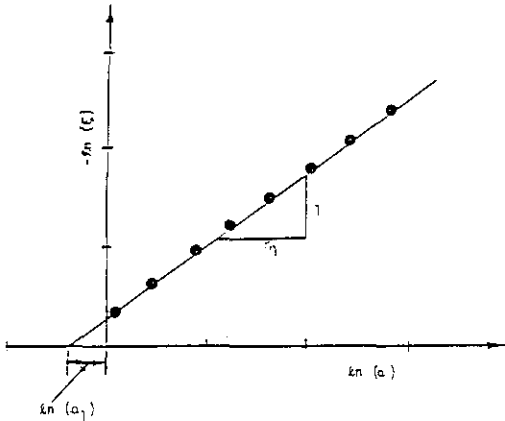


Fig.4.3. Schematic Plot to Determine the Hardening Constants α_1 and n_1

$$n_1 l_n(\xi) + l_n(\alpha) = l_n(\alpha_1) \quad (4-11)$$

임의점에서 소성변형율증분을 이용하여 $\Delta\xi$ 를 계산한다.

$$\Delta\xi = \left\{ (\Delta\epsilon_1^P)^2 + (\Delta\epsilon_2^P)^2 + (\Delta\epsilon_3^P)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4-12)$$

또한 다음 식을 이용하여 임의점에서 항복 조건으로부터 α 값을 알 수 있다.

$$\alpha = \frac{[(rJ_1)^2 - J_{2D}(1 - \beta S_r)]^{\frac{1}{2}}}{J_1^n} \quad (4-13)$$

각 점에서 $l_n(\xi)$ 와 $l_n(\alpha)$ 를 계산하여 plot 하면 Fig.4.3 과 같이 되며 여기서 α_1 과 n_1 을 얻는다.

4.6. 인장 강도의 영향

원래 사질토에 적용되는 식 (4-13) 를 콘크리트나 암반에 적용하기 위해서는 점착성과 인장강도를 고려하여야 한다. 이는 수직응력에 일정한 응력 $R = \alpha \cdot P_a$ 를 더함으로써 Fig.4.4 에 나타낸 바와 같이 정수압축을 따르는 주응력공간을 변환시킴으로써 나타낼 수 있는데 수정된 식은 다음과 같다.

$$J_{2D} - (-\alpha J_1^n + rJ_1^2)(1 - \beta S_r)^{-\frac{1}{2}} = 0 \quad (4-14)$$

$$\text{여기서 } J_1 = \sigma_1^* + \sigma_2^* + \sigma_3^* \quad (4-15a)$$

$$J_{2D} = 1/6 [(\sigma_1^* - \sigma_2^*)^2 + (\sigma_2^* - \sigma_3^*)^2 + (\sigma_1^* - \sigma_3^*)^2] \quad (4-15b)$$

$$J_3 = 1/3 (\sigma_1^{*3} + \sigma_2^{*3} + \sigma_3^{*3}) \quad (4-15c)$$

$$J_{3D} = J_3^* = 2/3 J_1^* J_{2D}^* - \frac{1}{27} J_1^{*3} \quad (4-16)$$

극한상태에서 이들을 적용함으로써

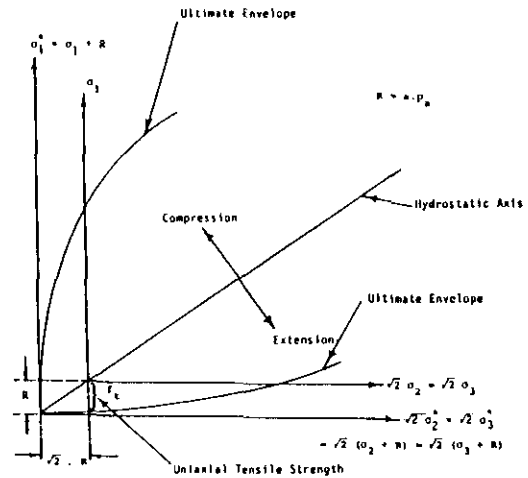


Fig.4.4. Cohesive and Tensile Strength

$$\sigma_1^* = \sigma_1 + R, \quad \sigma_2^* = \sigma_2 + R, \quad \sigma_3^* = \sigma_3 + R^* \quad (4-17)$$

로 나타내며

$R = a \cdot P_a$ 로써 a = 무차원량 P = 대기압이다.

