

임의의 방향조정을 하는 목표물에 대한  
비례항법 및 수정비례항법의 성능분석

하인중\*, 허중성\*, 고명삼\*, 이장규\*, 송택렬\*\*, 안조영\*\*

\* 서울대학교 제어계측공학과

\*\* 대전기계창

Performance Analysis of Conventional and Modified Proportional  
Navigation Guidance Laws for a Random Maneuvering Target

In-Joong Ha, Jong-Sung Hur, Myoung-Sam Ko, Taek-Lyul Song, Jo-Young Ahn, Jang-Gyu Lee

\* Dept. of Control and Instrumentation Eng., Seoul National University

\*\* Agency for Defence Development

ABSTRACT

In this paper, we consider conventional and modified proportional navigation guidance(PNG) laws for a random maneuvering target. By means of Lyapunov function approach, we show that an ideal missile guided by the conventional PNG law can always intercept a random maneuvering target if some specified initial conditions are satisfied and the navigation constant is chosen sufficiently high. In addition, we propose a modified PNG law. At the final phase of pursuit, the proposed guidance law has a better acceleration profile than the conventional PNG law.

기호 설명

- $A_m$  : 미사일의 성취가속도
- $A_{mc}$  : 미사일의 지시가속도
- $A_t$  : 목표물의 가속도
- $\hat{A}_t$  : LOS에 수직인  $A_t$  성분의 추정치
- $N$  : 비행상수 (navigation constant)
- $R$  : 목표물과 미사일 사이의 거리
- $R'$  : 실수 공간
- $V_m$  : 미사일의 속도
- $V_t$  : 목표물의 속도
- $\alpha$  : 미사일의 공격각
- $\gamma_m$  : 미사일의 비행경로각
- $\gamma_t$  : 목표물의 비행경로각
- $\epsilon$  : 탐색기의 boresight error
- $\theta_h$  : 탐색기의 gimbal angle
- $\theta_m$  : 미사일의 비행경로가 LOS와 이루는 각
- $\theta_t$  : 목표물의 비행경로가 LOS와 이루는 각
- $\rho$  : 목표물과 미사일의 속도비 (=  $V_t/V_m$ )
- $\sigma$  : LOS 각 (Line-Of-Sight angle)
- $\phi_m$  : 미사일의 body angle
- $\beta, \delta, \eta, \eta'$  : 상수

1. 서론

지난 50년간 미사일의 유도항법에 관한 많은 연구가 진행되어 여러가지 유도항법이 개발되었다. 그중 가장 널리 쓰이고 있는

유도항법의 하나가 비례항법(Proportional Navigation Guidance Law, PNGL)이다. 비례항법의 유효성은 널리 알려져 있으며, 특히 방향조정을 하지 않는 목표물이나 일정가속도로 방향조정을 하는 목표물에 대한 성능은 이론적으로 이미 증명된 바 있다[1,2,3]. 그러나 임의의 방향조정을 하는 목표물에 대한 기존 비례항법의 성능에 관해서는 알려진 바가 거의 없는 상태이다. 실제로, 비례항법을 사용하는 경우에는, 미사일이 목표물에 비해서 속도와 가속능력이 뛰어나야 좋은 성능을 낼 수 있으며, 추적의 마지막 단계에서 미사일이 성취할 수 없는 과도한 지시가속도를 필요로 하는 경우가 많고 이로 인하여 명중오차(miss distance)가 유발된다. 특히 방향조정을 하는 목표물에 대해서는 그 명중오차가 크게 나타나는 경향이 있다. 이러한 목표물의 방향조정으로 인한 명중오차를 보상하기 위하여 유도항법에 목표물의 가속도에 비례하는 항을 부가한 보완된 비례항법(Augmented PNGL, APNGL)을 사용하기도 한다[4].

1960년대 이후에는 최적제어이론 및 확률제어이론을 적용한 여러가지 최적항법(Optimal Guidance Law, OGL)이 개발되었다. 전형적인 최적항법 문제로서, 목표물의 방향조정과 측정잡음을 고려한 선형모델에 LQG 이론을 적용하여 유도법칙을 구성하면 시변 비행상수를 갖는 보완된 비례항법의 형태가 되며, 미사일의 다이내믹스 모델링 여부에 따라 그 보상항을 포함하기도 한다[5,6,7]. 최적항법을 유도함에 있어서 명중오차만을 평가함수로 잡으면 비행상수가 시불변 상수로 고정되어 비례항법/보완된 비례항법과 같아지므로, 비례항법/보완된 비례항법이 명중오차를 최소화하는 최적항법이 될 수 있음을 보여준다[8].

