STATE MODEL BASED OPTIMAL FIR 필터의 성능분석

이 규승^ , 권 욱현

서울 대학교 제어계측공학과

Performance Analysis of the state model based optimal FIR filter

Kyu-Seung Lee and Wook-Hyun Kwon

Dept. of Control and Instrumentation Engr.

ABSTRACT

The effects of the errors due to incorrect a priori informations on the noise model as well as the system model in the continuous state model based optimal FIR filter is considered. When the optimal filter is perturbed, the error covariance is derived. From this equation, the performance of the state model based optimal FIR filter is analyzed for the given modeling error. Also the state model based optimal FIR filter is compared to the standard Kalman filter by an example.

1. 서 론

칼만 필터는 대상 시스템에 대하여 모델링 오차가 있는 경우 발산문제가 발생할 수 있다. 또한 추정오차가 발산하지 않는 경우에도 실제 추정오차가 너무 커져 추정치가 실재의 상태와 큰 차이를 나타낼 수 있다. 이러한 발산문제를 해결하기위하여 유한시간안의 관측치만을 사용하여 추정을 행하는 유한기억 필터가 제시되었다. 유한기억 필터로서 Jazwinski [1], Schweppe [2], Bruckstein 과 Kailath [3] 등이 제시한 바 있다. 그러나 이 필터들은 안정도가 보장되기 않기때문에 실현상의 문제가 있다. 그리하여 유한기억 필터의 이러한 문제점을 보완하면서 발산문제를 해결하는 필터로서 state model based optimal FIR 필터(이하 FIR 필터라 부르겠다) 가 제시되었다 [5]. FIR(Finite Impulse Response) 필터는 비순환형이기 때문에 계산상의 단점이 있으나, BIBO 안정도를 보장하고 계수 변동이나 반올림오차등에 견실한 장점이 있다. 최근에 FIR 필터의 성능분석이 이루어 졌으나 해석적 분석은 이루어지지 않았다 [7]. 본 논문에서는 시스템 모델 A,B,C 과 잡음의 공분산(covariance) Q 에 모델링 오차가 있는 경우 FIR 필터의 성능을 분석하였다. 또한 간단한 예를 통하여 FIR 필터와 칼만 필터와 모델 오차에 대한 성능비교를 하였다.

2. 연속형 state model based optimal FIR 필터

추정대상 시스템으로 다음과 같은 선형 시불변 연속형 시스템을 다루기로 한다.

$$dx(t)/dt = Ax(t) + Bw(t) \tag{2.1}$$
$$y(t) = Cx(t) + v(t) \tag{2.2}$$

식(2.1) 에서 초기상태 $x(0)$ 는 영평균에 공분산 $P(0)$ 인 확률변수이고, 공정잡음 $w(t)$ 와 측정잡음 $v(t)$ 는 영평균 백색 잡음으로서 $E[w(t)w'(s)] = Q\delta(t-s)$, $E[v(t)v'(s)] = I\delta(t-s)$ 이고 $x(0)$ 와 $w(t)$ 와 $v(t)$ 는 서로 상관관계가 없다고 가정한다. 그러면 시스템 상태 공분산(state covariance) $P(t) = E[x(t)x'(t)]$ 는 다음의 식을 만족한다.

$$dP(t)/dt = AP(t) + P(t)A' + BQB' \tag{2.3}$$

식(2.1), (2.2) 에 대한 시점 t 에서의 FIR 필터는 다음과 같이 정의된다.

$$\hat{x}(t;T) = \int_{t-T}^{t} H(t,\tau;T)z(t)\,d\tau \tag{2.4}$$

$$J = E[x(t) - \hat{x}(t;T)]'[x(t) - \hat{x}(t;T)] \tag{2.5}$$

최적필터의 직교성으로부터 $H(t,s;T)$ 는 다음의 식을 만족한다.

$$H(t,s;T) = P(t,s)C' - \int_{t-T}^{t} H(t,\tau;T)CP(\tau,s)C'\,d\tau \tag{2.6a}$$
$$P(t,s) = E[x(t)x'(s)] \tag{2.6b}$$

식(2.6) 을 풀기위해 다음과 같은 $H(t,s;\sigma)$ 의 적분 방정식을 정의한다.

