

도립 진자의 가변 구조 제어

한 문섭                      학 옥열  
 인하 대학교                인하 대학교

VSS Control of Inverted Pendulum.

Moon seob Han                      Uk yeol Huh  
 (Inha Univ.)                          (Inha Univ.)

ABSTRACT

In this thesis, after the inverted pendulum being made, its state equation was established with parameters obtained by the state space approach and its position and stabilization control was performed with VSS.

The switching function of VSS was obtained from pole placement method and as the result of VSS control was compared with that of optimal regulator control, its robustness was clarified in sliding mode.

The position and stabilization control of the inverted pendulum system were accomplished with VSS.

1. 서론

도립 진자는 불안정한 기계 장치의 가장 대표적인 예로써 로켓을 발사하는데 있어 발사대를 안정화시키기 위한 장치로 연구되어 오다가 요즈음 로보트의 팔과 상사인 형태 [1]로 생각되어짐에 따라 많은 연구를 하고있다. 제어 이론으로 최적 레귤레이터 (Optimal Regulator)와 병행하여 Single 도립진자를 Bang-Bang 제어 [2]로, Double 도립 진자를 관측자 (Observer)를 이용하여 제어 [3]를 하였지만 정상 상태에서의 안정성이 없었다. 최근에 들어서 움직이는 팔을 연상하게 하는 Triple 도립 진자 [4]의 제어를 하고 있다. 하지만 지금까지는 선형 제어 모델을 사용하였으며 도립 진자와 같은 복잡한 시스템에 대해서는 현재의 선형 제어 이론을 더욱 응용하여 사용해야 할 것이다.

제어 이론으로는 로보트와 직,교류 서어보 전동기 제어 분야에서 많이 이용되고 있는 가변 구조계를 도입하였다. 가변 구조계는 소련에서 1950년경에 처음으로 시작되었으며 서방에는 근래에 들어 소개가 되었는데 시스템의 구조를 미리 정한 알고리즘 또는 구조적인 변환 법칙에 따라 변경시켜 강제적으로 따르도록 하므로써 첫째로 응답이 빠르고 오버슈우트가 없으며, 둘째로 정상 상태 오차가 없고, 셋째로 어떤 환경에서도 불변인 궤적을 유지하고, 마지막으로 슬라이딩 운동 (Sliding Motion)에 의해 파라미터 변동이나 외란이 있는 귀환계의 안정도에 대해 강한 강인성 (Robustness)을 갖게 하는 성질이 있다. 특히 제어 입력을 상태 변수의 함수로 정의함으로써

불안정한 구조를 안정한 구조로 변환시키는 것이 가능하다.

가변 구조계는 과도 상태에서 크게 두 가지 형태를 취한다. 즉 스위칭 평면 (Switching Plane)에 도달하기 위한 상당히 빠른 형태와 스위칭을 하면서 원점에 도달하기 위한 느린 형태이다. 이 두 가지 형태에 의해 선형 제어에서 야기되는 정,동적인 정확도에 대한 문제가 해소된다.

하지만 슬라이딩 운동을 실현하는데 있어서는 큰 입력에 의해서 스위칭 평면을 무한한 주파수로 스위칭 하기 때문에 정상 상태에 도달한 RP (Representative Point)가 슬라이딩 모드 (Sliding mode)를 유지하지 못하고 불안정한 상태로 가해지는 chatter (Chattering)이 일어나는 단점을 갖고 있는데 요즈음 이 현상을 없애기 위한 연구가 많이 이루어지고 있다. [5][6][7]

2. 수학적 모델의 유도

도립 진자계는 그림 1과 같이 (1) 제한된 길이의 모노레일 (Monorail)을 따라 이동하는 대차 (Cart), (2) 대차가 이동하는 반대 방향으로 회전할 수 있도록 대차를 축을 만들어 고정시킨 진자, (3) 모터, 이송 장치와 모터 구동 증폭 장치로 구성된 대차의 구동부로 구성되어 있다.

시스템을 수학적 모델링을 하는데 있어서 다음 4가지 가정을 한다.

- 1) 진자는 휘어지지 않는 강체이다.
- 2) 벨트의 길이는 변하지 않는다.
- 3) 모터의 힘은 지연 시간이 없이 대차에 직접 가해지고 증폭기의 입력과 비례한다.
- 4) 대차, 풀리, 벨트, 모터의 등가 마찰 계수와 진자의 중심 축에서의 마찰 계수는 각각의 속도에 비례한다.

