'88 韓國自動制御學術會議論文集 1988. 10. 21~22

시 변 시 스 템 의 적 응 제 어 에 관 한 연 구

*
곽 유 식 양 해 원
한양대학교 공과대학 전기공학과

(Adaptive Control of Time Varying System)

*
You-shik Kwak Hai-won Yang
Dept. of Electrical Eng., Hanyang univ.

<Abstract>

One of the major reasons of Adaptive Control is to control time varying systems. In this paper new adaptive algorithms are suggested for a class of linear time varying systems that satisfy certain assumptions. These algorithms consist of three modules, modeling, parameter estimation and control. The key feature of this paper is that power series of time varying parameters are used for estimation.

1. 머 릿 말

적응제어기라 함은 플랜트의 파라미터값들을 모르거나 그 값들이 변할 경우 제어기 파라미터 값들을 스스로 조정하여 원하는 출력을 주는 제어기를 뜻한다. 적응제어 알고리즘은 전형적인 비선형 알고리즘이며 관련된 이론의 완성에는 많은 어려움이 있었고 지난 30년간 꾸준히 연구되어 왔다.

선형시불변 시스템의 적응제어 는 1970년대 말 이론적으로 완성되었다 [1] - [3]. 그러나 이 이론들은 실제의 시스템과 공칭모델 사이에 비모형화 특성(unmodeled dynamics)이 존재하는 경우 적당하지 못함이 연구 발표되었으며 [4], 이와 같은 경우 적용가능한 적응 제어 알고리즘에 대한 연구가 활발히 진행 되어 왔다.또한 시스템 상태가 PE(Persistency of Excitation) 조건을 만족하는 경우 적응제어 알고리즘은 비모형화 특성과 파라미터의 변화에 대해 강인함도 밝혀졌다. 그러나 실제 플랜트에 적응제어 이론을 적용하는 경우 기준입력은 PE 조건을 만족시키지 못할 때가 더 많다.

Goodwin은 [7]에서 몇 가지 조건을 만족시키는 선형시변시스템에 적용할 수 있는 적응제어 알고리즘을 제안하였다. 이 논문 은 PE조건이 배제된 가운데 시스템의 강인성과 안정도가 증명되었다는 점에서 특이하다. 그러나 파라미터를 추정하는데 있어서 파라미터의 시간변화율이 크면 데드 존(dead zone)도 따라서 커지며 파라미터의 오차도 커지는 문제가 있다.

본 논문에서는 데드 존을 보다 줄일 수 있으며 따라서 파라미터오차도 줄일 수 있 는 방법을 소개한다. 요약하면 대상은 파라미터들이 시간에 대해 멱급수를 갖는 시스템으로 한정한다. 그리고 제어 알고리즘은 파라미터함수를 멱급수로 전개한 다음 상수항과 1차항의 계수만 추정하여 파라미터값들의 근사치를 구하고 그 값들로부터 제어입력을 계산하는 것이다.

2. 시스템의 수학적 모델

다음과 같은 입출력 관계식을 만족시키는 시스템을 생각한다.

$$A(t,D)\ y(t) = B(t,D)\ u(t) \tag{1}$$

여기서

$$A(t,D) = D^{n} + a_{n-1}(t)D^{n-1} + \ldots + a_{o}(t)$$

$$B(t,D) = b_{m}(t)D^{m} + \ldots \quad + b_{o}(t)$$

$$D = d/dt, \quad n>m$$

이후로 특별한 혼란이 없는 경우 인수 t와 D는 생략한다. (1)식을 다시 쓰면

$$D^{n}y = (D^{n} - A)y + Bu$$

윗 식의 양 변에 1/F를 연산한다. 여기서 F는 시불변 미분연산자 다항식이며 다음과 같이 표시된다.

$$F(D) = D^{n} + f_{n-1}D^{n-1} + \ldots + f_{o}$$

그러면 결과적으로 다음식을 얻는다.

