Digital Interferometry 에서 간섭 무늬의 배경제거가 재생된 파면의 정확도에 미치는 영향

(The effect of background subtraction of the interferogram on the accuracy of the reconstructed wavefront in digital interferometry)

강 주 식* . 이 상 수

한국 과학 기술원

Abstract

The importance and technique of subtracting the background intensity of the interferogram in digital interferometry is discussed. Also the way of determinating the polynomial and its degree to fit the wavefront is discussed.

1. 서 론

광학면의 평가방법에는 간섭계를 이용하는 방법과 OTF를 측정하는 방법등이 [1] 있으며 간섭계를 이용하는 방법으로는 Fizeau 간섭계, Twyman-Green 간섭계, Mach-Zehnder 간섭계, scatter-plate 간섭계, point-diffraction 간섭계 등이 [2] 사용되어진다. 더욱 정밀하고 신속한 광학면의 평가 방법에 대한 요구는 TV- camera 와 컴퓨터를 간섭계와 연결시킨 optical-digital-hybrid 간섭계를 출현시켰으며, 이 방면에 대한 연구는 현재 전세계적으로 활발히 진행되고 있다. 본 논문에서는 digital Twyman-Green 간섭계를 사용하여 거울을 평가한 실험을 토대로 간섭계로부터 얻은 간섭무늬에 대한 digital image processing 방법과 파면함수의 fitting 에 사용되는 다항식을 선택하는데 있어서 고려하여야 할 점들에 대하여 설명하고자 한다.

2. 이 론

간섭계의 검출기 평면상에서 기준면과 피검면의 파면함수를 각각 R (x,y), O (x,y) 라 표시하면 파면오차 함수, 즉 surface error 함수 W (x,y)는

$$W(x,y) = O(x,y) - R(x,y) \tag{1}$$

로 표현되며 Twyman-Green 간섭계로 평면에 대한 평가를 실시할 경우에는 기준파면이 이상적인 평면이므로

$$R(x,y) = R = \text{상수} \tag{2}$$

이며 편의상 R=0 으로 놓을수 있다. 그러면

$$W(x,y) = O(x,y) \tag{3}$$

가 되며 간섭무늬의 fringe equation 은

$$W(x,y) = O(x,y) = \frac{\lambda}{2} n(x,y) \tag{4}$$

로 나타내어진다. 따라서 피검면의 파면함수 O (x,y) 를 구하는 문제는 간섭무늬상의 fringe order 함수 n (x,y) 를 구하는 문제로 귀착되게 된다. 실제로 우리가 실험상으로 정확히 측정할수 있는 n (x,y) 는 n 이 정수값을 가지고 있는 점들에 국한되는데 이 data 들을 최소자승법에 의하여 다항식에 fitting 시킴으로써 n(x,y) 함수 즉 O (x,y) 를 얻어 낼수 있게 된다.

3. 실 험 장 치

실험에는 Twyman-Green 간섭계와 CCD-TV camera, 그리고 소형 컴퓨터로 구성된 hybrid system 이 사용되었으며 장치도는 그림 1과 같다.

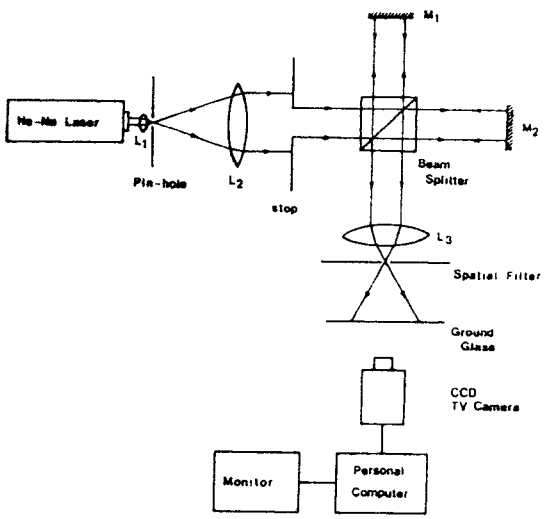


Fig.1 experimental setup

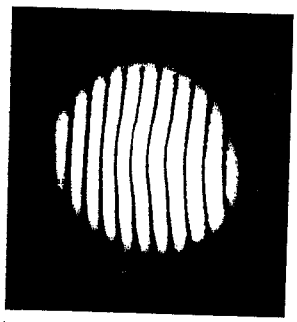


Fig.2 interferogram

4. Digital image processing

그림 2는 실험에 의해 얻어진 간섭무늬로, 이 간섭무늬는 video digitizer 에 의하여 64 gray level 로 계수화 되게 되는데 이로부터 peak fringe 의 위치를 정확히 검출해 내기 위해서는 컴퓨터 작업이 수반되며, 크게 다섯단계로 나눌수 있다.