2.1 대차의 운동 방정식

그림 2에서 대차에 입력을 가하였을 때 발생하는 힘에 대한 방정식은 다음과 같다.

$$M \ddot{x} = AU - Fr - H \quad (2-1)$$

- M [Kg] : 대차, 벨트, 풀리와 모터의 등가 질량
- r [m] : 대차의 변위
- U [N] : 증폭기의 입력 전압
- A [N/V] : 단위 입력에 대한 모터에 가해지는 힘의 비
- F [Kg/s] : 대차, 벨트, 풀리와 모터의 등가 마찰 계수
- H [N] : 진자에 의한 대차에 가해지는 수평력

2.2 진자에 관한 운동 방정식

그림 3에서 진자의 축을 중심으로 힘에 대한 방정식은 다음과 같다. 특히 대차에 대해 발생

힘은 해석이 용이하도록 수직과 수평 성분으로 나눈다.

$$J\ddot{\theta} = Vl \sin\theta - Hl \cos\theta - C\dot{\theta} \quad (2-2)$$

$$Ml \frac{d}{dt} (R + l \sin\theta) = H \quad (2-3)$$

$$Ml \frac{d}{dt} (l \cos\theta) = V - Ml g \quad (2-4)$$

- J [Kg·m<sup>2</sup>] : 진자의 중심 모멘트 (Moment)
- θ [rad] : 진자의 연직선 상의 각도
- V [N] : 대차에 의한 진자에 가해지는 수직 방향 성분
- l [m] : 축에서 부터 진자 중심까지의 거리
- H [N] : 대차에 의한 진자에 가해지는 수평 방향 성분
- C [Kg·m<sup>2</sup>/s] : 축의 마찰 계수
- Ml [Kg] : 진자의 질량
- g [m/s<sup>2</sup>] : 중력 가속도

### 2.3 상태 방정식의 도출

상태 변수를  $x = [r \ \theta \ \dot{r} \ \dot{\theta}]$ 로 정하고 식 (2-1) 부터 식 (2-4) 에 의해서 테일러 급수 (Taylor series) 에 의하여 진자의 각도를 원점에 대해 선형화시키면, 시스템의 상태 방정식은,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2-5)$$

$$y(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T \quad (2-6)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

$$\begin{bmatrix} a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} -(Ml)^2 g & -F(J+Ml^2) & cMl & (J+Ml^2)a \\ (M+Ml)Mlg & FMl & -(M+Ml)c & -Mlla \end{bmatrix}$$

$\alpha = (M + Ml) J + M M l^2$

가 된다.

### 3. 가변 구조계의 구성

가변 구조계를 이용하면 시스템에 대하여 온라인 (On-Line) 상에서 파라미터 계수와 외란의 동정 (Identification) 없이 직접적으로 스위칭 평면의 근을 정하여 줌으로써 미지의 시변계를 효과적으로 제어할 수 있게 한다. [8][9]

시스템의 상태 방정식 식 (2-5) 에서 정규형 (Canonical Form) 을 이용하여,

$$TB = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ b \end{bmatrix}, b : \text{스칼라 량} \quad (3-1)$$

를 만족하는 변환 행렬 T 에 대한 변환된 상태 변수가  $z(t) = T x(t)$  의 관계를 갖으므로 변환된 상태 방정식은

$$\dot{z}(t) = TAT^{-1} z(t) + TBu(t) \quad (3-2)$$

이 되고 스위칭 평면은

$$\sigma = Cx(t) = CT^{-1} z(t) = 0, C = [c_1, c_2, c_3, c_4] \quad (3-3)$$

이다. 변환된 상태 변수를  $z = [z_1, z_2]^T$  으로 나누면,

$$(z_1 \in R^3),$$

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, CT^{-1} = [C_1, C_2] \quad (3-4)$$

$$\dot{z}_1(t) = A_{11} z_1(t) + A_{12} z_2(t) \quad (3-5)$$

$$\dot{z}_2(t) = A_{21} z_1(t) + A_{22} z_2(t) + bu(t)$$

$$C_1 z_1(t) + C_2 z_2(t) = 0 \quad (3-6)$$

이 된다.  $F = C_2 C_1^{-1}$  이라고 하면,

$$\dot{z}_2(t) = -F z_1(t) \quad (3-7)$$

이므로 식 (3-9) 에 식 (3-11) 을 대입하면 결과적으로,

$$\dot{z}_1(t) = (A_{11} - A_{12} F) z_1(t) \quad (3-8)$$

가 되어 안정한 슬라이딩 모드를 설계하기 위해서는  $(A_{11} - A_{12} F)$  의 고유치가 음의 값을 갖도록 함으로써 슬라이딩 평면 계수를 결정한다. 이 스위칭 함수를 가변 구조계에 의하여 제어할 하므로써 본래 시스템과 등가가 된다. 고유치는 시스템의 고유치와는 다르게 설정을 하여야 한다. 위에서 구한 스위칭 함수에 따라 다음과 같은 입력을 정한다.

