

적용 신호 처리를 위한 고속 선형 위상 FIR 필터

○ 최 승 진 \* 이 철 희 \* 양 흥 석 \*

\* 서울대 전기과

Fast Linear-Phase FIR Filter for Adaptive Signal Processing

Choi Seung-jin \* Lee Chul-heui \* Yang Heung-suk \*

\* Dept. of Electrical Eng. Seoul National Univ.

ABSTRACT

In this paper, a new fast algorithm of FIR least squares filter with linear phase is presented. The general unknown statistics case is considered, whereby only sample records of the data are available.

Taking advantage of the near-to-Toeplitz+Hankel structure of the resulting normal equation, a fast algorithm which guarantees the linear phase constraint, is developed that recursively produces the filter coefficient of linear phase FIR filter for a single block of data.

I. 서 론

선형 위상 FIR 필터는 신호의 왜형이 심하지 않으므로 디지털 신호 처리, 데이터 전송, 통신, 영상 처리등 여러 분야에서 중요한 역할을 하고 있다. [1]

선형 위상 시스템의 경우 임펄스 응답이 대칭구조를 가지며 따라서 FIR 필터의 계수의 다항식이 중심점을 기준으로 대칭이 되는 특성을 가진다. 따라서 결과적으로 나타나는 정규 방정식의 상관 함수 행렬이 near-to-Toeplitz + Hankel 구조가 된다. 이 성질과 함께 필터 계수의 대칭성을 보장하기 위해 centrosymmetric 성질을 이용한 고속 차수 순환

알고리즘이 발표되었다. [2, 3] 또한 적용 신호 처리를 위한 시간 순환 LS(least squares) 알고리즘이 발표되었다. [4]

그러나 기존 논문의 알고리즘은 계산량이 필터의 차수의 제곱에 비례해서 실 시간 처리를 위해서는 보다 계산량이 적은 고속 알고리즘이 필요하게 되는데 이 고속 알고리즘은 Levinson 알고리즘을 확장시킨 것으로서 이동 불변(shift invariance) 특성을 이용하여 계산량을 감소시킨 고속 칼만 알고리즘등이 여기에 속한다. [5, 6]

본 논문에서는 선형 위상 FIR 필터에 대해 데이터는 전치 윈도우 방식을 취하고, 선형 위상의 성질을 유지하며 효과적인 시간 순환이 되는 고속 칼만 알고리즘의 확장된 형태로, 필터 차수에 비례하는 계산량으로 감소시킨 고속 시간 순환 알고리즘을 유도하였다.

선형 위상 FIR 필터의 칼만 이득을 update시키는데 있어서 최근에 Nicholas Kalouptsidis[7] 등이 발표한 전향 예측 오차와 후향 예측 오차의 norm의 제곱의 합을 최소화시키는 FBLS(forward backward least squares) 필터의 칼만 이득을 이용하였다.

II 절에서는 선형 위상 FIR 필터에 대해 살펴보고, III 절에서는 FBLS 필터를 살펴보고, IV 절에서는 선형 위상 FIR 필터에 대한 LS 알고리즘을 살펴보고, 마지막으로 V 절에서는 선형 위상 FIR 필터에 대한 고속 알고리즘을 유도하였다. 제안된 고속 알고리즘의 수렴성은 시뮬레이션을 통해 보였다.

## II. 선형 위상 FIR 필터

데이터 샘플은  $y(M), y(M+1), \dots, y(N)$  이고, 모델의 차수는  $m$  이고, 모델은 다음과 같다.

$$y(n) = -\sum_{k=1}^m a_k y(n-k) + v(n) \quad (1)$$

$v(n)$  은 평균치가 0인 백색잡음

다음과 같은 데이터 행렬을 정의하자.

$$X_m(M, N) = \begin{bmatrix} y(M+m-1) & y(M+m-2) & \dots & y(M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(N) & \dots & \dots & y(N-m+1) \end{bmatrix} \quad (2)$$

그리고 다음과 같은 데이터 벡터를 정의하자.

$$x_m(M, N) = [y(M) \ y(M+1) \ \dots \ y(N)]^T \quad (3)$$

전향 예측 오차 벡터는 다음과 같다.