(1) 저주파 여과 (low pass filtering)
Speckle 에 의한 noise 를 제거해 주기 위한 작업으로 3 x 3 pixel 의 창으로 평균해주므로써 급격한 강도의 변화, 즉 고주파 성분을 round off 시켜주게 된다.

(2) 초저주파 여과 (very low pass filtering)
intensity profile 의 배경성분만을 추출해 내는 작업으로 이때에는 큰창으로 평균시킨다. 큰 창의 크기는 (m x m) pixel 로 하며, 이때 m은 fringe 간의 평균 간격이 n pixel 일때

$$m = \begin{cases} n+2 \ ; \ n \text{ 이 홀수} \\ n+3 \ ; \ n \text{ 이 짝수} \end{cases} \qquad (5)$$

로 잡아준다.

(3) 배경제거
low pass filtered 된 image 에서 very low pass filtered image 를 빼주는 작업이다. 이 작업에 의해 간섭무늬는 배경성분이 제거되어 이 후 작업에 용이한 상태로 만들어지게 된다.

(4) 중심선 추출 (Skeletonize)
배경제거된 간섭무늬의 최소 강도점들을 찾아내는 과정으로 이는 적당한 threshold 이하의 극소점을 찾음으로써 행해지게 된다.

(5) Fringe 차수 매기기
(4)에서 얻어진 최소 강도점들에 대해 fringe 차수를 결정해주어야 하는데 여기서 결정해주는 차수는 상대적인 fringe 차수이다. 즉 임의의 한 fringe의광로정차와 fringe 차수를 0으로 잡고, 인근 fringe 의 광로정차를 $\pm\lambda, \pm 2\lambda, \cdots$ 로 잡아 $\pm 1, \pm 2, \cdots$ 로 차수를 매겨준 값이 된다.
절대차수와 상대차수의 차이에 해당하는 상수값은 후에 파면 fitting 작업을 거친후 제거해 주므로 전체 작업에 영향을 주지 않는다.
또한 fringe 차수는 파면의 tilt 방향에 따라 증가 또는 감소하는데, 실험시 기준면 또는 피검면을 조금 이동시켜 간섭무늬의 이동방향을 관찰하므로써

fringe 차수의 증가 방향을 알아낼수 있다.
이상의 작업으로 각 최소 강도점들과 그들의 fringe 차수가 얻어지면
최소자승법에 의한 다항식 fitting 으로 파면함수를 구할수 있게 되는 것이다.
여기서 간섭무늬의 배경제거 작업의 중요성을 강조하기 위하여 (2)와 (3)의 과정을 거치지 않았을 때의 문제점을 살펴보자.
간섭무늬의 profile 은 (1)의 작업을 거친후에도 배경성분이 남아있기 때문에 thresholding level 을 정해주는데 어려움이 따르게 된다.
low level로 thresholding 시킬 경우에는 중앙부의 data를 잃게 되며, high level로 thresholding 하거나 theshold 를 걸지않을 경우는 최소강도점 이외의 극소점들이 같이 얻어지므로 작업에 큰 불편을 초래하게 된다.
(2)와 (3) 그리고 (4) 까지의 작업이 그림 3에 나와있다. 그림 4는 각 과정에서의 profile 을 나타내며, 그림 5은 추출된 최소강도점들의 분포를 나타낸다.

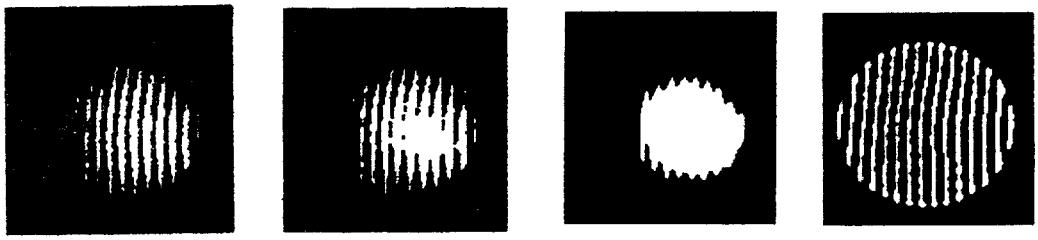


Fig.3 images during digital image processing (threshold =32)

