

원주를 지나는 흐름에 관한 수치해석 (Numerical Solutions for the Flow past a Cylinder)

한양대학교 공과대학교수 윤 태 훈

한양대학교 대학원 조 용 식

1. 서론

원주주위를 흐르는 흐름에 대한 연구는 오랜동안 모형실험과 이론적인 해석을 통해 계속되어 왔으며, 최근에는 수치해석을 이용한 연구가 활발하다. 이는 원주주위를 흐르는 흐름은 수리구조물의 설계에 요구되는 여러가지 수리학적 특성에 대한 정보를 제공함은 물론, 극좌표를 이용하면 다른 형태의 구조물에 비해 수치모형화가 비교적 쉽기 때문이다.

Thoman & Szewczyk(1966)는 원주주위를 흐르는 부정류를 successive over relaxation (SOR)과 upwind differencing scheme (DDE)으로 해석하였으나, DDE는 후류블 소멸시킬 뿐만 아니라 와의 발산을 억제시키는 인공점성(artificial viscosity)을 야기시켜 만족할만한 결과를 제공하지 못하는 것으로 알려져 있다. Borthwick(1986)은 DDE 대신에 인공점성을 야기시키지 않는 alternating direction implicit scheme (ADI)을 사용하여 와도수송식을 해석한 후 Thoman & Szewczyk의 실험결과와 비교하여 SOR-ADI가 SOR-DDE보다 실제 흐름에 더 가까운 모형을 제공함을 밝혀냈다. 그는 정체점에서의 압력을 방사 운동량방정식을 이용한 유한차분식으로부터 구하였으며, 외부경계의 한계는 Martinez가 제안한 $r=80ra$ 를 도입하였다.

본 실험에서 흐름은 2차원으로 가정되며, 시간변화에 따른 연속방정식과 운동량방정식을 유한차분식을 이용하여 근사적으로 해석한다. 실험은 레이놀즈수 125 - 275의 흐름이 어느 일정시간에 도달될 때까지 반복수행되며, 시간에 따른 유선, 와도, 원주표면에서의 항력계수 및 양력계수의 변화, 압력분포등을 구한다. 원주표면의 압력분포를 구하는데 있어서 기존의 수치실험은 주로 방사 운동량방정식만을 이용하였으나, 본 연구에서는 Fornberg가 정류상태에 사용하였던 세 방법중에서 두 방법을 사용하여 원주표면에서의 압력분포를 구한 후, 두 경우에 대한 값을 비교하여, 레이놀즈수에 따른 압력분포를 구하는 새로운 방법을 제시하고, 와도의 분포로부터 원주의 영향이 외부경계에 미치는 범위를 검토하여 새로운 외부경계를 설정하고자한다.

2. 기본방정식과 경계조건

2.1 기본방정식

극좌표계에서 2차원 흐름의 기본방정식인 연속방정식과 운동량방정식은 다음과 같다.

$$\text{연속방정식} \quad \frac{\partial}{\partial r}(r \cdot v_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta) = 0$$

운동량방정식

$$\begin{aligned} \theta \text{ 방향 성분} \quad & \rho \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \rho \cdot \left[v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r \cdot v_\theta}{r} \right] \\ & = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

r 방향 성분

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial v_r}{\partial t} + \rho \cdot \left[v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} \right] \\ & = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \cdot \left[\frac{1}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

2차원 흐름에서 유함수와 와도는 다음과 같이 정의된다.

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -v_r$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = r \cdot v_\theta$$

$$\omega = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r \cdot v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]$$

연속방정식과 운동량방정식을 고차편미분한 후에 유함수, 와도의 관계식을 대입하여 유함수-와도식 및 와도수송식을 구하고, 흐름을 지배하는 무차원 매개변수를 도입하면, 여러 흐름조건에 따라 쉽게 적용이 가능해진다. 또한 원주주위에서의 격자간격을 좁게하여 흐름의 특성을 좀 더 정확하게 파악하고, 격자망수를 줄이기 위하여 변환좌표를 사용하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\text{무차원 유함수-와도식} \quad C^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = -G(\xi) \cdot \Omega$$

$$\text{무차원 와도수송식} \quad G(\xi) \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} + C \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - C \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{2}{\text{Re}} \left[C^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2} \right]$$

여기서 $G(\xi)$ 는 $C^2 \cdot e^{2C\xi}$ 이다.

운동량방정식을 편미분하고, 무차원 매개변수, 무차원 변수 및 변환좌표를 대입하면 압력에 관한 식을 얻는다.