$$e_m(M, N) = [e(M) \ e(M+1) \ \dots \ e(N)]^T \quad (4)$$

그러면 모델(1)에서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$e_m(M+m, N) = x_m(M+m, N) + X_m(M, N-1)A_m \quad (5)$$

$$A_m = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m]^T$$

모델 (1)이 선형 위상 성질을 가지면 필터의 계수가 대칭이므로 차수  $m$ 을  $2p$ 라 했을때 필터의 계수 벡터  $A_m$ 은 다음과 같이 된다.

$$A_m = [a_1 \ \dots \ a_p \ a_p \ \dots \ a_1]^T \quad (6)$$

다음과 같은 교환 행렬(exchange matrix)을 도입하면 식 (6)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$J = \begin{bmatrix} D & & & 1 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & D \end{bmatrix} \quad A_p = [a_1 \ \dots \ a_p]^T$$

$$A_m = \begin{bmatrix} A_p \\ J A_p \end{bmatrix} \quad (7)$$

선형 위상일때 데이터 행렬은 다음과 같이 나눌 수 있다.

$$X_m(M, N-1) = \begin{bmatrix} y(M+m-1) \dots y(M+p) y(M+p-1) \dots y(M) \\ \vdots \\ y(N-1) \dots y(N-p) y(N-p-1) \dots y(N-m) \end{bmatrix} \quad (8)$$

식 (8)의 구조에 의해서 다음과 같이 된다.

$$x_m(M+m, N) = -\{X_p(M+p, N-1) + X_p(M, N-p-1)J\}A_p \quad (9)$$

식 (9)에 의해서 식 (5)를 최소화 시키는 정규 방정식은

다음과 같다.

$$\{R_p + J P_p^T + P_p J + \tilde{R} \tilde{R} J\} A_p = -\{r_{1,p} + J r_{2,p}\} \quad (10)$$

$$R_p = X_p^T(M+p, N-1)X_p(M+p, N-1)$$

$$\tilde{R} \tilde{R} = X_p^T(M, N-p-1)X_p(M, N-p-1)$$

$$P_p = X_p^T(M+p, N-1)X_p(M, N-p-1)$$

$$r_{1,p} = X_p^T(M+p, N-1)x_m(M+m, N)$$

$$r_{2,p} = X_p^T(M, N-p-1)x_m(M+m, N)$$

식 (10)을 다음과 같은 행렬 형태로 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} R_p + \tilde{R} \tilde{R} J & R_p + J P_p^T J \\ P_p^T + J R_p J & \tilde{R} \tilde{R} + J R_p J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ J p \end{bmatrix} = - \left[ \begin{bmatrix} r_{1,p} \\ r_{2,p} \end{bmatrix} + J \begin{bmatrix} r_{1,p} \\ r_{2,p} \end{bmatrix} \right] \quad (11)$$

식 (11)에 의해서 선형 위상일때 정규 방정식은

$$Q_m(M, N-1)A_m(N) = -d_m(M, N) \quad (12)$$

$$Q_m(M, N-1) = R_m(M, N-1) + J R_m(M, N-1)J$$

$$d_m(M, N) = r_m^T(M, N) + J r_m^T(M, N)$$

$$r_m^T(M, N) = \begin{bmatrix} r_{1,p} \\ r_{2,p} \end{bmatrix}$$

## III. FBLS(forward backward least squares) 필터

스펙트럼 추정 분야에서 안정성을 보장하고 정확도를 높이기 위해 전향 예측 오차와 후향 예측 오차의 norm의 제곱의 합을 최소화 시키는데 이때 결과적으로 나타나는 정규 방정식이 선형 위상일때와 비슷한 형태가 된다. 뒤의  $V$  절에서 고속 알고리즘을 유도할때 FBLS 필터를 이용하게되므로 이 절에서 살펴보기로 한다.