Hannant, Lade, Mitchell은 일축압축강도 f_{cu} 를 이용하여 일축인장강도 f_t 를 다음과 같이 근사적으로 구하였다.

$$f_t = T \cdot P_a \left(\frac{f_{cu}}{P_a} \right)^t \quad (4-18)$$

여기서 T 와 t 는 무차원량이며 마찰재료에 대해서 T 는 $-0.22 \sim -1$, t 는 $0.67 \sim 1.6$ 이다.

Lade는 R 값에 대해 f_t 보다 $0.3\% \sim 1.4\%$ 정도 크다고 밝혔다.

$$1.003 f_t \leq R \leq 1.014 f_t \quad (4-19)$$

즉 식 (4-19)에서 얻은 R 값은 식 (4-17)에 대입하고 이들을 식 (4-15), 식 (4-16) 대입하여 응력불변량을 얻는다.

점착력이 없는 재료는 $R = 0$ 이고 극한상태에서 식 (4-14)는 식 (2-5)가 된다. 이상의 계산결과로부터 다음과 같이 재료상수를 얻을 수 있다.

탄 성 상 수				극 한 항 복 상 수				경 화 상 수	
K	G	E	ν	r	β_0	β_1	n	n_1	a_1
KS_i	KS_i	KS_i							
488	440	1013	0.155	0.121	0.821	0.023	7.0	0.41	0.901×10^2

5. 탄소성 구성관계식

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (5-1)$$

응력변형을관계는 다음과 같다.

$$d\sigma_{ij} = C_{ijke} d\epsilon_{ke}^e \quad (5-2)$$

여기서 C_{ijke} 는 탄성구성관계 tensor

$d\epsilon_{ke}^e$ 는 전변형을 $d\epsilon_{ke}$ 의 탄성부분이다.

$d\epsilon_{ke}^e$ 를 대입하여 정리하면

$$d\sigma_{ij} = C_{ijke} (d\epsilon_{ke} - d\epsilon_{ke}^p) \quad (5-3)$$

일반적으로 항복함수를 다음과 같이 나타낸다.

$$F = F(\sigma_{ij}, d\varepsilon_{ij}^P) = 0 \quad (5-4)$$

즉 항복하는 동안은 0 이고 하중제거일 때는 - 이다.

Normality 와 associative flow rule 를 가정하면 소성변형율증분은 다음과 같이 항복면에 수직이다.

$$d\varepsilon_{ij}^P = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5-5)$$

여기서 $d\lambda$ 는 normality rule 에 의해 지배되며 소성변형율증분의 크기를 나타내는 미지의 경화매개변수이다.

Consistency Cond dF 를 정리하면 다음 식과 같이 된다.

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} P \cdot d\varepsilon_{ij}^P = 0 \quad (5-6)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = - \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} P \cdot d\varepsilon_{ij}^P \quad (5-7)$$

식 (5-3) 과 (5-5) 를 식 (5-7) 에 대입하면

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkhe} (d\varepsilon_{he} - d\varepsilon_{he}^P) = - \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} P \cdot d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5-8)$$

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkhe} d\varepsilon_{he}}{\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{he}} C_{ijkhe} - \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} P \right)} \quad (5-9)$$

식 (5-9) 를 식 (5-2) 로 정리하면

$$d\sigma_{ij} = \left(C_{ijkhe} - \frac{C_{rske} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{he}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkhe}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkhe} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{he}} - \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} P \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}} \right) d\varepsilon_{he} \quad (5-10)$$

또는

$$d\sigma_{ij} = (C_{ijkhe}^e - C_{ijkhe}^P) d\varepsilon_{he} \quad (5-11)$$

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkhe}^{e-P} d\varepsilon_{he} \quad (5-12)$$

여기서 C_{ijkhe}^{e-P} 는 탄소성구성 tensor 이다.

$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$ 와 $\frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}^p}$ 는 주어진 항복함수로부터 구해진다.

식 (5-9) 과 식 (5-11) 는 Chain Rule 에 의해 다음과 같다.

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \left(\frac{\partial F}{\partial J_1} \frac{\partial J_1}{\partial \sigma_{ij}} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \sigma_{ij}} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial J_{3D}} \frac{\partial J_{3D}}{\partial \sigma_{ij}} \right) \quad (5-13)$$

혹은 σ_{ij} 에 대한 기울기 F 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial J_1} \delta_{ij} + \frac{\partial F}{\partial J_{2D}} S_{ij} + \frac{\partial F}{\partial J_{2D}} \left(S_{ik} S_{kj} - \frac{2}{3} J_{2D} \delta_{ij} \right) \quad (5-14)$$

여기서 δ_{ij} 는 kronecker delta

S_{ij} 는 축차응력 tensor 이다.