$$y = \frac{1}{F}\ (\ F - A\ )y + \frac{1}{F}\ Bu \tag{2}$$

Goodwin은 다음과 같은 방법으로 모델링하였다. (2)식의 우변에 (B - A)(1/F)을 더하고 빼준 다음 정리를 하면

$$y = x_{1}^{T}\Theta_{1} + v_{1} \tag{3}$$

여기서

$$\Theta_{1}^{T} = [\ f_{n-1} - a_{n-1}, \ldots .\ f_{o} - a_{o}, b_{m}, \ldots b_{o}\ ]$$

$$x_{1}^{T} = [(D^{n-1}/F)y, ., (1/F)y, (D^{m}/F)u, ., (1/F)u]$$

$$v_{1} = 1/F(F \cdot A - A \cdot F)(1/F)y + 1/F(B \cdot F - F \cdot B)(1/F)u$$

본 논문에서는 다음과 같이 모델링한다. 다항식 A,B의 계수들을 임의의 동작점 T 부근에서 멱급수로 전개한 다음 2차 이상의 항을 무시하면

$$A(t,D) \doteq D^{n-1} + \{\ a_{n-1}^{o} + a_{n-1}^{1}\ (t-T)\ \}D^{n-1} + \ldots . + a_{o}^{o} + a_{o}^{1}\ (t-T)$$

$$= A_{o}(D) \quad + A_{1}(t-T,D) \tag{4}$$

$$B(t,D) \doteq \{b_m^0 + b_m^1(t-T)\}D^m + \dots + b_0^0 + b_0^1(t-T)$$
$$= B_0(D) + B_1(t-T,D) \qquad (5)$$

(4)식과 (5)식을 사용하여 (2)식을 다시 쓰면

$$y \doteq \frac{1}{F}(F-A_0)y - \frac{1}{F}\{a_{n-1}^1(t-T)D^{n-1}y + \dots + a_0^1(t-T)y\} + \frac{1}{F}Bu + \frac{1}{F}\{b_m^1(t-T)D^m u + \dots + b_0^1(t-T)u\} \qquad (6)$$

윗 식을 추정해야 할 파라미터 벡터와 우리가 얻을 수 있는 신호벡터와의 곱으로 나타내기 위하여 다음의 Lemma를 이용한다.

Lemma.

i) $\frac{1}{D}\, t\, D\, y(t) = ty(t) - \frac{1}{D}y(t)$

ii) $\frac{1}{D}(t-T)Dy(t) = (t-T)y(t) - \frac{1}{D}y(t)$

iii) $\frac{1}{F(D)}(t-T)Dy(t) = \frac{D}{F(D)}(t-T)y(t) - \frac{1}{F(D)}y(t)$

iv) $\frac{1}{F(D)}(t-T)D^m y(t) = \frac{D^m}{F(D)}(t-T)y(t) - m\frac{D^{m-1}}{F(D)}y(t)$

[증명] 부록참조

위 Lemma를 사용하여 (6)식을 정리하면

$$y(t) = x^T\Theta \qquad (7)$$

여기서

$$\Theta^T = [\, f_{n-1}', f_{n-2}' + (n-1)a_{n-1}^1, .., f_0' + a_1^1, -a_{n-1}^1, .., -a_0^1,\; b_m^0, b_{m-1}^0 - mb_m^1, \dots, b_0^0 - b_1^1, b_m^1, \dots b_0^1 \,]$$

$$x^T = [\frac{D^{n-1}}{F}y, \frac{D^{n-2}}{F}y, .., \frac{1}{F}y, \frac{D^{n-1}}{F}(t-T)y, .., \frac{1}{F}(t-T)y,\; \frac{D^m}{F}u, \frac{D^{m-1}}{F}u, .., \frac{1}{F}u, \frac{D^m}{F}(t-T)u, .., \frac{1}{F}(t-T)u]$$

$$f_i' = f_i - a_i^0$$

3. 파라미터의 추정

본 논문의 파라미터 추정 방법은 다음과 같다.

1) 동작점을 $T = jT'$(j = 0,1,2,...)로 변화시켜 가며 다음의 사영알고리즘을 사용 Θ를 추정한다.