모델은 식(1)과 같고, 추정되는 계수 벡터를 위상이 선형일때와 구별하기위해서 다음과 같이 정의한다.

$$C_m = [c_m \ \dots \ c_1]^T$$

이때 정규 방정식은 다음과 같이 된다.

$$S_m(M, N)C_m(N) = -g_m(M, N) \quad (13)$$

$$S_m(M, N) = R_m(M+1, N) + J R_m(M, N-1)J$$

$$g_m(M, N) = r_m^b(M, N) + J r_m^f(M, N)$$

$$r_m^b(M, N) = X_m^b(M+1, N)x_m(M, N-m)$$

$$r_m^f(M, N) = X_m^f(M, N-1)x_m(M+m, N)$$

전체 윈도우 데이터 집합의 경우 식 (13)은 다음과 같다.

$$S_m(N)C_m(N) = -g_m(N) \quad (14)$$

$S_m(N)$ 과  $g(N)$ 의 시간 update 식은 다음과 같다.

$$S_m(N) = S_m(N-1) + \Phi_m(N) \Phi_m^T(N) \quad (15)$$

$$g_m(N) = g_m(N-1) + \Phi_m(N) \phi(N) \quad (16)$$

$$\Phi_m(N) = [ Jx_m(N-1) \quad x_m(N) ]$$

$$\phi(N) = [ y(N) \quad y(N-m) ]^T$$

식 (14)에서  $N$ 번째 샘플에 대한  $C_m(N)$ 을 알때  $C_m(N+1)$ 을 알기 위해서는  $C_m(N+1)$ 은 다음과 같이 된다.

$$C_m(N+1) = C_m(N) + W_m(N+1) \epsilon_m^c(N+1) \quad (17)$$

식 (17)에서  $W_m(N+1)$ 은 칼만 이득으로서 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} W_m(N+1) &= -S_m(N)^{-1} \Phi_m(N+1) \\ &= -S_m(N)^{-1} [ Jx_m(N) \quad x_m(N+1) ] \\ &= [ w_m^i(N) \quad w_m^o(N+1) ] \end{aligned} \quad (18)$$

$\epsilon_m^c(N+1)$ 은 사후 오차로서 다음과 같이 정의된다.

$$\epsilon_m^c(N+1) = \phi(N+1) + \Phi_m^T(N+1) C_m(N+1) \quad (19)$$

사전 오차  $e_m^c(N+1)$ 과 사후 오차  $\epsilon_m^c(N+1)$ 과의 관계는 다음과 같다.

$$\epsilon_m^c(N+1) = L_m^c(N+1)^{-1} e_m^c(N+1) \quad (20)$$

$$L_m^c(N+1) = I_2 - \Phi_m^T(N+1) W_m(N+1) \quad (21)$$

최소 오차 파워는 다음과 같다.

$$E_m(N) = r_m^f(N) + r_m^b(N) + C_m^T(N) E_m(N) \quad (22)$$

$$r_m^f(N) = \sum_{k=M}^N y^2(k) \quad r_m^b(N) = \sum_{k=M}^N y^2(k-m)$$

IV. 선형 위상 FIR 필터에 대한 최소 자승 알고리즘  
전치 윈도우 데이터집합의 경우 식 (12)는 다음과 같다.

$$Q_m(N-1) A_m(N) = -d_m(N) \quad (23)$$

$Q_m(N)$ 과  $r(N+1)$ 의 시간 update 식은 다음과 같다.

$$Q_m(N) = Q_m(N-1) + H_m(N) H_m^T(N) \quad (24)$$

$$d_m(N+1) = d_m(N) + H_m(N) h(N+1) \quad (25)$$

$$H_m(N) = [ Jx_m(N) \quad x_m(N) ]$$

$$h(N+1) = [ y(N+1) \quad y(N+1) ]^T$$

$N$ 번째 데이터 샘플에 대한  $A_m(N)$ 을 알때  $A_m(N+1)$ 을 알기 위해서는

$$Q_m(N) A_m(N+1) = -d_m(N+1) \quad (26)$$

식 (26)에 식 (24)과 (25)의 관계를 대입하고 양변에

$Q_m(N-1)$ 을 곱하면 다음과 같이 된다.

$$A_m(N+1) = A_m(N) + K_m(N) \epsilon_m^A(N+1) \quad (27)$$

식 (27)에서  $K_m(N)$ 은 칼만 이득으로서 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} K_m(N) &= -Q_m(N-1)^{-1} H_m(N) \\ &= -Q_m(N-1)^{-1} [ Jx_m(N) \quad x_m(N) ] \\ &= [ Jk_{1m}(N) \quad k_{1m}(N) ] \end{aligned} \quad (28)$$

