

최적 가변 극점 배치 자기 동조 제어에 관한 연구

전 중 암 조 병 선 박 민 용 이 상 배
연 세 대 학 교 전 자 공 학 과

A study on optimal variable pole assignment
self - tuning control

Jong-Arm Jun Byung-Sun Cho Mignon Park Sang-Bae Lee
Dept. of Electronics , Yonsei University

ABSTRACT

In this paper, a new design technique which uses weighted least-square approach for the solution of the pole assignment problem is represented. This technique may be used to assign some closed loop poles to places which reduce the large system input and output variance due to near pole-zero condition.

The least square approach is also applied to the design of servo self-tuning controller with integrator.

1. 서론

디지털 제어를 설계함에 있어서 극점 배치 제어 방법은 최소 분산 제어방법에 비해 견실하고 비최소 위상 시스템과 시간지연을 쉽게 다룰 수 있는 장점이 있으나 일반적으로 입력과 출력의 분산이 최소 분산제어방법에 비해 커지는 단점이 있다. 특히 공정 모델의 극점과 영점이 근접해 있으면 외란으로 인해 제어기의 계수가 커지며 이로 인해 입력과 출력의 분산이 커져 제어기의 성능지수가 떨어지게 된다.

시스템 파라미터의 추정으로는 레귤레이터의 경우 최소 자승 추정을 사용하여 개발되어 졌고, 서보추적은 확장된 최소 자승 추정법을 사용하여 개발되어졌으나 잡음 다항식에 대한 수렴성의 단점을 가지고 있다.

본 연구에서는 근접한 극점과 영점으로 일어나는 문제를 해결하기 위한 페루프 극점의 위치를 가중치를 둔 제어기 계수의 최적화를 통해서 구하며, 비최소 차수 제어를 이용해 입력과 출력의 분산을 감소 시키고자 한다. 또한 최소 자승 추정을 이용한 서보 추적의 방법을 제안하여 시스템 파라미터의 수렴성과 제어기의 성능을 향상 시키고자 한다.

2. 일반적인 극점 배치 제어기

선형 단일 입력력 ARMAX 모델을 차분 방정식으로 나타내면 다음과 같다.

나타내면 다음과 같다.

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-k) + C(z^{-1})\xi(t) \quad \dots (2.1)$$

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{nc} z^{-nc}$$

정수 $K (> 1)$ 은 시스템의 지연시간을 나타내고 t 는 샘플 시간을 의미한다. 변수 $y(t), u(t)$ 는 시스템의 출력과 입력이며 $\xi(t)$ 는 상관관계가 없고 평균이 영인 랜덤 시퀀스(Random Sequence)이다.

식 (2.1)의 시스템에 대한 일반적인 서보추적제어의 구조는 적분기를 넣었을 경우 다음과 같다.

$$\nabla F(z^{-1})u(t) + G(z^{-1})y(t) + E(z^{-1})w(t) = 0 \quad \dots (2.2)$$

$$\nabla(z^{-1}) = 1 - z^{-1}, \quad F(z^{-1}) = f_0 + f_1 z^{-1} + \dots + f_{fp} z^{-fp}$$

$F(z^{-1}), G(z^{-1})$ 과 $E(z^{-1})$ 은 z^{-1} 에 관한 다항식이고 $w(t)$ 는 기준신호이다.

식 (2.1)과 (2.2)로 부터

$$y(t) = -BEw(t-k) / (\nabla AF + z^k BC) + FC\xi(t) / (\nabla AF + z^k BC) \quad \dots (2.3)$$

제어기 다항식 $F(z^{-1}), G(z^{-1})$ 과 $E(z^{-1})$ 은 아래식 (2.4), (2.5)를 만족하도록 구해진다.

$$\nabla AF + z^k BC = \lambda E_1(z^{-1})T(z^{-1}) \quad \dots (2.4)$$

$$E(z^{-1}) = -E(z^{-1})R(z^{-1}) \quad \dots (2.5)$$

다항식 $T(z^{-1})$ 은 미리 알고 있는 다항식으로 원하는 페루프 극점, $E(z^{-1})$ 은 상태공간 설계방법에서의 Observer 극점에 해당하고 $R(z^{-1})$ 은 $w(t)$ 에 대한 전치 필터로서 동작한다.

시스템과 제어기의 전체적인 구성은 그림 1과 같다.