6. 모델의 증명

6.1. $\sqrt{J_{2D}} - J_1$ 면

식 (4-14) 로부터 $\sqrt{J_{2D}} - J_1$ 면의 극한포락선의 계산된 값과 실험치를 통한 값과의 비교를 나타내고 있다. 이들의 비교는 CTC, TC, TE 시험치의 값이며 좋은 대조를 보여주고 있다.

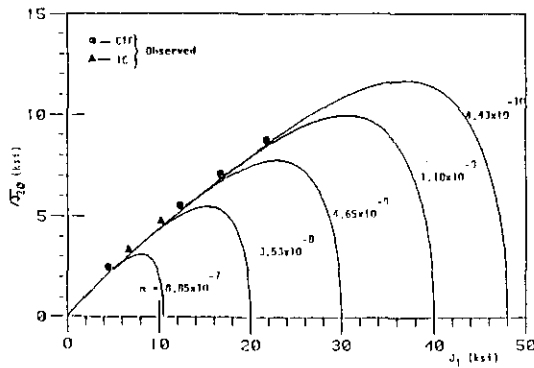


Fig.6.1. Predicted Ultimate and Pre-Ultimate Envelopes in $\sqrt{J_{2D}} - J_1$ Plane for CTC and TC Tests

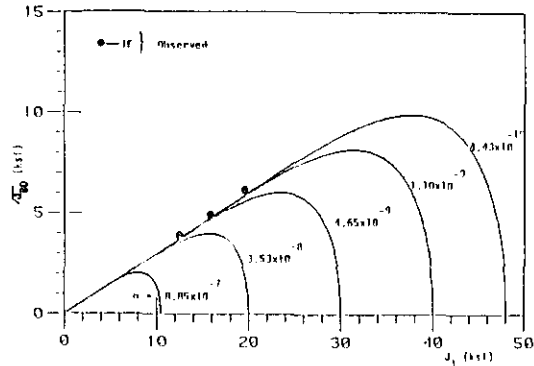


Fig.6.2. Predicted Ultimate and Pre-Ultimate Envelopes in $\sqrt{J_{2D}} - J_1$ Plane for TE Test

6.2. 8면체면, 3축면, π 면

극한포락선의 예측값과 실측값에 대해 8면체면과 3축면에 Fig.6.3, Fig.6.4와 같이 나타냈다.

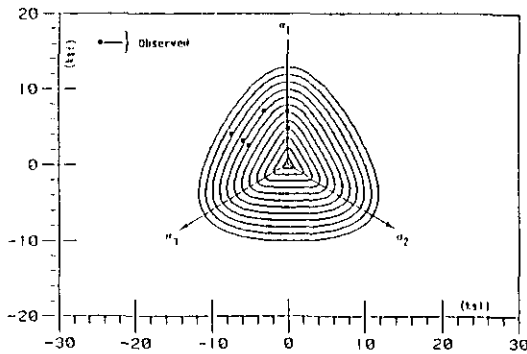


Fig.6.3. Variations of Cross-Sectional Shapes in Octahedral Planes ($J_1 = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 21, 23$ and 25 ksi), for Predicted Ultimate Surface

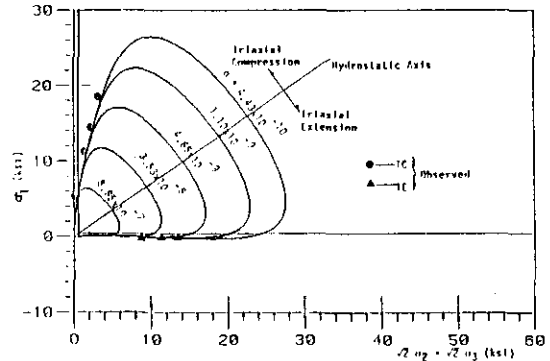


Fig.6.4. Predict Ultimate Envelopes in Triaxial Plane

8면체 평면에서 삼각형의 모서리형상이 변하고 있다. J_1 이 증가하면 항복포락선의 형상이 각이 둥그런 3각형으로부터 원형으로 서서히 변하고 있다.