그리고 사후 오차  $\epsilon_m^A(N+1)$ 은 다음과 같다.

$$\epsilon_m^A(N+1) = h(N+1) + H_m^T(N) A_m(N+1) \quad (29)$$

그러나 사실 사후 오차는  $A_m(N+1)$ 을 알아야만 구할 수가 있으므로 사후 오차와 사전 오차와의 관계를 보면

$$\epsilon_m^A(N+1) = L_m^A(N)^{-1} e_m^A(N+1) \quad (30)$$

$$L_m^A(N) = I_2 - H_m^T(N) K_m(N) \quad (31)$$

식 (31)을 살펴보면

$$\begin{aligned} L_m^A(N) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_m^T(N) J \\ x_m^T(N) \end{bmatrix} [ Jk_{1m}(N) \quad k_{1m}(N) ] \\ &= \begin{bmatrix} 1 - x_m^T(N) k_{1m}(N) & -x_m^T(N) J k_{1m}(N) \\ -x_m^T(N) J k_{1m}(N) & 1 - x_m^T(N) k_{1m}(N) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (32)$$

최소 오차 파워의 식은

$$E_m^A(N) = 2r_m^f(N) + A_m^T(N) d_m(N) \quad (33)$$

식 (33)에 식 (25)와 (27)의 관계를 대입하면 다음과 같은 시간 update식을 구할 수 있다.

$$E_m^A(N+1) = E_m^A(N) + \epsilon_m^A(N+1) e_m^A(N+1) \quad (34)$$

$P_m(N) = Q_m(N-1)$ 로 정의하고 matrix inversion lemma를 이용하면

$$P_m(N) = P_m(N-1) - K_m(N-1) L_m^A(N-1)^{-1} K_m^T(N-1) \quad (35)$$

전체적인 알고리즘은 표 1에 정리하였다.

표 1. 선형 위상 FIR필터에 대한 LS 알고리즘

Table 1. least squares algorithm for linear phase filtering

$P_m(N) = P_m(N-1) - K_m(N-1) L_m^A(N-1)^{-1} K_m^T(N-1)$ $K_m(N) = -P_m(N) H_m(N)$ $L_m^A(N) = I - H_m^T(N) K_m(N)$ $e_m^A(N+1) = h(N+1) + H_m^T(N) A_m(N)$ $\epsilon_m^A(N+1) = L_m^A(N)^{-1} e_m^A(N+1)$ $A_m(N+1) = A_m(N) + K_m(N) \epsilon_m^A(N+1)$
--

### V. 선형 위상 FIR 필터에 대한 고속 알고리즘

$Q_m(N)$ 과  $S_m(N)$ 의 관계를 살펴보면 다음과 같다.

$$Q_m(N) = S_m(N) + Jx_m(N)x_m(N)^T \quad (36)$$

$$S_m(N) = Q_m(N-1) + x_m(N)x_m(N)^T \quad (37)$$

$Q_m(N)$ 의 차수를 하나 늘렸을때 다음과 같은 블록 행렬로 나누어 진다.

$$Q_{m+1}(N) = \begin{bmatrix} S_m(N) & r_m^b(N) + J r_m^f(N) \\ r_m^{bt}(N) + r_m^{ft}(N) J & r_m^{bo}(N) + r_m^{fo}(N) \end{bmatrix} \quad (38)$$