식 (2.3), 식 (2.4)와 식 (2.5)로 부터

$$y(t) = BRw(t-k) / (\lambda T) + \nabla FC\xi(t) / (\lambda E_1 T) \quad \dots (2.6)$$

만약 $E_1(z^{-1}) = C(z^{-1})$ 이면

$$y(t) = BRw(t-k) / (\lambda T) + \nabla F\xi(t) / (\lambda T) \quad \dots (2.7)$$

식 (2.4)를 다시 쓰면

$$\nabla AF + z^k BC = \lambda C(z^{-1})T(z^{-1}) \quad \dots (2.8)$$

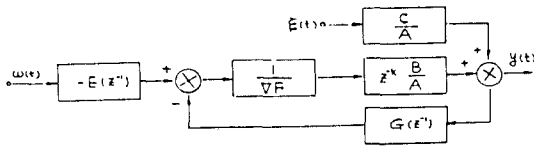


그림 1 시스템과 제어기의 구성도

$F(z^{-1})$ 과 $G(z^{-1})$ 이 유일해 $F_0(z^{-1})$ 과 $G_0(z^{-1})$ 을 갖기 위한 최소 차수는

$$n_{f_0} = n_b + k - 1 \quad \dots (2.9 a)$$

$$n_{g_0} = n_a \quad \dots (2.9 b)$$

3. 최적 가변 극점 배치 제어기

식 (2.8)의 λCT 는 다음과 같이 분할된다.

$$\lambda CT = \lambda C(z^{-1}) S(z^{-1}) P(z^{-1}) = S(z^{-1}) P(z^{-1}), \quad S(z^{-1}) = C(z^{-1}) S(z^{-1}) \quad \dots (3.1)$$

$$S(z^{-1}) = 1 + s_1 z^{-1} + \dots + s_{n_s} z^{-n_s}$$

$$P(z^{-1}) = 1 + p_1 z^{-1} + \dots + p_{n_p} z^{-n_p}, \quad n_s + n_p = n_x + n_c$$

$S(z^{-1})$ 은 미리 결정되며 $P(z^{-1})$ 은 가변될 극점 다항식이다. 가변되기 이전에 결정된 $P_0(z^{-1})$ 은 다음과 같다.

$$P_0(z^{-1}) = 1 + p_{01} z^{-1} + \dots + p_{0n_p} z^{-n_p} \quad \dots (3.2)$$

식 (3.1)과 식 (3.2)로부터

$$\lambda CT = S(z^{-1}) (\lambda P(z^{-1}) - P_0(z^{-1})) + S(z^{-1}) P_0(z^{-1}) \quad \dots (3.3)$$

식 (3.3)을 식 (2.8)에 대입하여 구한 방정식들을 행렬 형태로 나타내면

$$k \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_0 & \dots & b_{n_b} & a'_1 & \dots & a'_{n_f} & -s_1 & \dots & -s_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n_b} & \dots & b_0 & a'_1 & \dots & a'_{n_f} & -s_{n_s} & \dots & -s_{n_s} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$X \begin{bmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_{n_g} \\ f_0 \\ \vdots \\ f_{n_f-1} \\ \lambda P_1 - P_{01} \\ \vdots \\ \lambda P_{n_p} - P_{0n_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{n_f-1} \\ w_{n_f} - f_{n_f} \\ w_{n_f+1} - f_{n_f} a'_1 \\ \vdots \\ w_{n_{n_f}} - f_{n_f} a'_{n_{n_f}} \end{bmatrix}$$

$$\text{즉 } Hw = 0 \quad \dots (3.4)$$

$$a'_k = a_k - a_{k-1}, \quad 1 \leq k \leq n_a$$

$$a'_{n_{n_a}} = -a_{n_a}$$

$$w_k = \sum_{\lambda=0}^k P_{\lambda i} S_{k-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots, n_a + n_c$$

$$P_{\lambda i} = 0 \quad \text{for } i > n_p$$

$$s_{\lambda i} = 0 \quad \text{for } i > n_s$$

식 (3.4)의 해는 수식보다 변수가 더 많으므로 유일하지가 않다. 따라서 제어기의 계수를 구할 때 임의의 Cost function 하에서 최적화 시켜야한다. $P(z^{-1})$ 의 극점의 배치는 제어기 계수에 대한 분산이 작아질 수 있도록 재배치 되어야 하므로 다음과 같은 Cost function을 정할 수 있다.

$$J = w^T Q w \quad \dots (3.5)$$

Q 는 가중치 대각선 행렬로서 w 의 각 요소에 대한 가중치를 나타낸다.