$$u_i(t) = \begin{cases} \alpha_i x_i(t) & \sigma x_i(t) \geq 0 \\ \beta_i x_i(t) & \sigma x_i(t) < 0 \end{cases} \quad (3-9)$$

$$u(t) = \sum_{i=1}^2 u_i(t)$$

그리고 가변 구조계가 안정하기 위한 조건은 그림 4 와 같이 슬라이딩 모드 상의 궤적 (Trajectory) 에 의해 구하면 식 (3-10) 과 같다.

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \dot{\sigma} \sigma \leq 0 \quad (3-10)$$

### 4. 시뮬레이션

이 장에서는 VSS 와 종래의 선형 제어 이론으로 최적 레귤레이터를 시뮬레이션에 의한 비교를 함으로써 VSS 의 강인성을 확인하도록 한다.

대차의 스텝 입력에 대한 응답과 진자의 자유진동에 의해 구한 독립 진자의 파라미터는 표 1 과 같다.

표 1의 파라미터를 식 (2-7) 에 대입하고 상태 방정식에 시스템 외란  $\omega(t)$  과 측정 잡음  $w(t)$  과 선형화 과정에서 생략된 비선형 성분  $N(t)$  를 넣으면,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \omega(t) + N(t)$$

$$y(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T + w(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.229 & -0.767 & 0.01 \\ 0 & 16.176 & 1.237 & -0.715 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.45 \\ -2.3 \end{bmatrix} u(t) + \Omega(t) + N(t)$$

이 되고, 가제어 정규형에 의하여 변환 행렬 T 를 구한다.

$$T = \begin{bmatrix} -22.85 & 1.01 & 1.45 & 0 \\ 0 & 0 & -2.33 & 0 \\ 0 & -22.85 & 1.01 & 1.45 \\ 0 & 0 & 0 & -2.33 \end{bmatrix}$$

모델링 상에서 마찰 계수에 대해서 정확한 해석을 위하여 Coulomb 과 Viscous 마찰 계수를 고려한 모델로서 마찰력을 다음과 같이 정의 한다. [10]

$$f = \begin{cases} \mu + \tau w, & w > 0 \\ \mu - \tau w, & w < 0 \end{cases}, \tau \text{ 는 마찰 계수.}$$

잡음  $\Omega(t)$  와  $W(t)$  는 0.01 의 변분을 갖도록 하고, 마찰력의 보상에서의  $\mu$  는 0.01 로 하였다.

#### 4.1 가변 구조계

입력 제인을 구하기 위하여 식 (3-10) 에 식 (3-3) 과 식 (3-9) 를 대입하면,

$$\begin{aligned} \alpha 1 &> 0 \\ \beta 1 &< 0 \\ \alpha 2 &> (a32 \ b3 + a42 \ c4) / (b3+b4) = -14.14 \\ \beta 2 &< (a32 \ c3 + a42 \ c4) / (b3+b4) \end{aligned}$$

이 된다.

1) 극 (Pole) 을 [-1, -2, -3] 으로 선택하므로써 스위칭 함수 C 는 [ 0.26, 2.95, 0.49, 0.75] 이 되고, 2) 입력 제인은 위의 식에 의해서  $\alpha 1 = 40$ ,  $\beta 1 = -40$ ,  $\alpha 2 = 80$ ,  $\beta 2 = -80$  으로 한다.

#### 4.2 최적 레귤레이터

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

에서 J 를 최소화하는 최적 제어 입력 u 를 구하기 위하여 Riccati 방정식,

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$$

의 P 행렬을 구하여 최적 제어 입력,

$$u = -Kx = -R^{-1}B^T Px$$

을 구한다.

가중치 Q 와 R 를,

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P = 1$$

로 하면, 패 루우프 게인 벡터 K 는 [ -2.62 -50.07

-2.39 -0.47 ] 이 된다.