먼저 선형 위상 필터의 칼만 이득  $k_{1m}(N)$ 과 FBLS 필터의 칼만 이득  $w_m(N)$ 의 관계를 살펴보자. 식 (28)로부터

$$Q_m(N-1)k_{1m}(N) = -x_m(N) \quad (39)$$

식 (39)에 식 (36)을 대입한 다음 양변에  $S_m(N-1)$ 을 곱하고 식을 정리하면

$$k_{1m}(N) = w_m^i(N-1)E_m^u(N) + w_m^s(N) \quad (40)$$

$$E_m^u(N) = x_m^t(N-1)Jk_{1m}(N) \quad (41)$$

식 (41)의  $k_{1m}(N)$  대신 식 (40)의 관계를 대입하면

$$e_m^u(N) = x_m^t(N-1)Jw_m^s(N) \quad (42)$$

$$E_m^u(N) = L_m^u(N-1)e_m^u(N) \quad (43)$$

$$L_m^u(N-1) = 1 - x_m^t(N-1)Jw_m^s(N-1) \quad (44)$$

이번에는  $w_m^i(N)$ 의 시간 update 식을 유도해보자. 식 (16)으로부터

$$S_m(N)w_m^i(N) = -Jx_m(N) \quad (45)$$

식 (45)에 식 (37)을 대입하고 양변에  $Q_m(N-1)$ 을 곱하고 식을 정리하면

$$w_m^i(N) = Jk_{1m}(N) + k_{1m}(N)e_m^w(N) \quad (46)$$

$$e_m^w(N) = x_m^t(N)w_m^i(N) \quad (47)$$

식 (47)의  $w_m^i(N)$  대신 식 (46)의 관계를 대입하면

$$e_m^w(N) = x_m^t(N)Jk_{1m}(N) \quad (48)$$

$$E_m^w(N) = L_m^w(N)e_m^w(N) \quad (49)$$

$$L_m^w(N) = 1 - x_m^t(N)k_{1m}(N) \quad (50)$$

식 (50)의  $L_m^w(N)$ 은 앞의 식 (32)의  $L_m^A(N)$ 의 첫번째 행 첫번째 열과 같고,  $e_m^w(N)$ 은  $L_m^A(N)$ 의 첫번째 행 두번째 열의 값에 -를 취한것과 같다.

$$L_m^w(N) = (L_m^A(N))_{11} \quad (51)$$

$$e_m^w(N) = -(L_m^A(N))_{12} \quad (52)$$

$w_m^s(N+1)$ 의 시간 update 식을 유도해보면

$$Q_{m+1}(N)k_{1m+1}(N+1) = -x_{m+1}(N+1) \quad (53)$$

식 (38)의  $Q_{m+1}(N)$ 에 block matrix inversion 공식을 대입

하고  $x_{m+1}(N+1) = \begin{bmatrix} y(N+1) \\ x_m(N) \end{bmatrix}$  과 같이 나누면

$$Jk_{1m+1}(N+1) = - \begin{bmatrix} S_m(N) + C_m(N) \alpha_m(N)^{-1} C_m^t(N) & C_m(N) \alpha_m(N)^{-1} \\ \alpha_m(N)^{-1} C_m^t(N) & \alpha_m(N)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(N+1) \\ x_m(N) \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$\alpha_m(N) = r_m^{fo}(N) + r_m^{bo}(N) + C_m^t(N)g_m(N) \quad (55)$$

식 (54)를 정리하면

$$Jk_{1m}(N+1) = \begin{bmatrix} w_m^i(N) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_m(N) \\ 1 \end{bmatrix} \Gamma_{1,m}^u(N+1) \quad (56)$$

$$\Gamma_{1,m}^u(N+1) = - \frac{e_m^{cu}(N+1)}{E_m^c(N)} \quad (57)$$

이번에는  $x_{m+1}(N+1) = \begin{bmatrix} x_m(N+1) \\ y(N-m+1) \end{bmatrix}$  과 같이 나누고 위와

같은 과정을 되풀이 하면

$$k_{1m+1}(N+1) = \begin{bmatrix} w_m^s(N+1) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_m(N) \\ 1 \end{bmatrix} \Gamma_{2,m}^u(N+1) \quad (58)$$

$$\Gamma_{2,m}^u(N+1) = - \frac{e_m^{cu}(N+1)}{E_m^c(N)} \quad (59)$$

식 (56)에서  $k_{1m}(N+1)$ 이 계산이 되므로 식 (58)에서  $w_m^s(N+1)$ 을 계산할 수 있다.