파라미터 추정 알고리즘 1.; $v(t)=0$ 일 경우

$\hat{\Theta}(t) = P\{\alpha x(t)e(t)/(1+x(t)^T x(t))\}$;

$0<\alpha<\infty$, $e(t)=y(t)-x(t)^T\hat{\Theta}(t)$,

P: 사영 연산자

파라미터 추정 알고리즘 2.; $v(t)\neq 0$ 일 경우

$\hat{\Theta}(t) = P\{\alpha x(t)z(t)/(1+x(t)^T x(t))\}$;

$z(t)=e(t)\max[\, \{|e(T)| - d(t)\}/|e(t)|\, ,\ 0\,]$

여기서 $d(t)$는 다음을 만족하는 e_0, $\sigma>0$ 이 존재한다는 가정하에서 정의된 우리가 알고 있는 값이다.

$$|v(t)| < e_0 \sup_{0\le\tau\le t}\{\exp(-\sigma(t-\tau))w(x(\tau))\} = d(t)$$

여기서 $0 \le w(x) \le \|x\|$, $\forall x$

2) 추정된 $\hat{\Theta}$로부터 실제의 파라미터를 구한다.즉 $jT' \le t < (j+1)T'$일때

$\hat{a}_{ij}^0 = \hat{a}_i^0$, $\hat{a}_{ij}^1 = \hat{a}_i^1$, $\hat{b}_{ij}^0 = \hat{b}_i^0$, $\hat{b}_{ij}^1 = \hat{b}_i^1$

라 하면

$\hat{a}_i(t) = \hat{a}_{ij}^0 + \hat{a}_{ij}^1(t-jT')$, $jT' \le t < (j+1)T'$

$\hat{b}_i(t) = \hat{b}_{ij}^0 + \hat{b}_{ij}^1(t-jT')$, $jT' \le t < (j+1)T'$

3) T가 변하는 순간, 다시 말하면 $t=jT'(j=0,1,2..)$인 순간

$\hat{a}_{ij}^0 = \hat{a}_{i(j-1)}^0 + \hat{a}_{i(j-1)}^1 T'$

$\hat{b}_{ij}^0 = \hat{b}_{i(j-1)}^0 + \hat{b}_{i(j-1)}^1 T'$

로 새롭게 하여 준다.

4. 적응제어

위에서 소개한 방법으로 추정된 파라미터값으로 기준모델 적응제어등 여러가지 제어입력을 구할 수 있겠으나 본 논문에서는 극배치제어에 대하여 논한다.

제어입력은 다음 식으로부터 계산된다.

$$\hat{L}(\frac{1}{F}u) = \hat{P}(\frac{1}{F}y^* - \frac{1}{F}y) \qquad (8)$$

여기서 y^*는 유한한 기준입력신호이고 $\hat{L}, \hat{P}$ 는 D의 다항식으로 각각 n차와 n-1차이며 다음의 항등식을 만족한다.

$$\hat{A}\hat{L} + \hat{B}\hat{P} = A^* \qquad (9)$$

또 여기서 A^*는 임의로 설계된 D의 2n차 다항식이며 다음을 만족한다.

$$\mathrm{Re}[\lambda_i(A^*)] < -\sigma < 0$$

여기서 $\lambda i(\cdot)$는 i번째 다항식의 근을 나타내고 Re는 실수부를 뜻한다.

여기서 (9)의 항등식이 유한한 $|\hat{L}|$, $|\hat{P}|$ 값을 보장하게 하기위해 다음과 같은 가정을 한다. ($|\cdot|$ 는 다항식 계수벡터의 노음을 뜻한다.)

가정;

모든 $\hat{\theta}$는 convex region $C \subset R^{2(n+m+1)}$ 에 속해있으며 또한 C는 모든 $\hat{\theta} \in C$ 에 대하여 유한한 $|\hat{L}|$, $|\hat{P}|$ 을 가지는 (9)식의 해를 준다.

위 가정은 시불변 시스템의 제어의 경우 흔히 볼 수있는 가정이며 특별한 것은 아니다 [6].

(8) 식을 다시 쓰면

$$u = (F-\hat{L})\frac{1}{F}u + \hat{P}(\frac{1}{F}y^* - \frac{1}{F}y) \qquad (10)$$

입력 u는 (10)식으로 주어 진다.

5. 컴 퓨 터 모 의 실 험

본 논문에서 제안한 알고리즘은 시스템의 수학적 모델을 구하는 방법과 파라미터의 추정방법이 특이하므로 여기에 촛점을 맞추고 Goodwin의 방법과 비교하여 보았다. 제안한 방법은 Goodwin의 방법에 비해 복잡하며 추정해야 할 파라미터의 수가 2배로 늘어남에 유의하라. 그리고 Goodwin은 모든 선형시변시스템군을 다루고 있는 반면 본 논문에서는 (1)식으로 표현되는 시스템만 고려했음을 밝혀둔다.