본 논문에서는 Lyapunov 함수 접근방식을 사용하여, 임의의 가속도를 내는 목표물에 대한 비례항법의 성능을 이론적으로

분석함으로써, 적절한 초기조건 및 비행상수를 갖는 미사일이 유한시간 내에 목표물을 명중시킬 수 있음을 증명하고, 이때의 미사일의 가속도 특성을 고찰한다. 또한, 추적의 마지막 단계에서 과도한 지시가속도를 필요로 하는 비례항법의 단점을 보완할 수 있는 수정비례항법(Modified PNGL, MPNGL)을 제안하여, 임의의 방향조정을 하는 목표물에 대한 성능을 이론적으로 입증하고, 시뮬레이션을 통하여, 추적의 마지막 단계에서 기존 비례항법의 경우보다 가속도 특성이 개선됨을 보인다.

## 2. 기존 비례항법의 성능분석

기존 비례항법의 지시가속도는 (1)과 같이 주어진다.

$$A_{mc} = NV_m \dot{\sigma} \quad (1)$$

여기서  $A_{mc}$ 와  $V_m$ 은 각각 미사일의 지시가속도(commanded lateral acceleration)와 속도이고  $\dot{\sigma}$ 는 LOS의 회전각속도, 그리고  $N$ 은 비행상수(navigation constant)이다.

비례항법 및 다음장에 나오게 될 수정비례항법의 성능을 분석하기 위하여 다음과 같이 가정한다.

- (A.1) 목표물과 미사일은, 각각, 평면상에서 일정속도  $V_t$ 와  $V_m$ 으로 운동하는 점질량이다.
- (A.2) 탐색기(seeker)와 자동조종장치(autopilot)의 다이내믹스는 전체 유도루프(guidance loop)에 비해서 무시할 수 있을 만큼 충분히 빠르다.
- (A.3) 미사일의 공격각(angle of attack)은 무시할 수 있을 만큼 충분히 작다.
- (A.4) 미사일의 속도는 목표물의 속도보다 빠르다. 즉,  $V_m > V_t$ .

이상과 같은 가정하에서 방향조정을 하는 목표물에 대한 피치 평면의 추적상황을 그림1에 도시하였다. 추적상황은 미사일에 중심을 둔 상대좌표계로 나타내며 기준축은 초기 LOS 방향으로 잡는다. 그러면,  $(R, \sigma)$ 의 극좌표계에서 미사일과 목표물의 운동은 다음과 같은 식으로 표시될 수 있다.

$$\dot{R} = (\rho \cos \theta_t - \cos \theta_m)V_m \quad (2)$$

$$R\dot{\sigma} = (\rho \sin \theta_t - \sin \theta_m)V_m \quad (3)$$

$$\dot{\gamma}_t = A_t/V_t \quad (4)$$

$$\dot{\gamma}_m = A_m/V_m, \quad A_m = A_{mc} \quad (5)$$

여기서  $R, \sigma, \gamma_t, \gamma_m$ 은 그림1에 정의된 바와 같고

$$\theta_t = \gamma_t - \sigma, \quad \theta_m = \gamma_m - \sigma, \quad \rho = V_t/V_m \quad (6)$$

이다.

위의 간략화된 운동식을 기초로 다음의 결과를 얻을 수 있다.

**정리 1:** (A.1)-(A.6)가 성립한다고 가정하자.

(A.5) 미사일과 목표물이 다음의 초기조건을 만족한다.

$$|\rho \sin \theta_t(0) - \sin \theta_m(0)| < \beta, \quad (7)$$

$$|\theta_m(0)| < \sin^{-1}(\rho + \beta). \quad (8)$$

여기서  $\sin^{-1}(\rho + \beta)$ 는  $(0, \pi/2)$ 에 속하는 값으로 간주되며  $\beta$ 는 (9)를 만족하는 상수이다.

$$0 < \beta < 1 - \rho, \quad (9)$$

(A.6) 목표물의 가속도는 다음 범위 내에 있다.

$$|A_t(t)| \leq \eta, \quad t \geq 0. \quad (10)$$

이때, 비례항법 (1)에서

$$N > (1 + \rho + \eta R(0)/\beta V_m^2) / \sqrt{1 - (\rho + \beta)^2} \quad (11)$$

이 되도록 비행상수  $N$ 을 택하면,

$$R(t_f) = 0, \quad t_f < R(0)/V_m \sqrt{(1 - \rho)^2 - \beta^2} \quad (12)$$

이 되는 유한시간  $t_f$ 가 존재하고, 이때

$$|\theta_m(t)| < \sin^{-1}(\rho + \beta), \quad t \geq 0. \quad (13)$$

정리1은 임의의 방향조정을 하는 목표물에 대한 비례항법의 성능을 나타내는 것으로서 적절한 초기 헤딩(heading) 및 비행상수가 만족되면 (1)의 비례항법으로 유도되는 미사일이 유한시간 내에 한정된 크기로 방향조정을 하는 어떠한 목표물도 명중시킬 수 있음을 의미한다.