$$H(t,s;\sigma) = P(t-T+\sigma,s)C' - \int_{t-T}^{t-T+\sigma} H(t,\tau;\sigma)CP(\tau,s)C'\,d\tau \quad (2.7a)$$

$$R(t,\sigma) = P(t-T+\sigma,t-T+\sigma) - \int_{t-T}^{t-T+\sigma} H(\tau;\sigma)CP(t-\sigma-\tau)C'd\tau \quad (2.7b)$$

이 식들을 σ 에 대하여 편미분하면 $H(t,s;T)$ 를 구하기위한 간략형 Schumitzky 알고리즘을 얻을 수 있다 [5].

$$dH(t,s;\sigma)/d\sigma = [A-R(t,\sigma)C'C]H(t,s;\sigma) \quad (2.8a)$$
$$0 \le T-t \le \sigma \le T$$
$$H(t,s;s-t+T) = R(t;s-t+T)C' \quad (2.8b)$$
$$dR(t,\sigma)/d\sigma = AR(t,\sigma) + R(t,\sigma)A' + BQB' - R(t,\sigma)C'CR(t,\sigma),\ 0\le\sigma\le T \quad (2.9a)$$
$$R(t;0) = P(t-T,t-T) \quad (2.9b)$$

여기에서 $R(t,T)$ 는 시점 t 에서의 추정오차 공분산 (estimation error covariance)을 나타냄을 다음의 식에서 알 수 있다.

$$\begin{aligned} E[x(t)-\hat{x}(t;T)][x(t)-\hat{x}(t;T)]' &= E[x(t) - \int_{t-T}^{t} H(t,\tau;T)z(\tau)\,d\tau]x'(t) \\ &= P(t,t) - \int_{t-T}^{t} H(t,\tau;T)CP(\tau,t)\,d\tau \\ &= R(t,T) \end{aligned} \quad (2.10)$$

대상 시스템이 정상과정인 경우 FIR 필터는 시불변이 된다. 이때의 FIR 필터는 다음과 같이 주어진다.

$$\hat{x}(t;T) = \int_0^T H(\tau;T)z(t-\tau)\,d\tau \quad (2.11)$$
$$dH(t;\sigma)/d\sigma = [A-R(\sigma)C'C]H(t;\sigma) \quad 0\le T-t\le\sigma\le T \quad (2.12a)$$
$$H(t;T-t) = R(T-t)C' \quad (2.12b)$$
$$dR(\sigma)/d\sigma = AR(\sigma) + R(\sigma)A' + BQB' - R(\sigma)C'CR(\sigma),\ 0\le\sigma\le T \quad (2.13a)$$
$$R(0) = P \quad (2.13b)$$

이때 P 는 상태 공분산 (state covariance) 로서 다음의 식을 만족한다.

$$AP + PA + BQB' = 0 \quad (2.14)$$

3. 준최적 FIR 필터의 성능 분석

실재 과정이 정상과정이 아닌 경우 최적의 성능을 얻기위해서는 시변 FIR 필터를 적용해야 하나 계산적인 이유에서 간략화된 필터를 적용시킬 경우가 있다. 그리고 시스템 파라미터나 공정잡음(process noise), 관측잡음(measurement noise) 의 공분산을 정확하게 알 수 없으므로 실재의 과정에 적용시키기 위한 최적 필터의 계수를 정확히 구할 수 없다. 이러한 경우 FIR 필터는 준최적 필터가 된다.

준최적 필터와 이에 의한 상태 추정치가

$$\hat{H}(t,s;T) = H(t,s;T) + h(t,s;T) \quad (3.1)$$
$$\hat{x}(t;T) = x(t;T) + e(t;T) \quad (3.2)$$

로 주어지면 $e(t;T)$ 는 다음의 식이 만족된다.

$$e(t;T) = \int_0^T h(\tau;T)z(t-\tau)\,d\tau \quad (3.3)$$

그러면 실재 추정오차 공분산 $Rr(t,T) = E[x(t) - \hat{\underline{x}}(t;T)] \cdot [x(t) - \hat{\underline{x}}(t;T)]'$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Rr(t,T) &= E[x(t) - \hat{\underline{x}}(t;T)][x(t) - \hat{\underline{x}}(t;T)]' \\ &= R(t,T) - Ee(t;T)[x(t) - \hat{x}(t;T)]' \\ &\quad - E[x(t) - \hat{x}(t;T)]e'(t;T) + Ee(t;T)e'(t;T) \end{aligned} \quad (3.4)$$