다음 식으로 주어지는 시스템을 생각하자.

$$(D + a(t))y(t) = b(t)u(t)$$

여기서

$$a(t) = 2 + \cos(0.2t)$$

$$b(t) = 5 + \cos(0.4t)$$

F는 두 방법에서 모두 (D + 7) 로 한다.

Goodwin의 방법으로 모델링하면

$$y = x^T\theta + v$$

$$x^T = [\ (1/F)y,\ (1/F)u\ ]$$

$$\theta^T = [\ 5-\cos(0.2t),\ 5 + \cos(0.4t)\ ]$$

$$v = -\frac{1}{D+7}(0.2\sin(0.2t))\frac{1}{D+7}y(t) + \frac{1}{D+7}(\ 0.4\sin(0.4t))\frac{1}{D+7}u(t)$$

제안한 방법으로 모델링하면

$$x^T=[(1/F)y,(1/F)(t-T)y,(1/F)u,(1/F)(t-T)u]$$

$$\theta^T=[5-\cos(0.2T),0.2\sin(0.2T),5+\cos(0.4T),-0.4\sin(0.4T)]$$

$$v = -\frac{1}{D+7}(-\frac{0.04}{2!}\cos(0.2T)(t-T) + \dots)y(t) + \frac{1}{D+7}(\frac{0.16}{2!}\cos(0.4T)(t-T) + \dots)u(t)$$

그림 1-a)는 Goodwin의 방법에 의한 a(t)의 추정치를 나타내고 그림 1-b)는 추정오차를 나타낸다. 또 그림 2-a)는 본 논문에서 제안한 방법으로 추정한 a(t)이며 그림 2-b)는 추정오차이다. 그림에서 본 논문의 방법이 파라미터 수렴특성이 좋고 추정오차를 작게함을 알 수 있다. 이것으로 미루어 보아 본 논문에서 제안한 추정 방법을 쓰면 보다 정확한 시변시스템의 제어입력을 구할 수 있을 것으로 기대된다.

6. 맺 음 말

본 논문에서는 시변시스템의 모델링 오차를 작게 하기 위하여 시변파라미터를 멱급수로 전개하여 추정하여 보았다. 그 결과 제안한 방법은 모델오차를 작게하여 데드 존을 줄일 수 있으며 결과적으로 정확한 파라미터 추정을 할 수있음을 보였다.

제안한 방법이, T' 이 0으로 수렴할 경우 Goodwin이 제안한 방법과 같아지고 T' 이 너무 커진다면 모델오차가 오히려 커지는 것을 생각하면 오차를 최소로 하는 T' 값과 또 그 값을 찾는데 필요한 정보가 무엇인지 밝히는 문제가 숙제로 남는다. 또 광범위한 시변 시스템에 적용할 수 있는 일반적인 방법을 구하는 문제,안정도와 강인성을 증명하는 문제도 풀어야 할 과제이다.

참 고 문 헌

[1] A.Feuer and A.S.Morse,"Adaptive Control of single input-single output linear system," IEEE Trans.Automat.Contr.,vol.AC-23,pp.557-570,1978

[2] K.S.Narendra,Y.H.Lin,and L.S.Valavani," Stable adaptive controller design,PartII:Proof of stability," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-25, pp. 440-449, 1980.

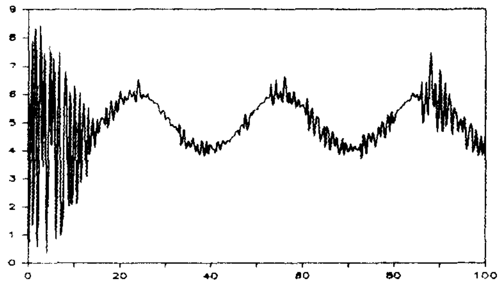
[3] G.C.Goodwin,P.J.Ramadge.and P.E.Caines, "Discrete time multi-variable adaptive control," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-25, pp. 449-456,1980.