#### 5. 실험

제작된 도립진자는 강철판 위에 37 Cm 의 레일에 알루미늄 대차를 고정시켜서 타이밍 기어 (Timing Gear) 와 벨트 (Belt) 로 대차가 이동을 할 수 있도록 하였고, 대차 위에는 진자를 고정시키는 축을 세우고 포텐시오펜터 (Potentiometer) 와의 사이에 20:1 의 감속기를 달았다.

90V, 24W DC 모터를 PWM 파워 트랜지스터를 이용한 4상한 초퍼로 구동을 시킨다. 구동 증폭기는 입력이 +5V ~ -5V 변하는대 따라서 출력은 +55V ~ -55V 로 선형적으로 변한다.

대차의 위치와 진자의 각도는 포텐시오펜터로 측정을 하여 12bit A/D 변환기를 사용해서 샘플링 주기를 25 m sec 로 하여 디지털화 시키고 IBM PC - XT 상에서 C 언어로 연산을 수행한 결과를 제어 입력으로 D/A 변환기를 통해서 내보내어 구동부에 입력시킨다.

#### 6. 결과

시뮬레이션의 결과로 그림 은 VSS, 그림 은 최적 레귤레이터를 이용하여 제어를 한 결과로 상태 변수의 시간에 따른 변화를 그래프로 나타내었다. 그림에서 알 수 있듯이 최적 레귤레이터에 비해 VSS 의 제어 결과는 오버 슈트가 현저히 적었으며 인가한 외란에 대해 강인함을 알 수 있다.

#### 7. 결론

도립 진자의 위치 및 안정화 제어를 하는데 있어서는 도립 진자의 파라미터 변동이나 외란의 영향이 크므로 슬라이딩 모드 상에서 강인한 제어기로서 VSS 제어가 적합하다. 그리고 시뮬레이션 상에서 백색 잡음을 첨가하여 VSS 와 최적 레귤레이터를 비교하므로써 VSS 의 강인성을 입증하였다.

앞으로 (1) 정상 상태에서의 상당히 큰 입력에 의한 무한한 주파수의 스위칭에 의한 기계적인 손실을 일으키는 채터링 현상을 없애기 위한 연구가 요구된다.

(2) 보다 정확한 도립 진자의 해석을 위해 기어 나 감속기에 의한 백 래쉬 (Back Lash) 와 모델링 과정에서 제외된 고주파수 성분에 대한 보상을 해야할 것이다.

#### REFERENCE

[1] Arthur E. Bryson, JR., and David G. Luenberger, "The Synthesis of Regulator Logic using State-variable Concepts", Proceeding OF IEEE, Vol. 58, No. 14, NOVEMBER 1970.

[2] Shozo Mori, Hiroyoshi Nishimura and Katsuhisa Furuta, "Control of Unstable Mechanical System, Control of Pendulum", INT. J. CONTROL, 1976, Vol. 23, No. 5, 673-692.

[3] Katsuhisa Furuta, Hiroyuki Kajiwaru and Kazuhiro Kosuge, "Digital Control of a Double Inverted Pendulum on an Inclined Rail", INT. J. CONTROL, 1980, Vol. 32, No. 5, 907-924.

[4] K. Furuta, T. Ochiai and N. Ono, "Attitude Control of a Triple Inverted Pendulum", INT. J. CONTROL, 1984, Vol. 39, No. 6, 1351-1365.

[5] U. Itkis, "Control Systems of Variable Structure", 1976, Wiley.

[6] V. I. Utkin, "Variable Structure Systems with Sliding Modes", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-22, No. 2, APRIL 1977.

[7] V.I.Utkin, "Variable Structure Systems: Present and Future", Automat and Remote control 44, 1105-1120, 1983.

[8] C.M.Dorling, A.S.I.Zinober, "Two Approches to Hyperplane Design in Multivariable Variable Structure Control Systems", INT.J.CONTROL, 1986, Vol.44, No.1, 65-82.

[9] A.S.I.Zinober, C.M.Dorling and Yang Xin Hua, "Design Techniques for Multivariable Structure Control Systems", Proceeding of 25th Conference on Decision and Control Athenes, Greece, December 1986.