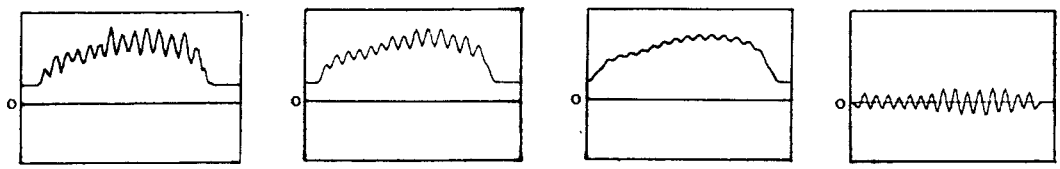


Fig.4 intensity profile at each step of processing

Fig.5 extracted skeletons

5. 파면 fitting

n 개의 data $n(\bar{r}_i)$ $(i = 1, \cdots, n)$ 를 k 차 다항식으로 fitting 시킬때 error 를 최소화하기 위한 조건은 최소자 승법 [3]에 의하면

$$\sum_{i=1}^{k} C_i A_{ij} = B_j \tag{6}$$

가 된다.
여기서 다항식을 $P^{(k)}(\bar{r})$ 라 할때

$$A_{ij} = \sum_{l=1}^{n} P_i^{(k)}(\bar{r}_l) P_j^{(k)}(\bar{r}_l) \tag{7}$$

$$B_j = \sum_{l=1}^{n} n(\bar{r}_l) P_j^{(k)}(\bar{r}_l) \tag{8}$$

을 나타낸다.

(1) 다항식의 차수 결정
다항식의 차수가 너무 낮은 경우에는 fitting 이 제대로 이루어지지 않게 되고 너무 높은 경우에는 불필요한 시간을 소비하게 되거나 엄청난 계산 오차를 수반하게 되므로, 최적 차수 k 값을 결정하는 일은 매우 중요한 작업이다.
최적차수는 n 점에 대한 variance 즉

$$\sigma_k^2 = \frac{\Delta^2}{(n-k-1)}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} |f(\bar{r}_i) - \sum_{l=1}^{k} C_l P_l^{(k)}(\bar{r}_i)|^2 / (n-k-1) \tag{9}$$

를 비교하여 k의 증가에 대한 σ_k^2 의 감소율이 더 이상 커지지 않을 때의 값을 취하도록 한다.
Zernike polynomal 과 monomial 로 각각 1차에서 10차까지 fitting시킨 경우의 k에 따른 σ_k^2 값이 그림 6 에 나타나 있다.
그림에서 보듯이 두가지 다항식의 경우 모두 6차 또는 7차가 적합한 차수임을 알수 있다.

(2) Orthogonal polynomial
monomial들은 서로 orthogonal 하지 않은 반면 Zernike 다항식은 반경 1인 원 위에서 orthogonal 한 특성을 가진다. 이런 차이점에도 불구하고 10차까지의 fitting 이 같은 결과를 보이는 원인은 data 의 불연속성에 있다. 즉 laser beam 단면내의 전체 data 가 아닌, 최소강도점들만의 불연속적인 data를 fitting 에 사용하므로 Zernike 다항식은 이미 orthogonality를 잃어버리게 되는 것이다.
식 (6) 을 푸는 방법은 크게 2가지로 나눌수 있는데 determinant 를 이용하는 방법과