식 (3.5)를 식(3.4)를 제한조건으로 하도록 Lagrange Multiplier $IP : 1 \times (n_c + n_x)$ 벡터를 사용하여 나타내면

$$J = w^T Q w + 2P^T (Hw - 0)$$

$$\frac{\partial J}{\partial w} = 2Qw + 2HP^T = 0 \quad \text{되는 } w \text{를 구하면}$$

$$w = -Q^{-1} H^T [H Q^{-1} H^T]^{-1} 0 \quad \dots (3.6)$$

$G(z^{-1}), F(z^{-1}), G(z^{-1})$ 에 대한 가중치는 k_g, k_f, k_p 로서 동일하게 선택한다. Cost function 은 다음과 같은 형태로 나타낸다.

$$J = k_g \sum_{i=0}^{n_g} g_i^2 + k_f \sum_{i=0}^{n_f} f_i^2 + k_p \sum_{i=0}^{n_p} (\lambda P_i - P_{0i})^2 \quad \dots (3.7)$$

시뮬레이션으로 $k_g \gg k_f$ 일 때 분산이 일반적으로 작아짐을 알 수 있다.

4.비 최소차 제어기를 이용한 분산 감소

극점배치는 일반적으로 근접한 극점과 영점이 없을 지라도 시스템의 입력과 출력의 분산이 커지는 단점이 있으나 제어기계수의 차수를 높여줌으로서 분산을 감소시킬 수 있다.

$$n_g = n_a + n_x$$

$$n_f = n_b + k + n_x - 1$$

$$n_x \geq 0$$

로 선택하고

$$n_t \leq n_a + n_b + n_x + k$$

로 하여 식 (3.4)를 사용하여 제어기 계수를 구할 수 있다.

5. 최소 자승 서보 시스템 파라미터 추정

제어기 계수가 식 (2.8)을 만족할 때의 시스템 출력과 입력은

$$y(t) = z^{-k} B R / \lambda T \cdot w(t) + \nabla F / \lambda T \cdot f(t) \quad \dots (5.1)$$

$$\dot{u}(t) = -z^{-k} G B R / \lambda \nabla F T w(t) - E / \nabla F w(t) - G / \lambda T \cdot f(t) \quad \dots (5.2)$$

$\hat{A}(z^{-1}), \hat{B}(z^{-1})$ 을 다음과 같은 선형 Diophantine 방정식을 만족하도록 정의한다.

$$\nabla \hat{A}(z^{-1})F(z^{-1}) + z^{-k} \hat{B}(z^{-1})G(z^{-1}) = \lambda T \quad \dots (5.3)$$

$$n_{\hat{a}} = n_a$$

$$n_{\hat{b}} = n_b + k - 1$$

식 (5.3)을 양변에 $1/\lambda T \cdot \xi(t)$ 를 곱하면

$$\nabla \hat{A} \nabla F / \lambda T \cdot \xi(t) + z^{-k} \hat{B} G / \lambda T \cdot \xi(t) = \xi(t) \quad \dots (5.4)$$

$\nabla F / \lambda T \cdot \xi(t)$ 를 식 (5.1)로 부터 $G / \lambda T \cdot \xi(t)$ 를 식

(5.2)로 부터 구하여 식(5.4)에 대입하여 정리하면

$$\hat{A} y(t) = \hat{B} u(t-1) + (z^{-k} \hat{B} - \hat{C} \hat{B}) / \nabla F \cdot R w(t-1) + \xi(t) \quad \dots (5.5)$$

식 (5.5)의 오른쪽 두번째 항을 간단히 하기 위해 다항식 $M(z^{-1})$ 과 $N(z^{-1})$ 을 다음과 같이 선택한다.