우선, 미사일의 초기조건 (7),(8)과 비행상수조건 (10)에 관하여 살펴본다. (7),(8)에서  $\theta_m(0)$ 은 미사일의 초기 lead angle을 나타내는데,  $\beta$ 가 0으로 접근하면 미사일의 헤딩이 초기 충돌 코스(collision course)에 가까워져야 하고  $\beta$ 가 커질수록 충돌 코스에서 벗어날 수 있는 정도가 커지게 된다. 이는  $\beta$ 의 크기에 따라서 어느 정도의 초기 헤딩오차가 허용됨을 뜻하므로, 목표물의 속도와 진행방향에 관한 대략적인 정보만 있으면 미사일의 초기 헤딩을 정할 수 있고 (7),(8)을 만족시킬 수 있다. 한편, (10)은 비행상수  $N$ 의 하한치를 정하고 있는데 목표물의 속도 및 가속도, 그리고 초기의 상대거리에 관한 대략적인 정보를 이용하면 과도하게 크지 않은 적절한  $N$  값을 취할 수 있다. 만일 이러한 정보가 없다면  $N$ 을 충분히 크게 잡아야 한다.

(7)과 (10)에서  $\beta$ 의 역할을 살펴보면,  $\beta$ 가 커질수록 launch envelope가 커지는 대신 비행상수  $N$  값도 커야하며,  $\beta$ 가 작을수록 초기 헤딩은 정확해야 하는 반면 비행상수  $N$  값을 작게 잡을 수 있다. 그러므로 두 조건을 모두 충족시킬 수 있는 적절한  $\beta$  값을 선택하여야 한다.

정리1을 증명하기 위하여 먼저 보조정리1,2를 기술한다.

**보조정리 1 :** (A.1)-(A.5)가 성립한다고 가정하자.

만일 어떤 시간  $t_1 \in [0, \infty)$  에 대해서

$$|\rho \sin \theta t(t) - \sin \theta m(t)| < \beta, \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (14)$$

가 만족되면,  $\theta m$ 이 다음 범위 내에 유지되고

$$|\theta m(t)| < \sin^{-1}(\rho + \beta), \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad (15)$$

목표물과 미사일 사이의 거리는 다음 비율로 감소한다.

$$\dot{R}(t) < -V_m \sqrt{(1-\rho)^2 - \beta^2}, \quad 0 \leq t \leq t_1. \quad (16)$$

<증명> (14)로부터

$$|\sin \theta m(t)| < \rho + \beta, \quad 0 \leq t \leq t_1. \quad (17)$$

$\Omega_1$ 과  $\Omega_2$ 를 다음과 같은 집합이라 하자:

$$\Omega_1 = \{\theta \in R^1: |\theta| < \sin^{-1}(\rho + \beta)\},$$

$$\Omega_2 = \{\theta \in R^1: |\theta - \pi| < \sin^{-1}(\rho + \beta)\}.$$

이 두 집합은 그림2와 같이 도식될 수 있으며, (17)은 다음과 같이 표시된다.

$$\theta m(t) \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (18)$$

$\Omega_1 \cup \Omega_2$ 는 불연속(path-disconnected) 상태의 집합인 반면  $\theta m$ 은 시간에 대해 연속이므로,  $\Omega_1$ 의 한점에서 출발한  $\theta m$ 의 궤적은  $\Omega_2$ 로 들어갈 수 없으며 그 반대의 경우도 성립한다. 따라서 (8)은 (15)를 보장한다.

이제, (16)을 증명한다. (14)로부터

$$|\sin \theta m(t)| < \beta + \rho |\sin \theta t(t)|, \quad 0 \leq t \leq t_1. \quad (19)$$

한편, (15)에 의해서

$$\cos \theta m(t) > 0, \quad 0 \leq t \leq t_1. \quad (20)$$

(19)와 (20)으로부터

$$\cos \theta m(t) > \sqrt{1 - (\beta + \rho |\sin \theta t(t)|)^2}, \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (21)$$

이 되고, (2)와 (21)로부터 (22)가 성립한다.

$$\dot{R}(t)/V_m < f(\theta t), \quad 0 \leq t \leq t_1. \quad (22)$$

여기서,

$$f(\theta t) = \rho \cos \theta t(t) - \sqrt{1 - (\beta + \rho |\sin \theta t(t)|)^2}. \quad (23)$$

$f$ 의 최대값을 계산하면

$$\max_{-\pi \leq \theta t \leq \pi} f(\theta t) = -\sqrt{(1-\rho)^2 - \beta^2}. \quad (24)$$