2.2 경계조건

2.2.1 원주표면

가) 유함수 $\psi = 0$

나) 와도 $\Omega_{1,1} = -\frac{2(\psi_{1,2} - \psi_{1,1})}{(\Delta \xi)^2} \cdot \frac{1}{G(\xi)}$

다) 압력 $\frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{1}{C} \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi}$

2.2.2 외부경계

가) 유함수 $\psi = \text{uniform flow}$

나) 와도 $\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \Big|_{1,N} = 0$

다) 압력 $P = 0$

3. 수치실험

3.1 유함수-와도식

유함수의 계산과정에는 relaxation 방법중 계수가 $1 < r < 2$ 인 SOR이 이용되며, 근사해는 컴퓨터의 기억장소가 많이 소요되는 system matrix를 푸는 방법보다 기억장소가 절약되는 5격점법으로 구하였다. 유함수-와도식에 relaxation 계수를 도입하여 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\psi_{i,j}^{n+1} = (1-r) \psi_{i,j}^n + r \left[C^2 (\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i-1,j}^n) + \left(\frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} \right)^2 (\psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j-1}^n) + (\Delta \eta)^2 \cdot \Omega_{i,j} \cdot G(\xi) \right] / \left[2C^2 + 2 \left(\frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} \right)^2 \right]$$

여기서 (o)는 각 시간단계에 대한 반복회수를 나타낸다.

일반적으로 계수는 다음 식에 의해 계산되나 시행착오 결과 $r = 1.870$ 일때 가장 수렴성이 좋은 것으로 나타나 $r = 1.870$ 을 relaxation 계수로 사용하였다.

$$r = 2.0 - \sqrt{2} \pi \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right)^{0.5}$$

여기서 p, q는 각 방향에 대한 격자점수이다.

3.2 와도수송식

첫 단계에서 음해법으로 θ 방향을 $0.5dT$ 전개하고, 둘째 단계에서 r 방향을 $0.5dT$ 전개하여 다음과 같은 두 식을 구하고, 식으로부터 두 개의 tridiagonal matrix를 얻는다.

$$A_{i,j} \cdot Q_{i-1,j}^{L+0.5} + B_{i,j} \cdot Q_{i,j}^{L+0.5} + C_{i,j} \cdot Q_{i+1,j}^{L+0.5} = P_{i,j}$$

$$D_{i,j} \cdot Q_{i,j}^{L-1} + E_{i,j} \cdot Q_{i,j}^{L+1} + F_{i,j} \cdot Q_{i,j}^{L+1} = Q_{i,j}$$

$$\begin{bmatrix} B_{1j} & C_{1j} & & & & \\ A_{2j} & B_{2j} & C_{2j} & & & \\ & & \vdots & & & \\ & & & A_{ij} & B_{ij} & C_{ij} \\ & & & & \vdots & \\ & & & & & A_{mj} & B_{mj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{1j} \\ Q_{2j} \\ \vdots \\ Q_{ij} \\ \vdots \\ Q_{mj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{1j} \\ R_{2j} \\ \vdots \\ R_{ij} \\ \vdots \\ R_{mj} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_{1j} & F_{1j} & & & & \\ D_{1j} & E_{1j} & F_{1j} & & & \\ & & \vdots & & & \\ & & & D_{ij} & E_{ij} & F_{ij} \\ & & & & \vdots & \\ & & & & & D_{(N-1)j} & E_{(N-1)j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{1j} \\ Q_{1j} \\ \vdots \\ Q_{ij} \\ \vdots \\ Q_{(N-1)j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1j} \\ S_{1j} \\ \vdots \\ S_{ij} \\ \vdots \\ S_{(N-1)j} \end{bmatrix}$$

3.3 압력에 관한 식

원주표면의 압력을 구하는 방법은 다음의 세 경우를 생각할 수 있다.

- 1) 운동량방정식을 그림(3-1)의 실선과 같은 경로에 적용하여 압력을 구하는 방법
- 2) 방사 운동량방정식을 이용하여 원주 상부로 부터 압력을 구해오는 방법
- 3) 압력에 관한 Poisson type 방정식을 푸는 방법

Fornberg는 1)의 방법으로 정류상태에서 만족할만한 압력값을 얻었다. 여기서는 1)의 방법과 2)의 방법으로 원주표면에서의 압력을 구한 후 서로 비교하였다.