$$M(z^{-1}) = \hat{A}(z^{-1}) + G(z^{-1}) \quad \dots (5.6)$$

$$N(z^{-1}) = \nabla F(z^{-1}) - z^{-k} \hat{B}(z^{-1}) \quad \dots (5.7)$$

$b_{\hat{b}} = f_{\hat{b}}$ 되게 λ 를 선택함으로써 $N(z^{-1})$ 의 차수를 $n_b + k - 2$ 되게 할 수 있다. 식 (5.6)과 식 (5.7)에서 $\hat{A}(z^{-1}), z^{-k} \hat{B}(z^{-1})$ 를 구하여 식 (5.3)에 대입하여 정리하면

$$\nabla (M - G)F + (\nabla F - N)G = \lambda T$$

$$\nabla MF - NG = \lambda T \quad \dots (5.8)$$

식 (5.8) 양변에 C 를 곱하고 식 (2.8)을 이용하면

$$\nabla F(A - MC) + G(z^{-k}B + NC) = 0$$

임의의 해 $\nabla F(z^{-1})$ 과 $G(z^{-1})$ 은

$$\nabla F = (z^{-k}B + NC) r \quad \dots (5.10)$$

$$G = (MC - A) r \quad \dots (5.11)$$

r : 임의의 상수

식 (5.7)의 $N(z^{-1})$ 를 식 (5.10)에 대입하여 정리하면

$$z^{-k} (z^{-k}B - \hat{C} \hat{B}) = \nabla F (r - c) = \nabla F \hat{C} \quad \dots (5.12)$$

$$\hat{C}(z^{-1}) = r - C(z^{-1})$$

식 (5.12)를 식(5.5)에 대입하면

$$\hat{A} y(t) = \hat{B} u(t-1) - \hat{C} w(t) + \xi(t) \quad \dots (5.13)$$

$$w(t) = R w(t)$$

식 (2.5)로 부터

$$E(z^{-1}) = -(C(z^{-1}) + r)R(z^{-1}) \quad \dots (5.14)$$

위에서 $r = 1$ 로 놓으면 \hat{C}_0 은 0이 된다.

\hat{C}_0 를 고정시킴으로서 일반적인 최소 차수 추정 방법과는 달리 $b_{\hat{b}}$ 를 임의로 둘 수 있다. 식 (5.13)의 $\xi(t)$ 는 시스템의 입력 및 출력과는 상관관계가 없으므로 $A(z^{-1}), B(z^{-1}), C(z^{-1})$ 의 파라미터는 최소 차수 추정 방법에 의해서 구할 수 있다. 식 (2.7)에서 다항식 $R(z^{-1})$ 은 정상상태에서 기준입력 $w(t)$ 와 $y(t)$ 사이의 전달이득이 1이 되도록 다음식을 만족해야 한다.

$$(BR/\lambda T)_{z=1} = 1 \quad \dots (5.15)$$

여기서 $R(z^{-1})$ 은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(R(z^{-1}))_{z=1} = (\lambda T(z^{-1})/B(z^{-1}))_{z=1}$$

여기서 $(B(z^{-1}))_{z=1}$ 은 식 (5.12)로 부터

$$(B(z^{-1}))_{z=1} = (\hat{C}B - z(C-1)\nabla F)_{z=1} = (\hat{C}B)_{z=1} \quad (5.16)$$

6. 최적 가변 극점 배치 자기동조 알고리즘

순환 최소 차수 추정과 극점 배치 제어 이론을 결합한 자기 동조 알고리즘과정은 다음과 같다.

1 단계 : 순환 최소 차수 추정을 이용하여 다음식에서 $\hat{A}(z^{-1}), \hat{B}(z^{-1}), \hat{C}(z^{-1})$ 의 파라미터를 추정한다.

$$\hat{A}(z^{-1})y(t) = \hat{B}(z^{-1})u(t-1) - \hat{C}(z^{-1})w(t) + \xi(t)$$

2 단계 : 추정된 $\hat{A}(z^{-1}), \hat{B}(z^{-1}), \hat{C}(z^{-1})$ 의 파라미터를 이용하여 H행렬과 K벡터를 구성하여 제어기 계수를 다음식에서 구한다.

$$v = \hat{Q}^{-1} H^T [H \hat{Q} H^T]^{-1} \hat{Q} \quad \text{여기서 } h_{ij} = \hat{b}_{ij} \text{로 가정}$$

3 단계 : 시스템의 출력과 기준 입력 사이의 이득이 1이 되게 $R(z^{-1})$ 을 조정한다.

$$(R(z^{-1}))_{z=1} = (\lambda T(z^{-1})/B(z^{-1}))_{z=1}$$

4 단계 : 시스템 제어 입력을 다음식에서 구한다.

$$\nabla F(z^{-1})u(t) + G(z^{-1})y(t) + E(z^{-1})w(t) = 0$$

1 ~ 4 단계를 반복 수행한다.