(22)와 (24)에 의해서 (16)이 증명된다. <증명끝>

**보조정리 2 :** 정리1의 모든 가정과 조건이 만족되고 미사일이 비례항법 (1)로 유도될 때 어떤 시간  $t_2 > 0$  에 대해서  $\theta m$ 이 다음 범위 내에 유지되면

$$|\theta m(t)| < \sin^{-1}(\rho + \beta), \quad 0 \leq t \leq t_2, \quad (25)$$

목표물과 미사일 사이의 거리가 다음 비율로 감소한다.

$$\dot{R}(t) < -V_m \sqrt{(1-\rho)^2 - \beta^2}, \quad 0 \leq t \leq t_2. \quad (26)$$

<증명> (26)이 성립하지 않는다고 가정하면 다음을 만족하는  $t_3 \in (0, t_2)$  가 존재한다.

$$\dot{R}(t) < -V_m \sqrt{(1-\rho)^2 - \beta^2}, \quad 0 \leq t < t_3, \quad (27)$$

$$\dot{R}(t_3) = -V_m \sqrt{(1-\rho)^2 - \beta^2}. \quad (27)'$$

이제 Lyapunov-like 함수  $V$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$V(t) = \frac{1}{2} \{R(t) \dot{\sigma}(t)\}^2 \quad (28)$$

그러면,

$$\dot{V} = R \dot{\sigma} (\dot{R} \dot{\sigma} + R \ddot{\sigma}). \quad (29)$$

한편, (3)을  $t$ 에 대해서 미분한 후 (2), (4)-(6)을 이용하면

$$R \ddot{\sigma} = -2\dot{R} \dot{\sigma} + A t \cos \theta t - A m \cos \theta m. \quad (30)$$

(30)을 (29)에 대입하여 정리한 후, (5)와 (1)을 이용하면

$$\dot{V} = R \dot{\sigma}^2 (-\dot{R} - N V_m \cos \theta m) + R \dot{\sigma} A t \cos \theta t. \quad (31)$$

(10), (11), 그리고

$$-\dot{R}(t) \leq V t + V_m, \quad R(t) \geq 0, \quad t \geq 0 \quad (32)$$

로부터

$$\dot{V} < R V_m \dot{\sigma}^2 \{1 + \rho - \cos \theta m(1 + \rho + \eta R(0)/\beta V_m^2) / \sqrt{1 - (\rho + \beta)^2}\} + |R \dot{\sigma}| \eta, \quad t \geq 0. \quad (33)$$

한편, (27)과 (27)'에 의해서

$$R(t)/R(0) \leq 1, \quad 0 \leq t \leq t_3. \quad (34)$$

또한, (25)를 이용하면,

$$\cos \theta m(t) / \sqrt{1 - (\rho + \beta)^2} \geq 1, \quad 0 \leq t \leq t_3. \quad (35)$$

(33)-(35)에 의해서

$$\dot{V} < -2\eta V / \beta V_m + \eta \sqrt{2V}, \quad 0 \leq t \leq t_3. \quad (36)$$

이 부등식을 풀면,

$$|R \dot{\sigma}| < \beta V_m - (\beta V_m - |R(0) \dot{\sigma}(0)|) \exp(-\eta t / \beta V_m), \quad 0 \leq t \leq t_3. \quad (37)$$

(3)을 대입한 후 (7)을 적용시키면,

$$|\rho \sin \theta t - \sin \theta m| < \beta, \quad 0 \leq t \leq t_3. \quad (38)$$

(38)과 보조정리1에 의해서

$$\dot{R}(t) < -V_m \sqrt{(1-\rho)^2 - \beta^2}, \quad 0 \leq t \leq t_3. \quad (39)$$

$t = t_3$ 에서 (39)가 (27)'에 모순되므로 (26)이 성립한다. <증명끝>

이제, 보조정리2를 이용하여 정리1을 증명한다.

<정리1의 증명> 먼저 (13)을 증명한다.

(13)이 성립하지 않는다고 가정하면, (8)에 의해서, 다음을 만족하는  $t_0 > 0$  가 존재하여야만 한다.

$$|\theta m(t)| < \sin^{-1}(\rho + \beta), \quad 0 \leq t < t_0, \quad (40)$$

$$|\theta m(t_0)| = \sin^{-1}(\rho + \beta). \quad (40)'$$

(40), (40)'와 보조정리2에 의해서

$$\dot{R}(t) < -V_m \sqrt{(1-\rho)^2 - \beta^2}, \quad 0 \leq t \leq t_0. \quad (41)$$

보조정리2의 증명에 사용된 것과 같은 논법을 사용하면 (40), (40)', (41)로부터 (42)를 얻을 수 있다.