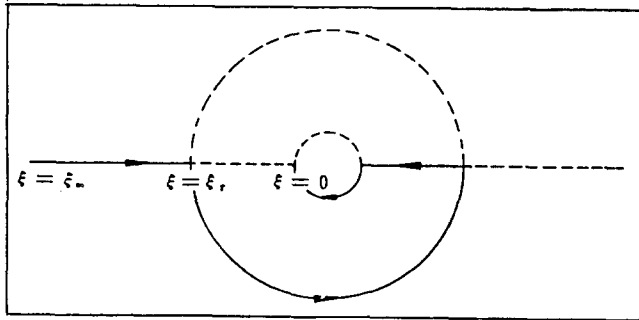


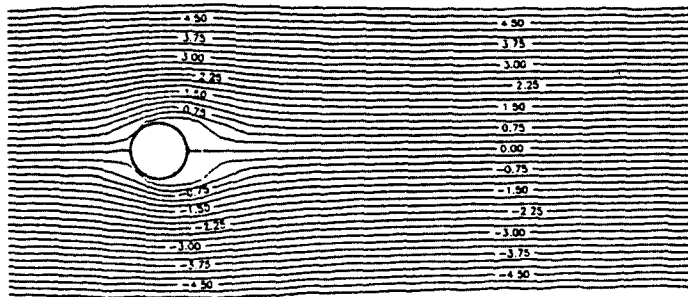
그림3-1. The integration path for pressure calculation

4. 수치실험결과

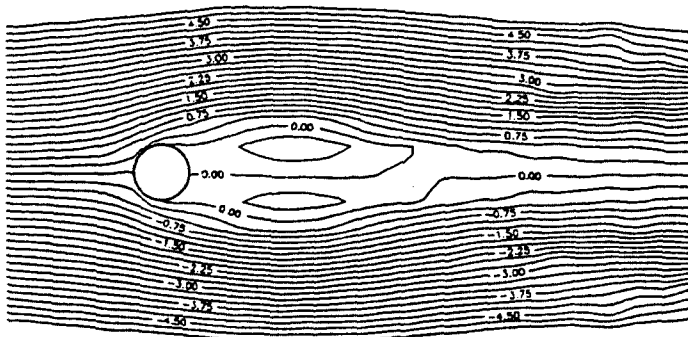
수치계산은 VAX8700 컴퓨터를 이용하여 수행되었으며, $T = 72$ 까지의 CPU 소요시간은 1시간 40분 정도이다.

4.1 유합수

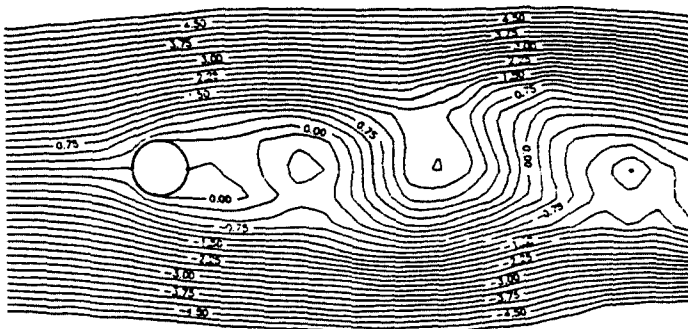
초기 흐름을 등류로 가정하였으므로, 실험초기에는 원주를 중심으로 상하 대칭으로 유선이 형성되지만 그림 (4-1)과 같이 시간의 경과에 따라 비대칭으로 유선이 발달된다.



(a)



(b)



(c)

그림 4-1. Evolution with time of streamlines at $Re = 200$
(a) $T = 2$, (b) $T = 30$, (c) $T = 72$

4.2 와도

그림(4-2)는 레이놀즈수에 따른 원주표면의 와도분포를 도시한 것이며, 이로부터 박리각을 구할 수 있다. 즉 와도가 양의 값에서 음의 값으로 바뀌는 또는 음의 값에서 양의 값으로 바뀌는 점이 박리점이며 이때의 각도가 박리각이다. 그림(4-3)은 본 실험에서 구한 박리각의 값을 기존의 수치실험 결과와 비교한 것이다.