7. 시뮬레이션 및 검토

제안된 알고리즘의 타당성을 보이기 위해서 다음과 같은 근접한 극점과 영점을 가지고 있는 시스템을 가정하여 모델로 사용하였다.

$$y(t) = \frac{0.1 z (1 - 0.247z^{-1})}{(1 - 0.25z^{-1})(1 - 0.9z^{-1})} u(t) + \frac{(1 - 0.2z^{-1})}{(1 - 0.25z^{-1})(1 - 0.9z^{-1})} \xi(t)$$

페루프 극점중 하나는 $z = 0.7$ 에 두고 나머지는 $z = 0$ 에 모두 두었다.

그림 2와 3에서 시뮬레이션의 결과를 나타내고 있다.

초기에 시스템의 파라미터를 구하기 위하여 처음 15 STEP동안은 $u(t) = 8(w(t) - y(t)) + 100 \xi(t)$ 를 사용하였다.

16 ~ 175 STEP은 일반적인 극점배치 알고리즘이 적용되었고, 175 ~ 320 STEP은 새로운 알고리즘을 사용하였다. 이 때 $k_f = 1, k_g = 0.001, k_p = 1$ 이며, $n_p = 1$ 로 하였고 $P_{d0} = 0$ 으로 하였다.

시뮬레이션 결과 시스템의 입출력이 감소함을 알 수 있다.

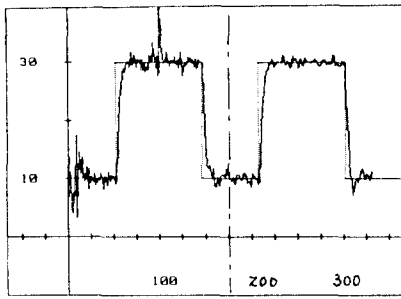


그림 2 시스템 출력

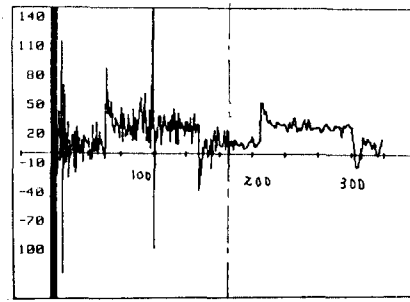


그림 3 시스템 입력

8. 결 론

시스템이 근접한 극점과 영점을 가질 때 시스템의 입력과 출력의 분산을 감소시키기 위해 페루프 극점의 위치를 변화시키는 방법을 제안하였다.

신시스템의 경우 근접한 극점과 영점을 가지고 있는 경우는 거의 없으나 시스템의 차수를 실제보다 높이 잡으면 위의 현상이 발생할 수 있으므로 제안된 알고리즘을 사용하면 좋은 결과를 얻을 수 있으리라 생각한다.

근접한 극점과 영점이 시스템에 없더라도 일반적으로 극점배치 방법은 시스템의 입력과 출력의 분산이 최소 분산 제어에 비해 거지는 단점이 있으나 제어기의 계수를 비 최소 차수를 잡아서 최적화 하면 입력과 출력의 분산을 감소시킬 수 있다.

시스템 파라미터 추정으로는 서보 추적을 다루기 위한 최소 차수 추정을 이용함으로써 확장된 최소 차수 추정을 이용할 경우 발생할 수 있는 잡음 영향식에 따른 수렴의 어려움을 해결할 수 있었다.

Reference

1. P.E.Wellstead, D.Praeger and P.Zanker, " Pole assignment self tuning regulator ", Proc. IEE, Vol. 126, No. 8, 1979
2. P.E.Wellstead and P.Zanker, " Servo self-tuners ", Int. J. Control Vol. 30, No.1, pp. 27-35, 1979
3. K.J.Astrom and B.Wittenmark, " Self-tuning Controllers based on pole-zero placement ", Proc. IEEE, Vol. 127, pp. 120 ~ 130, 1980
4. M.B.Zarrop and M.Fischer, " Reduced-variance pole-assignment self-tuning regulation ", INT. J. Control, Vol. 42, No. 5, pp. 1013 - 1033, 1985
5. A.Y.Allidina and H.Yin, " Explicit pole-assignment self tuning algorithms ", INT. J. Control, Vol. 42, No. 5, pp. 1113 ~ 1130, 1985
6. M.E.Halpern, MEngSc, " Modified Pole assignment controller for plant models with exact or near pole-zero cancellation ", Proc. IEE, Vol. 135, No. 3, pp. 189 ~ 195, 1988