$$|\rho \sin \theta t(t) - \sin \theta m(t)| < \beta, \quad 0 \leq t \leq t_0. \quad (42)$$

보조정리1에 의해서 (42)는 (43)을 의미한다.

$$|\theta_m(t)| < \sin^{-1}(\rho + \beta), \quad 0 \leq t \leq t_0. \quad (43)$$

$t=t_0$  에서 이것은 (40)'에 모순되므로 (13)이 증명되고, 다시 보조정리2에 의해서

$$\dot{R}(t) < -V_m \sqrt{(1-\rho)^2 - \beta^2}, \quad t \geq 0. \quad (44)$$

(44)에 의해서 (12)는 자명하다. <증명끝>

정리1을 통하여 임의의 방향조정을 하는 목표물에 대한 비례항법의 성능을 입증하였다. 그러나 이러한 성능은, (1)에 의해서 요구되는 가속도가 실제로 성취될 수 있는 크기여야 더욱 의미가 있다. 따라서 정리2를 통하여 정리1의 성능이 유한한 가속도에 의해서 성취될 수 있음을 보인다.

**정리 2:** 정리1의 가정, (A.1)-(A.6)에 부가하여

$$N > 4 / \sqrt{1 - (\rho + \beta)^2} \quad (45)$$

이 되도록 비행상수  $N$ 을 선택하면, LOS 각속도가

$$|\dot{\sigma}(t)| \leq \delta, \quad t \geq 0 \quad (46)$$

가 되는 상한치  $\delta$ 가 존재하고, 이때 미사일 지시각속도의 크기는 (47)과 같이 유한한 값을 갖는다.

$$|A_m(t)| \leq NV_m \delta, \quad t \geq 0 \quad (47)$$

<증명> 상수  $\delta$ 를 (46)과 같이 정의한다.

$$\delta = \max \{ \eta/2(1-\rho)V_m, |\dot{\sigma}(0)| \} \quad (48)$$

(46)이 성립하지 않는다고 가정하면 (49)를 만족하는  $t_4$ 가 존재한다.

$$|\dot{\sigma}(t_4)| > \delta. \quad (49)$$

한편, 초기값은  $|\dot{\sigma}(0)| < \delta$ 이므로 다음을 만족하는  $t_5$ 가 존재하여야 한다.

$$|\dot{\sigma}(t_5)| = \delta, \quad (50)$$

$$|\dot{\sigma}(t)| > \delta, \quad t_5 < t \leq t_4. \quad (50)'$$

이제 Lyapunov-like 함수  $V$ 를 정의한다.

$$V(t) = \frac{1}{2} \dot{\sigma}^2(t), \quad t \geq 0 \quad (51)$$

$V$ 를  $t$ 에 대해서 미분한 후, (30), (5), (1)을 이용하여 정리하면,

$$\dot{V} = -\{2\dot{R} + NV_m \cos \theta_m\} \dot{\sigma}^2 - \dot{\sigma} A_t \cos \theta t / R, \quad t \geq 0. \quad (52)$$

(52)를 대입하고

$$\cos \theta_m \geq \sqrt{1 - (\rho + \beta)^2}, \quad |A_t \cos \theta t| \leq \eta \quad (53)$$

를 이용하면,

$$\dot{V} \leq -\{NV_m \sqrt{1 - (\rho + \beta)^2} - 2(1 + \rho)V_m\} \dot{\sigma}^2 - \eta |\dot{\sigma}| / R, \quad t \geq 0. \quad (54)$$

(54)에 의해서

$$\dot{V} < -2(1 - \rho)V_m |\dot{\sigma}| \left\{ |\dot{\sigma}| - \eta/2(1 - \rho)V_m / R, \quad t \geq 0. \quad (55) \right.$$

(48), (50)'에 의해서

$$\dot{V} < 0, \quad t_5 < t \leq t_4. \quad (56)$$

따라서,

$$|\dot{\sigma}(t)| < |\dot{\sigma}(t_5)| = \delta, \quad t_5 < t \leq t_4. \quad (57)$$

$t=t_4$  에서 (57)은 (50)'에 모순되므로 (46)이 성립한다. 그리고 (46)과 (1)에 의해서 (47)도 성립한다. <증명끝>

만일, 방향조정을 하지 않는 목표물에 대한 추적만을 생각한다면, (55)에서  $\eta=0$  이므로 (56)이 모든  $t$ 에 대해서 성립한다. 따라서, 시간이 흐름에 따라  $\dot{\sigma}$ 가 계속 감소하여 영으로 접근함을 알 수 있는데 이는 기존의 연구결과와 일치한다[9].

