'88 韓國自動制御學術會議論文集 1988. 10. 21~22

출력에 시간지연이 있는 시스템을 위한 칼만필터의 주파수영역 특성

이 상 정
충 남 대 학 교 전 자 공 학 과

Frequency-domain properties of Kalman filters for linear systems with delay in output

Sang Jeong Lee
Dept. of Electronics Engineering Chungnam National University

Abstract: This paper deals with the robustness property of Kalman filters for linear systems with delay in output. The operator-type Riccati equation is transformed to algebraic equations, and the circle condition is derived. Based on the circle condition, it is shown that the same nondivergence margin, $(\frac{1}{2},\infty)$ gain margin and ±60° phase margin, is guaranteed as for ordinary systems.

1. 서 론

상미방 시스템을 위한 LQ조정기 및 칼만필터의 강인성은 잘 알려져 있으며(1,2) 이 성질을 이용한 LQG/LTR 방법이 강인한 출력 궤환제어를 구현하기 위한 유력한 방법으로 알려져 있다(3). 한편, 시간지연 시스템의 경우에로 이들 성질을 규명하는 연구가 진행되어 왔다. 상태에 시간지연이 있는 시스템의 경우에 LQ 조정기 및 칼만필터는 상미방 시스템의 경우와 동일한 강인성을 가지며(4,5,6), 입력에 시간지연이 있는 시스템의 경우에 LQ 조정기는 시스템에 따라 다른 강인성이 보장된다(7). 또, Kwon과 Lee(8)는 상태에 시간지연이 있는 시스템 및 상태와 입력에 시간지연이 있는 시스템에로 LQG/LTR 방법을 확장시켰으며 Lee등(7)은 입력에 시간지연이 있는 시스템에로 LQG/LTR 방법을 확장시켰다.

본 논문에서는 출력에 시간지연이 있는 시스템을 위한 칼만필터의 강인성을 주파수 영역에서 해석한다. 우선, 시간영역에서 대수 방정식, 상미분방정식, 편미분방정식으로 주어지는 Riccati 방정식을 주파수 영역에서 대수적인 것으로 변환시킨후 최적을 위한 필요조건인 circle 조건을 유도한다. circle조건과 강인안정도 조건으로 부터 출력에 시간지연이 있는 시스템을 위한 칼만필터는 상미방 시스템과 동일한$(\frac{1}{2},\infty)$ 이득여유 및 ±60° 위상여유를 보장하게 됨을 보인다.

2. 칼만필터의 비발산 여유

본 논문에서 다루는 시스템은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + w(t) \tag{1}$$

$$y(t) = c_0x(t)+c_1x(t-h)+v(t) \tag{2}$$

여기서 $x(t)\varepsilon R^n$, $y(t)\varepsilon R^m$이며, A, c_0및 c_1은 n×n, m×n 및 m×n 상수행렬이다. w(t)와 v(t)는 영평균 백색 잡음으로 $\mathrm{cov}\{w(t),w(\tau)\}=Q\delta(t-\tau)$, $\mathrm{cov}\{v(t),v(\tau)\}=R\delta(t-\tau)$이고 $Q=Q'\geq 0$, $R=R'>0$ 이다.

위와 같은 시스템에 대한 stationary Kalman filter는 다음과 같이 주어진다(9).

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t|t)=A\hat{x}(t|t)+\{p_0c_0'+p_1'(-h)c_1'\}R^{-1}\{y(t)-c_0\hat{x}(t|t)-c_1\hat{x}(t-h|t)\} \tag{3}$$

$$\hat{x}(t-h|t)=\hat{x}(t-h|t-h)+\int_{t-h}^{t}\{p_1(t-h-\sigma)c_0'+p_2(t-h-\sigma,-h)c_1'\}\cdot R^{-1}\{y(\sigma)-c_0\hat{x}(\sigma|\sigma)-c_1\hat{x}(\sigma-h|\sigma)\}d\sigma \tag{4}$$

여기서 $\hat{x}(\theta|0)=0$, $-h\leq\theta\leq 0$이며, p_0, $p_1(\theta)$, $p_2(\theta,\eta)$ 는 다음의 Riccati 방정식의 해이다.

$$0=A_0p_0+p_0A_0'+Q-\{p_0c_0'+p_1'(-h)c_1'\}R^{-1}\{c_0p_0+c_1p_1(-h)\} \tag{5}$$

$$\frac{d}{d\theta}p_1(\theta)=-p_1(\theta)A'+\{p_1(\theta)c_0'+p_2(\theta,-h)c_1'\}R^{-1}\{c_0p_0+c_1p_1(-h)\} \tag{6}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial\eta}\right)p_2(\theta,\eta)=\{p_1(\theta)c_0'+p_2(\theta,-h)c_1'\}R^{-1}\{c_0p_1'(\eta)+c_1p_2'(\eta,-h)\} \tag{7}$$

여기서 경계조건은

$$p_1(0)=p_0,\quad p_2(\theta,0)=p_1(\theta) \tag{8}$$

이며, $p_0'=p_0$, $p_2'(\theta,\eta)=p_2(\eta,\theta)$이다.