여기에서

$$\begin{aligned} &Ee(t;T)[x(t) - \hat{x}(t;T)]' \\ &= \int_{t-T}^{t} h(t,\tau;T)CP(\tau,t)\,d\tau - \int_{t-T}^{t} h(t,\tau;T)H'(t,\tau;T)\,d\tau \\ &\quad - \iint_0^T h(t,\tau1;T)CP(\tau1,\tau2)C'H'(t,\tau2;T)\,d\tau1\,d\tau2 \end{aligned}$$

이고 식(2.6a) 을 위의 식에 대입하면

$$\begin{aligned} &Ee(t;T)[x(t) - \hat{x}(t;T)]' \\ &= \int_{t-T}^{t} h(t,\tau;T)CP(\tau,t)\,d\tau \\ &\quad - \int_{t-T}^{t} h(t,\tau;T)[CP(\tau,t) - H'(t,\tau;T)]\,d\tau \\ &\quad - \int_{t-T}^{t} h(t,\tau;T)H'(t,\tau;T)\,d\tau \end{aligned} \quad (3.5)$$

식(3.5) 를 식(3.4) 에 대입하면 준최적 필터에 대한 추정오차를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$Rr(t,T) = R(t,T) + r(t,T) \quad (3.6)$$
$$r(t,T) = \iint_{t-T}^{t} h(t,\tau1;T)Rz(\tau1,\tau2)h'(t,\tau2;T)d\tau1\,d\tau2 \quad (3.7)$$
$$Rz(t,s) = CP(t,s)C' + I\delta(t-s) \quad (3.8)$$

대상 시스템이 정상과정이면 FIR 필터는 시불변이 되고 추정오차 공분산 $Rr(T)$ 는 시점 t 와 관계없는 행렬로 되고 이것은 다음식에 의해 쉽게 구할 수 있다.

$$Rr(T) = R(T) + r(T) \tag{3.9}$$

$$r(T) = \int\int_0^T h(\tau 1;T)Rz(\tau 2-\tau 1)h'(\tau 2;T)\, d\tau 1\, d\tau 2 \tag{3.10}$$

$$Rz(t) = CP(t)C' + I\delta(t) \tag{3.11}$$

4. 모델오차가 주어진 경우의 성능분석

필터를 실재 시스템에 적용시키기 위해서는 대상 시스템에 대한 상태공간 모델이 정확하게 주어져야 한다. 그러나 비선형 성분의 선형화나 시스템 파라미터의 오차등에 의해 모델링 오차는 항상 존재하게 된다. 모델오차가 주어진 시스템에 대하여 식(3.6)-(3.8) 을 적용시키 위해서는 각각의 시스템 모델과 필터구간에 대하여 필터를 구해야하므로 계산량이 크게 늘어난다. 이러한 계산량을 줄이고, 모델오차가 필터의 성능에 미치는 영향을 알기위해서는 추정오차 공분산을 모델오차로 표시할 필요가 있다. 필터의 설계할 때 사용한 모델을 $\underline{A}$=A+a, $\underline{B}$=B+b, $\underline{C}$=C+c, $\underline{Q}$=Q+q 로 표기하기로 한다.

$r(t,\sigma)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$r(t,\sigma) = \int\int_{t-T}^{t-T+\sigma} h(t,\tau 1;\sigma)Rz(\tau 1,\tau 2)h'(t,\tau 2;\sigma)\, d\tau 1\, d\tau 2 \tag{4.1}$$

식(4.1) 을 σ 에 대하여 미분하면

$$dr(t,\sigma)/d\sigma = du(t,\sigma)/d\sigma + du'(t,\sigma)/d\sigma \tag{4.2}$$

$$du(t,\sigma)/d\sigma = \int_{t-T}^{t-T+\sigma} h(t,t-T+\sigma;\sigma)Rz(t-T+\sigma,\tau)h'(t,\tau;\sigma)\, d\tau$$
$$+ \int\int_{t-T}^{t-T+\sigma} [dh(t,\tau 1;\sigma)/d\sigma]Rz(\tau 1,\tau 2)h'(t,\tau 2;\sigma)\, d\tau 1\, d\tau 2 \tag{4.3}$$