### 3. 수정비례항법과 그 성능분석

본 논문에서 제안하는 수정비례항법의 지시각속도는 (58)과 같으며  $V_m$ 에 수직한 방향으로 작용한다.

$$A_m = \frac{NV_m \dot{\sigma} + \hat{A}t}{\cos \theta_m} \quad (58)$$

여기서,  $\hat{A}t$ 는 목표물의 가속도 중에서 LOS에 수직한 성분인  $A_t \cos \theta t$ 를 추정된 값이고  $\theta_m$ 은 미사일의 비행경로각이 LOS와 이루는 각, 그리고  $N$ 은 비행상수(navigation constant)이다. 수정비례항법으로 유도되는 미사일이 방향조정을 하는 목표물을 명중시키기 위해서는  $N$ 의 크기가 충분히 커야하는데 그 구체적인 하한치는 뒤에 나오는 정리3에 주어진다.

$\theta_m$ 은 그림3에서 알 수 있듯이  $(\gamma_m - \sigma)$ 로 계산된다. 일반적으로, 이 양은 직접 측정할 수 있는 것은 아니다. 그림3에서 보듯이 미사일의 공격각(angle of attack) 및 탐색기(seeker)의 boresight error가 무시될 수 있을 정도로 작다면, 이 각은 미사일의 몸체 중심축과 탐색기 안테나의 중심선이 이루는 각,  $\theta_h$ 로 근사화될 수 있다.  $\theta_h$ 는 탐색기의 gimbal angle로서 직접 측정가능하므로 실제 응용에 있어서는  $\theta_m$  대신  $\theta_h$ 를 사용하여 다음과 같은 유도법칙을 사용할 수 있다.

$$A_m = \frac{NV_m \dot{\sigma} + \hat{A}t}{\cos \theta_h} \quad (59)$$

**정리 3:** (A.1)-(A.5)와 (A.6)'가 성립한다고 가정하자.

(A.6)' 다음을 만족하는 상수  $\eta$ 가 존재한다.

$$|A_t \cos \theta t - \hat{A}t| \leq \eta, \quad t \geq 0. \quad (60)$$

수정비례항법 (58)에서

$$N > 1 + \rho + \eta R(0) / \beta V_m^2 \quad (61)$$

이 만족되도록 비행상수 N 을 택하면 (12)와 (13)이 성립한다.

<증명> 정리1의 증명에 사용되었던 보조정리2를 다음의 보조정리3으로 대체하면 정리1과 똑같은 논법으로 정리3이 증명된다.

**보조정리 3** : 수정비례항법 (58)에 대해서 정리3의 모든 가정이 성립한다면 (25)는 (26)을 의미한다.

<증명> 보조정리2 에서와 똑같은 논법이 적용되며 몇몇 수식이 삭제되거나 변경된다. (31)대신

$$\dot{V} = R \dot{\sigma}^2 (-\dot{R} - NV_m) + R \dot{\sigma} (At \cos \theta t - \hat{A}t) \quad (62)$$

이 사용되며, (33),(35) 없이 (32),(34),(60)-(62)로 부터 직접 (36)을 얻을 수 있다. <증명끝>

수정비례항법에서  $\hat{A}t$ 의 역할을 알아보자.  $At \cos \theta t$  를 정확하게 추정하면 할수록  $\eta$  가 작아지므로 비행상수 N 을 작게 선택 할 수 있다. 직관적으로 생각할 때 이는 미사일의 소요에너지를 줄일 수 있음을 의미하는 듯 하는데 시뮬레이션을 통하여 확인해 보도록 한다. 한편, 실용적인 측면에서 볼 때, LOS 각속도에 측정잡음이 섞이는 경우, 비행상수 N 이 작으면 작을수록 측정잡음의 영향을 적게 받으므로  $\hat{A}t$ 의 정확성은 측정잡음의 영향을 줄이는데도 기여한다. 본 논문에서는 실제로  $\hat{A}t$ 를 어떻게 추정하는가에 관해서는 다루지 않는데, 정리3에서 알 수 있듯이 비록  $\hat{A}t$ 를 정확하게 추정하지 못한다 하더라도 비행상수 N 을 충분히 크게 잡기만 하면 수정비례항법의 성능이 보장되므로  $\hat{A}t$ 의 정확도가 목표물의 명중여부에 결정적 역할을 하지는 못한다.  $\hat{A}t$ 의 추정에 관해서는 앞으로도 연구가 계속되어야 할 것으로 생각된다.

마지막으로, 수정비례항법의 지시각속도에 관하여 살펴본다.