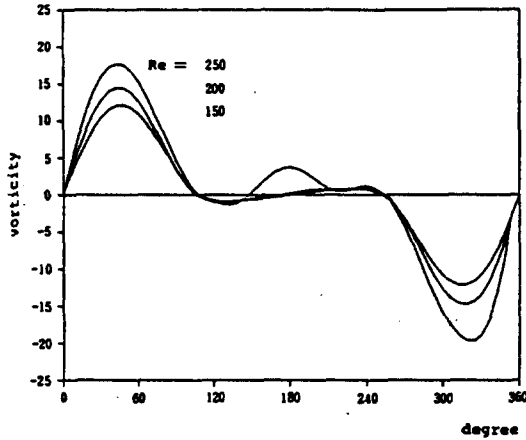


그림 4-2. The vorticity distribution on the cylinder surface at $T = 64$

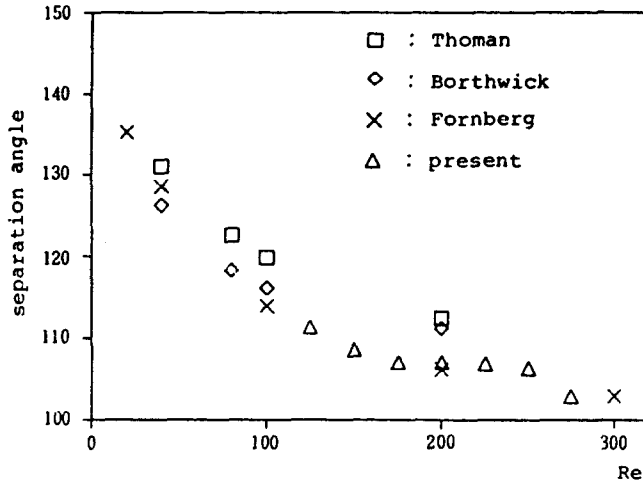


그림 4-3. The position of the separation angle

4.3 원주표면의 압력

앞에서 언급했듯이 원주표면의 압력을 구하는 방법은 세 경우가 있으나, 본 논문에서는 그중 두 방법을 사용하여 압력을 구하여 표(4-1)와 같은 결과를 얻었다.

표 4-1. Pressure at front stagnation points calculated by different methods

*Re = 100 , **Re = 300

Re	Method 1	Method 2	probable correct value in steady flow
125	0.5466	0.5727	0.530 *
200	0.5181	0.5512	0.510
275	0.5043	0.5157	0.510 **

4.4 외부경계

외부경계는 원주에 의한 후류의 영향을 받지않게 충분한 거리를 두고 결정되어야 한다. 레이놀즈수의 변화에 따른 와도의 값을 구하여 경계조건을 고려해 와도가 전달되어가는 지점을 구하면 표(4-2)와 같다.

표 4-2. The terminated position of vorticity transport

Re	T = 30	T = 64	T = 72
150	50.75 r.	111.32 r.	130.25 r.
200	50.75 r.	111.32 r.	130.25 r.
250	50.75 r.	111.32 r.	130.25 r.

5. 결론

원주주위를 흐르는 흐름의 변화를 규명하기 위하여 연속방정식과 운동량방정식을 유한차분법을 이용하여 수치적으로 해석한 결과를 요약하면 다음과 같다.

1) 원주표면의 압력을 구하는데 있어서 Fornberg가 정류의 수치해석에서 가장 만족할만한 결과를 제공하는 것으로 추천한 방법 1은 레이놀즈수 200이하의 부정류흐름에서도 비교적 좋은 근사치를 제공한다. 따라서 레이놀즈수 200 이하의 부정류흐름에서는 방법 1로, 200보다 큰 흐름은 방사 운동량방정식을 이용하여 원주표면의 압력을 구하는 것이 바람직하다.

2) 외부경계는 원주에 의한 후류의 영향을 받지않는 충분한 거리를 두고 결정되어야 한다. 본 실험에서 와도의 분포를 도시하여 원주의 영향이 미치는 범위를 검토했던 결과 외부경계는 원주중심으로부터 130ra 이상이 되어야 함을 알 수 있다.

참고문헌

1. Borthwick, A., Comparison between Two Finite-Difference Schemes for Computing the Flow around a Cylinder, J. Numerical Methods in Fluids Vol.6, 1986.
2. Fornberg, B., A Numerical Study of Steady Viscous Flow past a Circular Cylinder, J. Fluid Mech. Vol.98, part 4, 1980.
3. Gerald, C.F., Applied Numerical Analysis, Addison-Wesley Publishing Co., 1984.

4. Roache, P.J., Computational Fluid Dynamics, Hermosa Publishers, 1976.
5. Schlichting, H., Boundary Layer Theory, McGraw-Hill Book Co., 1985.
6. Smith, G.d., Numerical Solution of Partial Differential Equations, Oxford University Press, 1975.
7. Son, J.S. & Hanratty, T.J., Numerical Solution for the Flow around a Cylinder at Reynolds Numbers of 40, 200 and 500, J. Fluid Mech. Vol.35, part 2, 1969.