$L_m^c(N+1)$ 의 시간 update는 식 (21), (56), (58)로부터

$$(L_m^c(N+1))_{11} = (L_m^A(N))_{11} + (L_m^A(N))_{12} e_m^w(N) \quad (60)$$

$$(L_m^c(N+1))_{12} = (L_m^A(N))_{12} \quad (61)$$

$$(L_m^c(N+1))_{22} = (L_m^c(N+1))_{11} + \frac{e_m^{cu}(N+1) \sum e_m^c(N+1)}{E_m^c(N)}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$e_m^u(N+1) = -(L_m^c(N+1))_{12} \quad (63)$$

$$L_m^u(N) = (L_m^c(N+1))_{11} \quad (64)$$

$$L_m^w(N) = (L_m^c(N))_{22} - e_m^{cu}(N)e_m^u(N) \quad (65)$$

선형 위상 FIR 고속 최소 자승 알고리즘을 정리하면 표 2와 같다.

표 2. 선형 위상 필터에 대한 고속 LS 알고리즘

Table 2. fast least squares algorithm for linear phase filtering

$$\begin{aligned}
 k_{1m}(N) &= w_m^1(N) + w_m^1(N-1)E_m^u(N) \\
 e_m^{a(1)}(N+1) &= y(N+1) + A_m^t(N)Jx_m(N) \\
 e_m^{a(2)}(N+1) &= y(N+1) + A_m^t(N)x_m(N) \\
 (L_m^a(N))_{12} &= -x_m^b(N)Jk_{1m}(N) \\
 (L_m^a(N))_{11} &= (L_m^c(N))_{22} - e_m^{vt}(N)E_m^u(N) \\
 (L_m^a(N))_{21} &= (L_m^a(N))_{12} \\
 (L_m^a(N))_{22} &= (L_m^a(N))_{11} \\
 E_m^w(N) &= -(L_m^a(N))_{11}^{-1}(L_m^a(N))_{12} \\
 e_m^a(N+1) &= \begin{bmatrix} a^{(1)} \\ e_m^{a(1)}(N+1) \\ e_m^{a(2)}(N+1) \end{bmatrix} \\
 K_m(N) &= [ Jk_{1m}(N) \quad k_{1m}(N) ] \\
 E_m^a(N+1) &= L_m^a(N)^{-1} e_m^a(N+1) \\
 A_m(N+1) &= A_m(N) + K_m(N)E_m^a(N+1) \\
 w_m^1(N) &= Jk_{1m}(N) + k_{1m}(N)E_m^w(N) \\
 e_m^{c(1)}(N+1) &= C_m^t(N)Jx_m(N) + y(N+1) \\
 \Gamma_{1,m}^u(N+1) &= -\frac{e_m^{c(1)}(N+1)}{E_m^c(N)} \\
 Jk_{1m+1}(N+1) &= \begin{bmatrix} w_m^1(N) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_m(N) \\ 1 \end{bmatrix} \Gamma_{1,m}^u(N+1) \\
 \Gamma_{2,m}^u(N+1) &= (k_{1m+1}(N+1))_{m+1} \\
 \begin{bmatrix} w_m^1(N+1) \\ 0 \end{bmatrix} &= k_{1m+1}(N+1) - \begin{bmatrix} C_m(N) \\ 1 \end{bmatrix} \Gamma_{2,m}^u(N+1) \\
 e_m^{c(2)}(N+1) &= -E_m^c(N)\Gamma_{2,m}^u(N+1) \\
 e_m^c(N+1) &= \begin{bmatrix} e_m^{c(1)}(N+1) \\ e_m^{c(2)}(N+1) \end{bmatrix} \\
 (L_m^c(N+1))_{11} &= (L_m^a(N))_{11} + (L_m^a(N))_{12}E_m^w(N) \\
 (L_m^c(N+1))_{22} &= (L_m^c(N+1))_{11} + \frac{e_m^{c(2)}(N+1)\sum e_m^c(N+1)}{E_m^c(N)} \\
 (L_m^c(N+1))_{21} &= -x_m^b(N+1)w_m^1(N) \\
 (L_m^c(N+1))_{12} &= (L_m^c(N+1))_{21} \\
 e_m^{vt}(N+1) &= -(L_m^c(N+1))_{12} \\
 L_m^u(N+1) &= (L_m^c(N+1))_{11} \\
 E_m^u(N+1) &= L_m^u(N)^{-1} e_m^u(N+1) \\
 E_m^c(N+1) &= L_m^c(N+1)^{-1} e_m^c(N+1) \\
 W_m(N+1) &= [w_m^1(N) \quad w_m^2(N+1)] \\
 E_m^c(N+1) &= E_m^c(N) + E_m^{ct}(N+1)E_m^c(N+1) \\
 C_m(N+1) &= C_m(N) + W_m(N+1)E_m^c(N+1)
 \end{aligned}$$

VI. 시뮬레이션 및 검토

시뮬레이션은 다음과 같은 4차 AR 모델에 대해서 수행하였고, 그 결과는 그림 1에서 보였다.