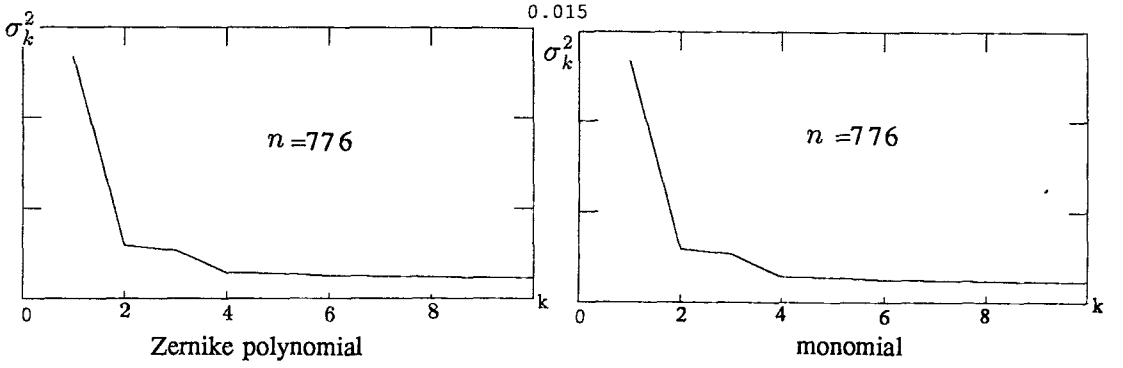
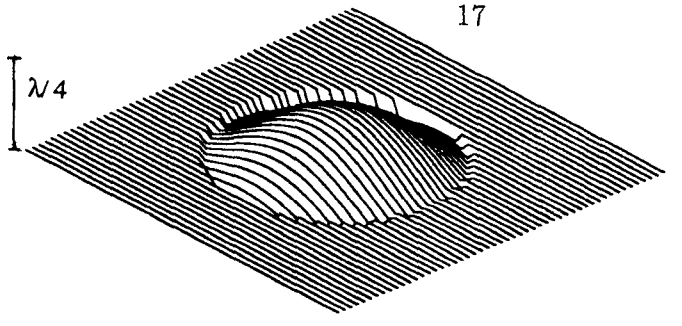


Fig.6

Gauss 소거법이 그것이다. determinant 를 이용하여 풀때에는 행렬이 (n x n) 일때 해를 얻기까지 곱셈을 (n-1) (n+1) ! + n 번 사용하여야 하며 Gauss 소거법에는 ((n+1) (n+2) / 2 - 1)x n 번만 사용하면 되므로 시간이 현격히 차이가 나며, 곱셈의 횟수에 round off error 가 비례하므로 Gauss 소거법을 사용하는 것에 훨씬 유리하다. 한편 Gram-Schmidt 방법 [4]을 써서 data point 들에 대해 orthogonal 한 새로운 다항식을 만들수가 있는데 이 경우는 A matrix 가 대각선화 되므로 단 n 번만의 곱셈으로 식 (6)이 풀어지게 되어 계산 오차가 최소화 된다. 더구나 최적 k 값을 구할 때 앞의 다항식들에서 처럼 여러 k 값에 대하여 일일이 프로그램을 수행할 필요가 없이 특정 k 에 대해 구한 σ_k^2 을 이용하여 임의의 k 에 대한 σ_k^2 의 수식적 표현을 얻을수 있다는 커다란 장점을 지니고 있다. [4] 따라서 다항식의 data point 위에서의 orthogonality는 중요한 의미를 가지는 것이다. data가 균등간격으로 촘촘히 있는 경우에는 다항식을 새로 만들 필요없이 Zernike polynomial을 그냥 사용하여도 무방하며 Zernike 다항식의 계수들이 수차와 직접적인 관련이 있기 때문에 Zernike polynomial 은 파면수차 해석에 널리 쓰이고 있다.
그림 7은 4차, 7차, 10차에서의 파면함수를 3차원으로 도시한 그림이며 피검면의 기준면에 대한 rms error 값은 $\sim \frac{\lambda}{17}$ $(\lambda = 6328\mathring{A})$ 로 나타났다.