Kalman filter 의 비발산 여유를 분석하기 위해 우선 Riccati 방정식 (6), (7)을 주파수 영역에서 대수적인 식으로 나타내어 보자.

보조정리1 : 경계조건 (8)을 갖는 Riccati 방정식 (6), (7)은 주파수 영역에서 다음과 같은 대수적인 식으로 나타낼 수 있다.

$$0=\overline{p}_1(s)\Delta'(s)+e^{-sh}p_1(-h)-p_0+\left(\overline{p}_1(s)c_0'+\overline{p}_2(s)c_1'\right)R^{-1}$$
$$\left(c_0p_0+c_1p_1(-h)\right) \tag{9}$$

$$0=\overline{p}_1'(s)+\overline{p}_1(-s)-e^{sh}\overline{p}_2'(s)-e^{-sh}\overline{p}_2(-s)-\left(\overline{p}_1(-s)c_0'\right.$$
$$\left.+\overline{p}_2(-s)c_1'\right)R^{-1}\left(c_0\overline{p}_1'(s)+c_1\overline{p}_2'(s)\right) \tag{10}$$

여기서

$$\overline{p}_1(s)=\int_{-h}^{0} e^{s\theta}p_1(\theta)d\theta \tag{11}$$

$$\overline{p}_2(s)=\int_{-h}^{0} e^{s\theta}p_2(\theta,-h)d\theta \tag{12}$$

$$\Delta(s)=sI-A \tag{13}$$

이다.

증명 : 식 (6)의 양변에 $e^{s\theta}$를 곱하고 θ에 대해 -h 부터 0까지 적분하고 경계조건 (8)을 대입하면 식 (9)를 얻는다. 마찬가지로, 식(7)의 양변에 $e^{s(\eta-\theta)}$를 곱하고 θ,η에 대해 -h 부터 0까지 적분하고 경계조건(8)을 대입하면 식 (10)을 얻게된다. 이상으로 증명은 완료된다.

이제 식 (5),(9) 및 (10)의 대수식들을 이용하여 Kalman 필터의 주파수 영역에서의 최적을 위한 필요조건인 circle 조건을 유도하기로 한다. 이를 위해 다음과 같이 정의되는 innovation $\mu(t)$ (9)

$$\mu(t)=y(t)-\hat{y}(t)=y(t)-c_0\hat{x}(t|t)-c_1\hat{x}(t-h|t) \tag{14}$$

와 $\hat{y}(t)$간의 전달함수를 구해보면

$$\hat{y}(s)=\left[(c_0+c_1e^{-sh})\phi(s)(p_0c_0'+p_1'(-h)c_1')+c_1e^{-sh}\right.$$
$$\left.(p_1(-s)c_0'+p_2(-s)c_1')\right]\cdot R^{-1}\mu(s) \tag{15}$$

로 주어진다. 여기서 $\phi(s)=\Delta^{-1}(s)$ 이다.

상미방 시스템에서와 같이 return difference matrix 를

$$T(s)=I+\left[(c_0+c_1e^{-sh})\phi(s)(p_0c_0'+p_1'(-h)c_1')+c_1e^{-sh}\right.$$
$$\left.(\overline{p}_1(-s)c_0'+p_2(-s)c_1')\right]R^{-1} \tag{16}$$

으로 정의하면 다음과 같은 circle 조건을 얻게된다.

정 리 1 : 출력에 시간지연이 있는 시스템을 위한 Kalman 필터는 주파수 영역에서 다음과 같은 관계를 만족한다.

$$T(j\omega)RT^*(j\omega)\geq R \tag{17}$$

여기서 *는 conjugate transpose 를 나타낸다.

증명 : 식 (16)으로 부터

$$T(s)RT'(-s) = R+(c_0p_0+c_1p_1(-h))\phi'(-s)(c_0'+e^{sh}c_1')+(c_0\overline{p}_1'(s)$$
$$+c_1\overline{p}_2'(s))c_1e^{sh}+(c_0+c_1e^{-sh})\phi(s)(p_0c_0'+p_1'(-h)$$
$$\cdot c_1')+c_1e^{-sh}(\overline{p}_1(-s)c_0'+\overline{p}_2(-s)c_1')+(c_0+c_1e^{-sh})$$
$$\cdot\phi(s)(p_0c_0'+p_1'(-h)c_1')R^{-1}(c_0p_0+c_1p_1(-h))\phi'$$
$$\cdot(-s)(c_0'+c_1'e^{sh})+(c_0+c_1e^{-sh})\phi(s)(p_0c_0'+p_1'(-h)$$
$$\cdot c_1')R^{-1}(c_0\overline{p}_1'(s)+c_1\overline{p}_2'(s))c_1'e^{sh}+c_1e^{-sh}(\overline{p}_1(-s)$$
$$\cdot c_0'+\overline{p}_2(-s)c_1')R^{-1}(c_0p_0+c_1p_1(-h))\phi'(-s)(c_0'+c_1'$$
$$\cdot e^{sh})+c_1(\overline{p}_1(-s)c_0'+\overline{p}_2(-s)c_1')R^{-1}(c_0\overline{p}_1'(s)+c_1\overline{p}_2'$$
$$\cdot(s))c_1' \tag{18}$$