**정리 4**: 정리3의 가정에 부가하며 (A.7)이 만족된다고 가정하자. (A.7) 목표물의 각속도는 다음과 같이 상수  $\eta'$  범위 내에 있다.

$$|At(t)| < \eta', \quad t \geq 0. \quad (63)$$

비행상수 N 을

$$N > 4 \quad (64)$$

가 되도록 택하면, (46)이 만족되고 미사일 지시각속도의 크기는 (65)와 같이 유한한 값을 갖는다.

$$|A_m c(t)| < (NV_m \delta + \eta') / \sqrt{1 - (\rho + \beta)^2}, \quad t \geq 0. \quad (65)$$

<증명> 정리4의 증명은 정리2의 증명과 유사하다. (53)을 삭제하고 (52),(54) 대신 각각 (66),(67)을 사용하며, (63)을 이용하면 된다.

$$\dot{V} = - [(2\dot{R} + NV_m) \dot{\sigma}^2 - \dot{\sigma} (At \cos \theta t - \hat{A}t)] / R, \quad t > 0, \quad (66)$$

$$\dot{V} < - [(NV_m - 2(1 + \rho)V_m) \dot{\sigma}^2 - \eta' |\dot{\sigma}|] / R, \quad t \geq 0. \quad (67)$$

<증명끝>

수정비례항법의 경우에도 방향조정을 하지 않는 목표물에 대해서는  $\dot{\sigma}$  가 영으로 접근함을 쉽게 보일 수 있다.

#### 4. 시뮬레이션

컴퓨터 시뮬레이션을 통하여, 수정비례항법에서  $\hat{A}t$ 의 정확도가 미사일의 소비에너지에 미치는 영향을 살펴보고, 기존 비례항법과 수정비례항법의 성능 및 가속도 특성을 비교,평가한다.

시뮬레이션을 위하여, 미사일의 다이내믹스는 2차계로 모델링하였으며 탐색기의 다이내믹스는 1차계로 모델링하였다. 시뮬레이션에 사용된 데이터를 표1에 요약하였다.

먼저,  $\hat{A}t$ 의 정확도가 미사일의 소비에너지에 미치는 영향을 살펴보기 위하여, 미사일과 탐색기의 다이내믹스와 측정잡음을 무시하고, 2.0 라디안(rad)의 초기 비행경로를 갖는 목표물에 대한 추적을 시뮬레이션하여 표2의 결과를 얻었다. 표2를 살펴보면  $\hat{A}t$ 의 정확도가 높을수록 미사일의 소비에너지가 줄어든다는 것을 알 수 있다.

다음으로, 기존 및 수정비례항법의 성능을 평가하기 위하여 여러가지 상황에서 시뮬레이션을 수행하였다. 표3에 보는 바와 같이 평균 비행시간(homing duration time)에 있어서는 두가지 유도항법 모두 6.3초로서 차이가 없었으나 평균 명중오차(miss distance)에 있어서는 기존 비례항법이 5.73 미터, 그리고 수정비례항법이 2.82 미터로서 수정비례항법의 성능이 우수한 것으로 나타났다. 그림4는, 목표물이 초기에는 5g의 가속도로 비행하다가 t=3 초에서 방향을 바꾸어 -5g의 가속도로 비행하는 경우에 대한 두가지 비례항법의 가속도 추이를 나타낸다. 추적초기에는 수정비례항법의 가속도가 기존 것의 경우보다 다소 크지만 추적의 마지막 단계에서는 기존 비례항법의 경우, 과도한 지시각속도에 의해서 미사일의 가속도 제한에 걸리게 되고 이로 인하여 큰 명중오차가 유발되지만, 수정비례항법의 경우에는 과도한 지시각속도가 발생되지 않는다는 것을 알 수 있는데, 대부분의 추적상황에서 이러한 현상이 공통적으로 일어났다. 따라서 수정비례항법을 사용하는 경우에는 추적의 마지막 단계에서 가속도 특성이 개선되고 이로 인하여 명중오차가 줄어들을 알 수 있다.

#### 5. 결론

본 논문에서는 Lyapunov 함수 접근방식을 이용하여 임의의 방향조정을 하는 목표물에 대한 비례항법의 성능을 입증하고 그 가속도 특성을 알아보았으며, 수정비례항법을 제안하였다. 수정

비례항법은 기존 비례항법에 비하여 추가적인 측정과 추정을 필요로 하지만 추적의 마지막 단계에서는 미사일의 가속도 특성을 개선시킬 수 있고 그로 인하여 미사일의 성능도 개선시킬 수 있음을 보였다. 수정비례항법과 관련하여, 목표물의 가속도 증에서 LOS에 수직인 성분을 추정하는 방법에 관한 연구가 계속되어야 할 것으로 생각한다.