[10] C.Canudas, K.J.Astrom and K.Brown, "Adative Friction Compensation in DC-Motor Drives", IEEE Journal of Robotics and Automation, Vol.RA-3, No.6, December 1987.

| 파라미터 | 값                            |
|------|------------------------------|
| M1   | 0.15 [Kg]                    |
| l    | 0.6 [m]                      |
| A    | 8.97 [N/V]                   |
| J    | 0.0018[Kg·m <sup>2</sup> ]   |
| C    | 0.039 [Kg·m <sup>2</sup> /s] |
| M    | 6.2 [Kg]                     |
| F    | 4.76 [Kg/s]                  |

[표1]

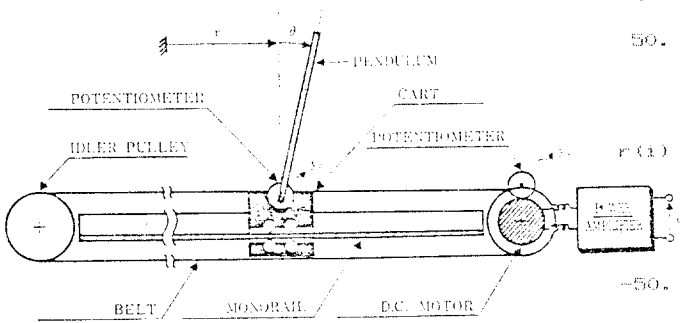


Fig 1. Inverted Pendulum

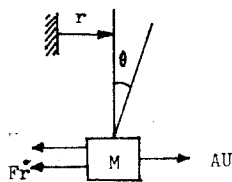


Fig 2. Cart model

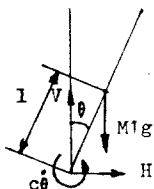


Fig 3. Pendulum model

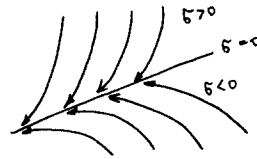


Fig 4. Sliding mode trajectory

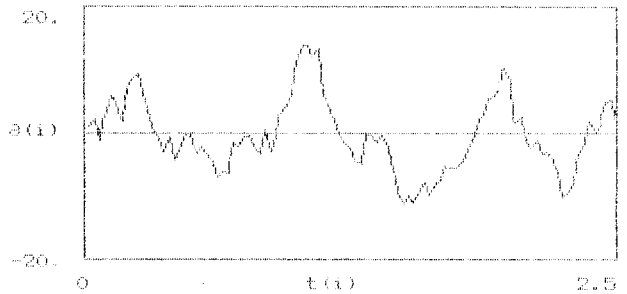
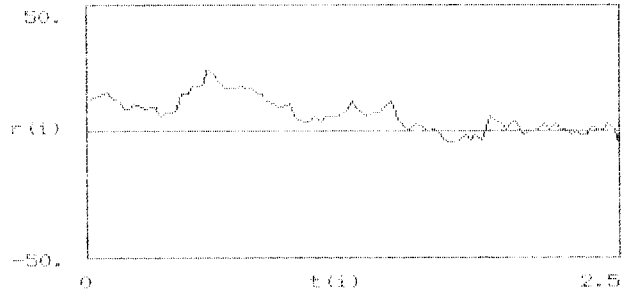


Fig 5. VES control

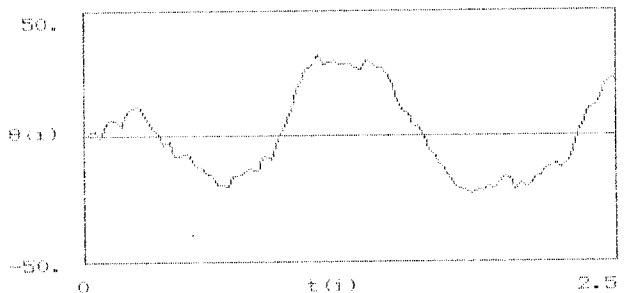
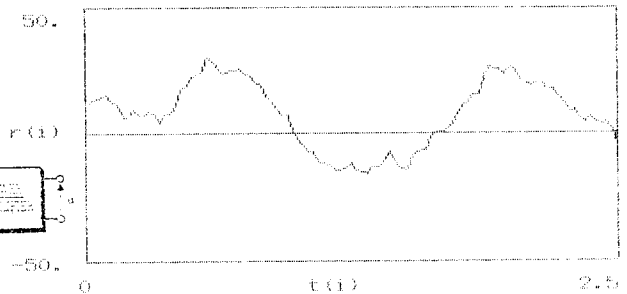


Fig 6. Optimal regulator control