6.3. 응력-변형율의 거동

Fig.6.5는 HC시험에 대해 P 와 ϵ_V 의 관계를 예측값과 실험치로써 비교하였다.

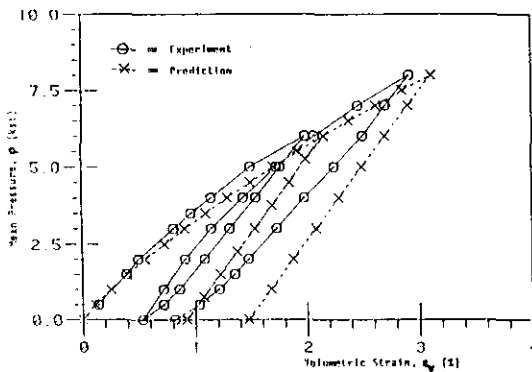


Fig.6.5. Comparison of Stress-Strain Responses of HC Test ($\sigma_0 = 8.0$ ksi)

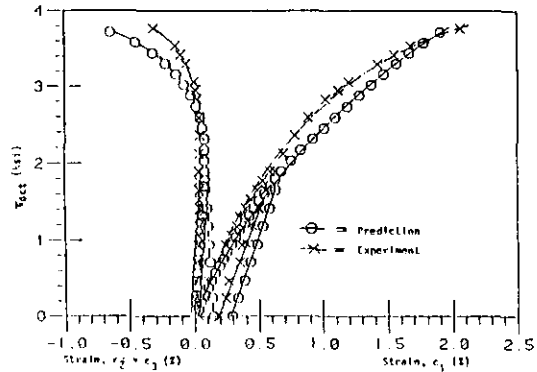


Fig.6.6. Comparison of Stress-Strain Responses of CTC Test ($\sigma_0 = 1.0$ ksi)

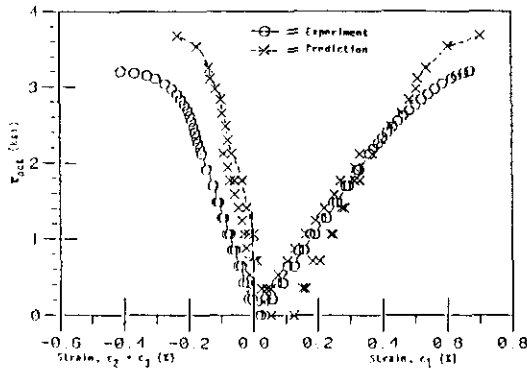


Fig.6.7. Comparison of Stress-Strain Responses of TC Test ($\sigma_0 = 3.0$ ksi)

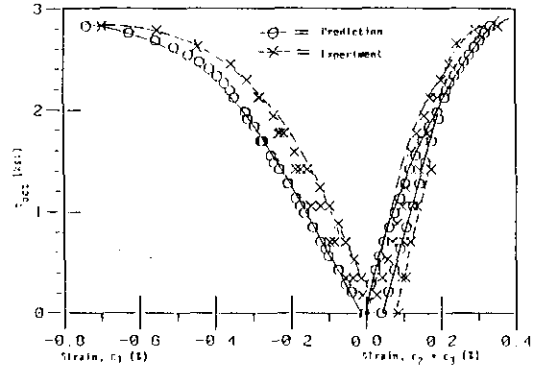


Fig.6.8. Comparison of Stress-Strain Responses of TE Test ($\sigma_0 = 4.0$ ksi)

6.4. 체적거동

체적변형을 ϵ_V 와 축변형을 ϵ_1 과의 관계를 CTC, TC를 통해 나타냈다.

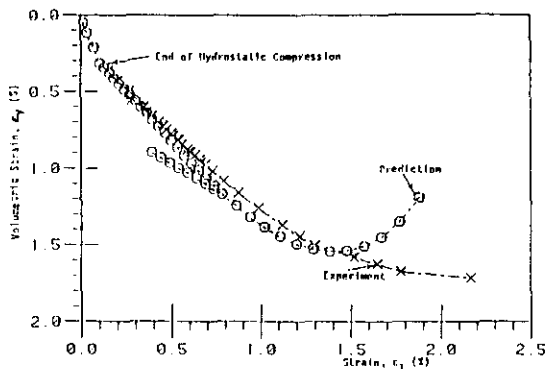


Fig.6.9. Comparison of Volumetric Response of CTC Test ($\sigma_0 = 1.0$ ksi)