의 관계를 얻게 되고, 식 (5)은 보조정리 1의 결과를 이용하여 식 (18)을 정리하면

$$T(s)RT'(-s)=R+(c_0+c_1e^{-sh})\phi(s)Q\phi'(-s)(c_0'+c_1'e^{sh}) \tag{19}$$

의 관계를 얻게된다. 식 (19)에 s=jω를 대입하면 $(c_0+c_1e^{-j\omega h})\phi(j\omega)Q\phi^*(j\omega)(c_0'+c_1'e^{j\omega h})$는 hermitian이고 $Q\geq 0$ 이므로 식 (17)의 관계를 얻는다. 이상으로 증명은 완로된다.

정리 1의 결과는 상미방 시스템이나 상태에 시간 지연이 있는 시스템에서와 같은 결과이며, 따라서 Kalman 필터는 필터 입력단에 교란이 있을 경우에 오차 동 특성에 대해 이들 시스템에서와 같은 비발산 여유를 보장하게 된다.

정리 2 : 출력에 시간지연이 있는 시스템을 위한 Kalman 필터는 개루우프 시스템이 jω축상에 극점을 갖지않고 R이 대각행렬인 경우에 비간섭 고란에 대해 다음과 같은 비발산 여유를 보장한다:

$$\text{이득여유} = (\tfrac{1}{2},\infty) \tag{20}$$

$$위상여유 = \pm 60° \tag{21}$$

또한

$$\begin{bmatrix} I & X(s) \\ 0 & I \end{bmatrix} \text{ 또는 } \begin{bmatrix} I & 0 \\ X(s) & I \end{bmatrix} \tag{22}$$

다 같은 형태의 crossfeed 고란에 대해선

$$\bar{\sigma}^2(x(j\omega)) < \frac{\underline{\sigma}(R_1)}{\bar{\sigma}(R_2)} \text{ 또는 } \frac{\underline{\sigma}(R_2)}{\bar{\sigma}(R_1)}. \tag{23}$$

을 만족하면 비발산이 보장된다. 여기서, $\underline{\sigma}(\cdot)$와 $\bar{\sigma}(\cdot)$은 최소 및 최대 특이치이며 R은

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \tag{24}$$

와 같은 블럭 대각 행렬로 둔다.

증명 : 참고문헌 (6)의 정리 2.2에서 주어지는 강인 안정도 조건과 정리 1의 circle 조건 (17)을 이용하여 참고문헌 (10)에서와 동일한 방법으로 증명된다.

3. 결론

본 논문에서는 출력에 시간지연이 있는 시스템을 위한 Kalman필터가 상미방 시스템이나 상태에 시간지연이 있는 시스템에서와 같은 비발산 여유를 보장함을 보였다. 본 논문의 결과는 출력에 point delay가 있는 시스템의 경우이나 일반적인 시간지연이 있는 시스템에로의 LQG/LTR 방법의 확장에도 이용될 수 있으리라 생각된다. 마지막으로, 입력과 출력에 동시에 시간지연이 있는 경우의 LQG/LTR 방법은 계속 연구할 과제임을 언급하고자 한다.

참고문헌

(1) R.E. Kalman, "When is a linear system optimal?," J. Basic Engr., Trans. ASME, Ser.D, vol. 86, pp. 51-60, Mar. 1964.

(2) M.G. Safanov and M. Athans, "Gain and phase margin for multiloop LQG requlators," IEEE Trans. Automat. contr., vol. AC-22, no. 2, pp. 173-179, Apr. 1977.

(3) J.C. Doyle and G. Stein, "Multivariable feedback design: concepts for a classical/ modern sgnthesis," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-26, no. 1, pp.4-16, Feb. 1981.

(4) K. Uchida and E. Shimemura, "Closed-loop properties of the infinite-time linear-quadratic optimal regulator for systems with delays," Int. J. Contr., vol.43, no. 3, pp. 773 - 779, 1986.

(5) W.H. Lee and B. Levy, "Robustness properties of linear quadratic hereditary differential systems," in Proc. IEEE Conf. Decision Contr., 1982, pp. 1267-1272.

(6) W.H. Kwon and S.J. Lee, "LQG/LTR methods for linear systems with delay in state," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-33, no. 7, pp. 681-687, July 1988.

(7) S.J. Lee, W.H. Kwon, and S. W. Kim, "LQG/LTR methods for linear input-delayed systems," Int. J. Contr., vol. 47, no. 4, Apr. 1988.

(8) W.H. Kwon and S.J. Lee, "LQG/LTR methods for systems with delays in both the state and the input," to appear in J. KIEE, 1988.

(9) R.H. Kwong and A.S. Willsky, "Estimation and filter stability of stochastic delay systems," SIAM J. Contr., vol. 16, no. 4, pp. 660- 681, July 1978.

(10) N.A. Lehtomaki, N.R. Sandell, and M. Athans, "Robustness results in LQG based multivariable control designs," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-26, no. 1, pp. 75-93, Feb. 1981.