### 참고문헌

- [1] Murtaugh, S. A., and Criel, H. E., "Fundamentals of Proportional Navigation," *IEEE Spect.*, Dec. 1966, pp.75-85
- [2] Guelman, M., "A Qualitative Study of Proportional Navigation," *IEEE Trans. AES*, AES-Vol.7, No.4, Jul. 1971, pp. 637-643
- [3] Guelman, M., "Proportional Navigation with Maneuvering Target," *IEEE Trans. AES*, AES-Vol.8, No.3, May 1972, pp. 364-371
- [4] Siouris, G. M., "Comparison Between Proportional and Augmented Proportional Navigation," *Nachrichtentechnische Zeitschrift*, Jul. 1974, pp.278-280
- [5] Nesline, F. W. and Zarchan, P., "A New Look At Classical versus Modern Homing Missile Guidance," *Journal of Guidance and Control*, Vol.4, No.1, Jan.-Feb. 1981, pp.78-85
- [6] Cottrell, R. G., "Optimal Intercept Guidance for Short-Range Tactical Missiles," *AIAA Journal*, Vol.9, No7, Jul. 1971, pp.1414-1415
- [7] Asher, R. B. and Matuszewski, J. P., "Optimal Guidance with Maneuvering Targets," *Journal of Spacecraft*, Vol.11, No. 3, Mar. 1974, pp.204-206
- [8] Axelband, E. I. and Hardy, F. W., "Quasi-Optimum Proportional Navigation," *IEEE Trans. AC*, AC-Vol.15, No.6, Dec. 1970, pp.620-626
- [9] Guelman, M., "Missile Acceleration in Proportional Navigation," *IEEE Trans. AES*, May 1973, pp.462-463

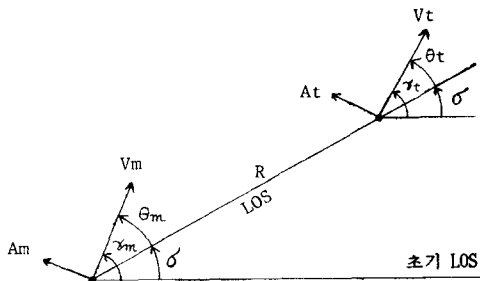


그림 1. 추적상황  
Fig. 1. Pursuit Geometry

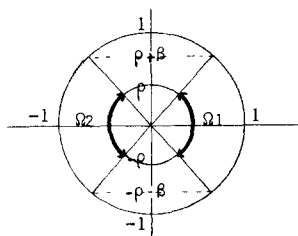


그림 2.  $\Omega_1$  과  $\Omega_2$   
Fig. 2.  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$

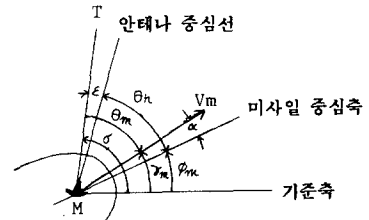


그림 3. 탐색기의 각  
Fig. 3. Seeker Angles

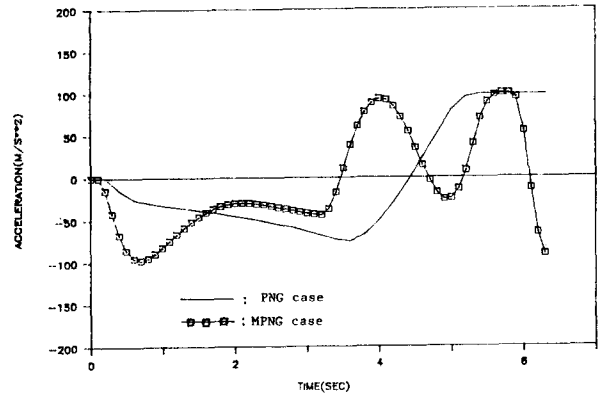


그림 4. 미사일의 가속도 추이  
Fig. 4. Acceleration Profile of Missile

표 1. 시뮬레이션 데이터  
Table 1. Simulation Data

$X_m(0), Y_m(0)$	0, 0	m
$X_t(0), Y_t(0)$	6000, 0	m
$V_t : V_m$	810 : 270	m/s
magnitude of target accel.	49	m/s <sup>2</sup>
accel. limit of missile	98	m/s <sup>2</sup>
time constant of seeker	0.1	s
damping ratio of M dynamics	0.8	-
natural frequency of M dynamics	10	rad/s

표 2. 미사일의 소비에너지  
Table 2. Consumed Energy of Missile

추정오차 $\frac{At \cos \theta_t - At}{At \cos \theta_t}$	소비에너지 $\int_0^t Am^2 dt$
1.0	1780
0.8	1339
0.5	9775
0.2	692
0.0	485

표 3. 명중오차  
Table 3. Miss Distance

	비행시간	명중오차
비례항법	6.3 초	5.73 미터
수정비례항법	6.3 초	2.82 미터