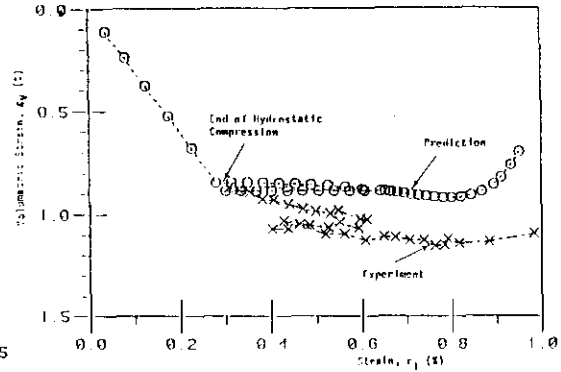


Fig.6.10. Comparison of Volumetric Response of TC Test ($\sigma_0 = 3.0$ ksi)

7. 결 론

경화재료에 대해 Desai(1980) 등이 제안한 소성론에 기초를 둔 항복곡면식을 토대로 응력-변형에 관한 구성식을 규명하고 이를 증명하기 위해 다양한 응력경로 아래서 Truly 3축시험을 하였다.

그 주요 결론으로서는

1. 본 모델은 다양한 응력경로 아래서 변형과 극한거동에 대해 실험치와 잘 일치하고 있다.
2. 본 모델은 항복과 경화거동을 유일한 곡면 위에 나타낼 수 있으므로 지금까지 두개의 함수를 이용하여 표현된 두 항복곡면의 불연속성에 비해 항복곡면을 연속적으로 나타낼 수 있다.
3. 뿐만아니라 두 함수의 교차점을 피할 수 있으므로 associated 소성론을 적용할 때의 난점을 피할 수 있다.
4. 항복곡면식은 4개의 독립된 상수를 포함하고 있으며 이들은 3축시험과 수 치해를 통해 얻을 수 있다.

< References >

1. Desai, C. S., "A General Basis for Yield, Failure and Potential Functions in Plasticity," *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 4, 1980, pp. 361-375.
2. Desai, C. S., and Faruque, M. O., "A Constitutive Model for (Geologic) Materials," *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 110, No. 9, Sep. 1984, pp. 139-1408.
3. Desai, C. S., and Siriwardane, H. J., *Constitutive Laws for Engineering Materials*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1984.
4. Desai, C. S., Somasundaram, S., and Frantziskonis, G., "A Hierarchical Approach for Constitutive Modelling of Geologic Materials," *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 10, No. 3, 1986.
5. Dragon, A., and Mroz, Z., "A Continuum Model for Plastic-Brittle Behavior of Rock and Concrete," *International Journal of Rock Mechanics, Mining Science & Geomechanics Abstracts*, Vol. 16, 1979, pp. 253-259.
6. Goodman, R. E., *Introduction to Rock Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, N.Y., 1980.
7. Kim, M. K., and Lade, P. V., "Modelling Rock Strength in Three Dimensions," *International Journal of Rock Mechanics, Mining Science & Geomechanics Abstracts*, Vol. 21, 1984, pp. 21-23.
8. Lade, P. V., "Three-Parameter Failure Criterion for Concrete," *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 108, No. 5, May, 1982, pp. 850- 863.
9. Nishida, T., Esaki, T., Aoki, K., and Kimura, T., "On the Stress Loci by Strain Controlled Tests on Sandstone under Generalized Triaxial Stress," *Proceedings, 6th Japan Symposium on Rock Mechanics*, Japan, 1984, pp. 43-48.
10. Šalami, M. R., "Constitutive Modelling of Concrete and Rock under Multiaxial Compressive Loadings," thesis presented to the University of Arizona, at Tuscon, Ariz., in 1986, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy.
11. Schofield, A. N., and Wroth, C. P., *Critical State Soil Mechanics*, McGraw Hill, London, U.K., 1968.
12. Zienkiewicz, O. C., Valliappan, S., and King, I. P., "Elasto-Plastic Solutions of Engineering Problems —'Initial Stress' Finite Element Method," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 1, No. 1, 1969.

부기 : 본연구는 1987년도 한국과학재단 해외파견연구비(Post Doc.)에 의해 Arizona 대학(Desai지도교수)에서 이루어진 것으로 동 재단에 깊은 감사 말씀을 올립니다.