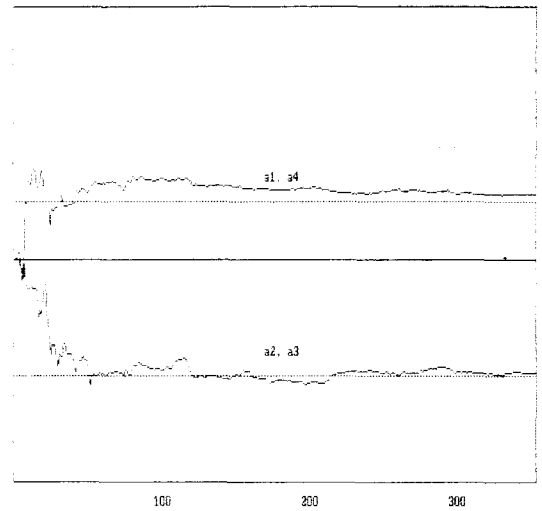
$$y(n) = 0.4*y(n-1) - 0.2*y(n-2) - 0.2*y(n-3)$$

$$+ 0.4*y(n-4) + v(n)$$

$v(n)$ 은 평균치가 0이고 분산이 1인 백색잡음

시뮬레이션 결과 추정되는 필터 계수는 완전히 대칭성을 유지하였지만, 약간의 편향성(bias)을 보였다.

그림 1. 추정된 AR 계수



VII. 결론

선형 위상 시스템의 경우 필터 계수 다항식의 대칭성 보장이 중요한 문제인데, 선형 위상 시스템에 대한 LS(least-squares) 알고리즘은 기존의 일반 LS 알고리즘보다 계산량이 많아 본 논문에서는 계산량을 감소시킨 고속 알고리즘을 유도하였다. 선형 위상 시스템에 대한 LS 알고리즘은 계산량이 필터 차수의 제곱에 비례하는데 반해, 본 논문에서 유도한 알고리즘의 계산량은 필터 차수에 비례한다.

본 논문에서 유도한 고속 알고리즘은 LS 알고리즘보다 수렴 속도는 느리지만 실 시간 처리를 위한 분야에서 이용될 수 있다. 시뮬레이션 결과 약간의 편향성을 보여 추후 과제에 안정성 해석이 요구된다.

## REFERENCES

- [1]. A.V.Oppenheim, Applications of digital signal processing. Englewood Cliffs. NJ:Prentice-Hall 1975.
- [2]. S.Lawrence Marple, " Fast Algorithms for Linear Prediction and System Identification Filters with Linear Phase ", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-30, No.6, Dec. 1982.
- [3]. Nicholas Kalouptsidis , George D. Koyas, " Efficient Block LS Design of FIR Filters with Linear Phase ", IEEE. Trans. Acoust., Speech, signal processing, Vol. ASSP-33, No. 6. Dec. 1985.
- [4]. Benjamin Friedlander, Martin Morf, " Least Squares Algorithms for Adaptive Linear-Phase Filtering ", IEEE. Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-30 No. 3. June 1982
- [5]. Lennart Ljung, Martin Morf et al, " Fast Calculation of Gain Matrices for Recursive Estimation Schemes ", Int.J. Control, 1978, Vol. 27, No.1, 1-19
- [6]. George Carayannis, G. Manolakis et al, " A Fast Sequential Algorithm for Least-Squares Filtering and Prediction ", IEEE. Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-31, No. 6. Dec. 1983.
- [7]. Nicholas Kaloptsidis et al, " Fast Adaptive Least Squares Algorithms for Power Spectral Estimation ", IEEE. Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-35. No. 5 May 1987.