[4] C.E.Rhors, L.S.Valavani,M.Athans,and G.Stein "Robustness of adaptive control algorithm in the presence of unmodelled dynamics,"in Proc.21st IEEEConf.Decision Contr.,fl,1982,pp.3-11

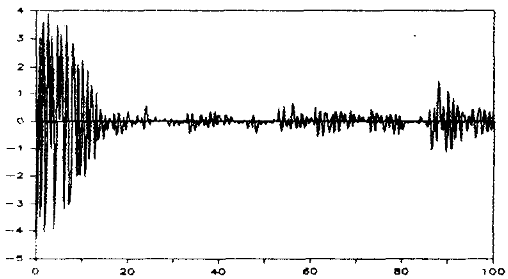
[5] G.C.Goodwin and D.Q.Mayne,"Parameter estimation perspective of continuous time model reference adaptive control," Automatica, vol.23,pp.57-70,Jan.1987

[6] G.C.Goodwin and K.S.Sin, Adaptive Filtering,Prediction and control, EngleWood Cliffs,NJ:Prentice-Hall, 1984

[7] R.H.Middleton and G.C.Goodwin "Adaptive control of time-varying linear system," IEEE Trans. Automat.Contr.,vol.33, No.2, pp.150-155, Feb.1988

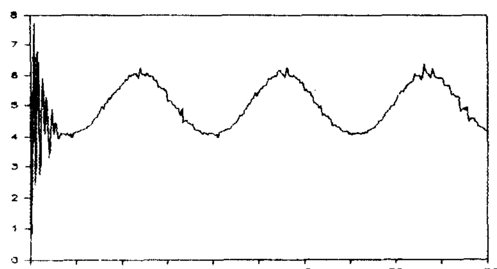


(a)

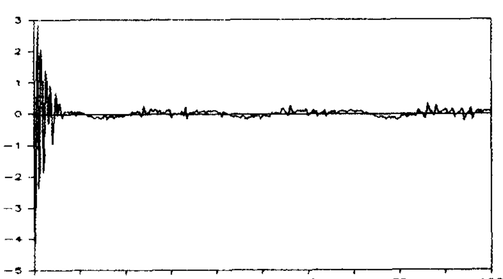


(b)

그림 1. Goodwin의 방법에 의한 시뮬레이션 결과
a) a(t)의 추정치 b) a(t)의 추정 오차
Fig. 1. Simulation Results with Goodwin's method
a) Estimates of a(t) b) Estimation error of a(t)



(a)



(b)

그림 2. 본 논문의 방법에 의한 시뮬레이션 결과
a) a(t)의 추정치 b) a(t)의 추정오차
Fig. 2. Simulation Results with proposed method
a) Estimates of a(t) b) Estimation error of a(t)

부 록

Lemma의 증명

[증 명]

i) $$\int_0^t \tau \frac{dy}{d\tau}\, d\tau = \int_0^t \tau\, dy$$

$$= ty(t) - \int_0^t y(\tau)d\tau$$

ii) $$\int_0^t (\tau - T)\frac{dy}{d\tau}\, d\tau = \int_0^t \tau\, dy - T\int_0^t dy$$

$$= ty(t) - \frac{1}{D}y(t) - Ty(t)$$

(일반성을 잃지 않으므로 y(0)=0 로하였다.)

iii) $\frac{1}{F(D)}(t-T)Dy(t) = s(t)$ 라하면

$$(t-T)Dy(t) = F(D)s(t)$$

$$(1/D)(t-T)y(t) = (F(D)/D)\, s(t)$$

$$(t-T)y(t) - (1/D)y(t) = (F(D)/D)s(t)$$

$$s(t) = (D/F(D))(t-T)y(t) - (1/F(D))y(t)$$

iv) $$\frac{1}{F(D)}(t-T)D(D^{m-1}y(t))$$

$$= D\frac{1}{F(D)}(t-T)D^{m-1}y(t) - \frac{D^{m-1}}{F(D)}y(t)$$

또

$$\frac{1}{F(D)}(t-T)D^{m-1}y(t)$$

$$= \frac{D}{F(D)}(t-T)D^{m-2}y(t) - \frac{D^{m-2}}{F(D)}y(t)$$

$$\therefore \frac{1}{F(D)}(t-T)D\, y(t)$$

$$= \frac{D^2}{F(D)}(t-T)D^{m-2}y(t) - 2\frac{D^{m-1}}{F(D)}y(t)$$

위 과정을 반복하면

$$\frac{1}{F(D)}(t-T)D\, y(t) = \frac{D^m}{F(D)}(t-T)y(t) - m\frac{D^{m-1}}{F(D)}y(t)$$