(a) Zernike polynomial

k=4 f_{rms}=λ/17.3

Fig.7 wavefront of the mirror under test

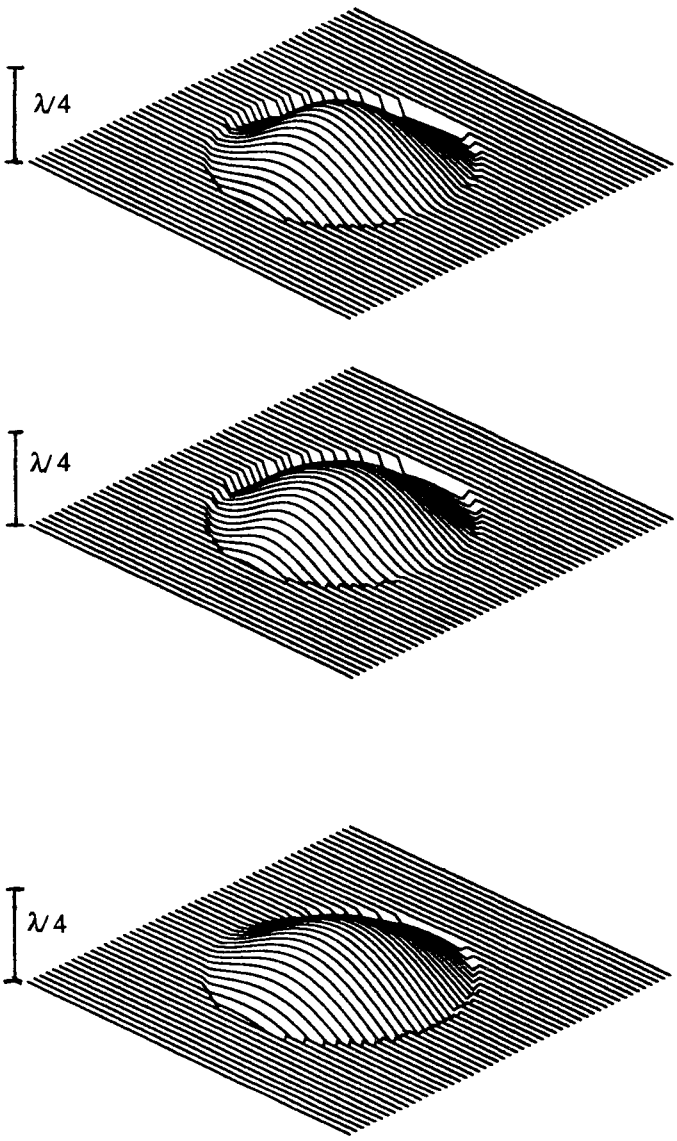
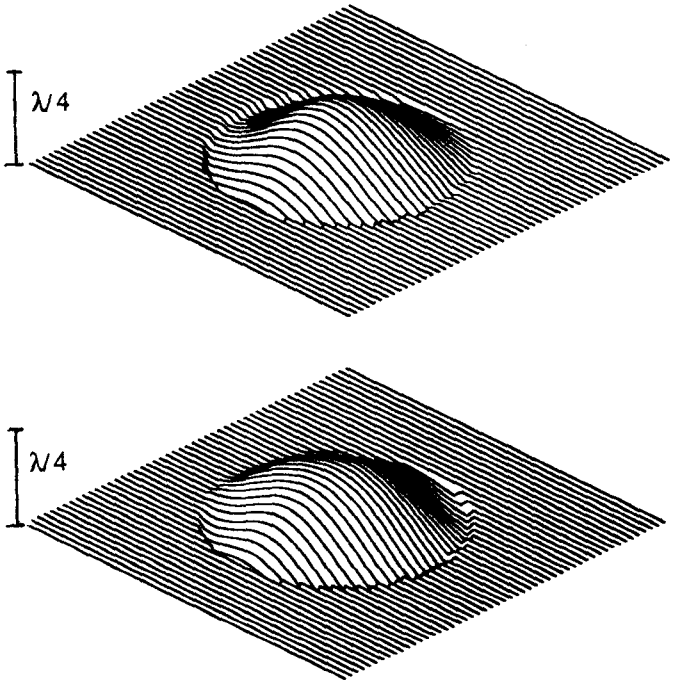


Fig.7 wavefront of the mirror under test



(b) monomial

k=7 f_{rms}=λ/16.8

k=10 f_{rms}=λ/16.4

Fig.7 wavefront of the mirror under test

6. 결 론

Digital 간섭계를 이용한 파면 재생으로 광학면을 평가함에 있어서 간섭 무늬의 배경제거의 필요성과 그 방법에 대하여 설명하였다. 또한 파면을 fitting 시킬 다항식을 결정할 때에 고려하여야 할 점들에 대하여 기술하였다.
간섭 무늬의 저주파여과 성분에서 초저주파 여과 성분을 빼줌으로써 배경을 제거할수 있으며 Zernike polynomial과 monomial 로 fitting 시켜본 결과 He-Ne laser 파장에서 surface error 는 rms 값으로 λ/17 가 됨을 알았다.

7. 참 고 문 헌

1. 홍 경희, 제 2회 광학 및 양자 전자학 워크샵 논문집, 51 (1985).
2. D. Malacara, Optical Shop Testing . Wiley, New York, (1978).
3. Pennington, R.H., Introductory Computer Methods and Numerical Analysis, Macmillan, New York (1970).
4. Forsythe, G.E. J. Soc. Ind. Appl. Math, 5, 74 (1957).