그런데 식(2.8a),(2.8b) 에서 실재 시스템과 가정된 시스템 사이의 필터 계수의 차이 $h(t,s;\sigma)$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$dh(t,s;\sigma)/d\sigma = [a - Kd(t,\sigma)\underline{C} - K(t,\sigma)C]H(t,s;\sigma) + [\underline{A} - \underline{K}(t,\sigma)\underline{C}]h(t,s;\sigma) \tag{4.4a}$$
$$0 \le s-t+T \le \sigma \le T$$

$$h(t,t-T+\sigma;\sigma) = Kd(t,\sigma) \tag{4.4b}$$

$$Kd(t,\sigma) = R(t,\sigma)C' - \underline{R}(t,\sigma)\underline{C}, \tag{4.5a}$$

$$K(t,\sigma) = R(t,\sigma)C' \tag{4.5b}$$

$$\underline{K}(t,\sigma) = \underline{R}(t,\sigma)\underline{C} \tag{4.5c}$$

식(4.4a), (4.4b) 를 식(4.3) 에 대입하고 델타(delta) 함수를 원점에 대하여 대칭인 함수의 극한으로 가정하면 [6] 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$du(t,\sigma)/d\sigma = [\underline{A} - \underline{K}(t,\sigma)\underline{C}]r(t,\sigma) + Kd(t,\sigma)Kd'(t,\sigma)/2$$
$$+ [a - Kd(t,\sigma)c - K(t,\sigma)c] \int_{t-T}^{t-T+\sigma} P(t-T+\sigma,\tau)C'h'(t,\tau;\sigma)\, d\tau \tag{4.6}$$

여기에서 $T(t,\sigma)$ 를

$$T(t,\sigma) = \int_{t-T}^{t-T+\sigma} h(t,\tau;\sigma)CP(\tau,t-T+\sigma)\, d\tau \tag{4.7}$$

로 정의하고 σ 에 대하여 편미분하면 식(4.4a) 와 $R(t,\sigma)$ 의 정의에서 다음의 $T(t,\sigma)$ 에 대한 식을 얻을 수 있다.

$$T(t,\sigma)/d\sigma = [\underline{A} - \underline{K}(t,\sigma)\underline{C}]T(t,\sigma) + T(t,\sigma)A'$$
$$+ [a - \underline{K}(t,\sigma)c][P(t-T+\sigma,t-T+\sigma) - R(t,\sigma)]$$
$$+ Kd(t,\sigma)CR(t,\sigma) \tag{4.8}$$

따라서 의의 식들을 정리하면 모델 오차가 주어진 시스템에 대한 추정오차 공분산은 다음과 같다.

<u>정리 4.1</u>: 실재 시스템 A, B, C, Q 가 각각 $\underline{A}$ = A + a, $\underline{B}$ = B + b, $\underline{C}$ = C + c, $\underline{Q}$ = Q + q 로 모델링되어 FIR 필터를 설계할 때 실재의 추정오차 공분산(estimation error covariance) $Rr(t,T)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$Rr(t,T) = R(t,T) + r(t,T) \tag{4.9}$$

$$dr(t,\sigma)/d\sigma = [\underline{A}-\underline{K}(t,\sigma)\underline{C}]r(t,\sigma)+r(t,\sigma)[\underline{A}-\underline{K}(t,\sigma)\underline{C}]'$$
$$+[a-\underline{K}(t,\sigma)c]T'(t,\sigma)+T(t,\sigma)[a-\underline{K}(t,\sigma)c]'$$
$$+Kd(t,\sigma)Kd'(t,\sigma), \quad 0 \le \sigma \le T \tag{4.10}$$

$$T(t,\sigma)/d\sigma = [\underline{A} - \underline{K}(t,\sigma)\underline{C}]T(t,\sigma) + T(t,\sigma)A'$$
$$+ [a - \underline{K}(t,\sigma)c][P(t-T+\sigma,t-T+\sigma) - R(t,\sigma)]$$
$$+ Kd(t,\sigma)CR(t,\sigma), \quad 0 \le \sigma \le T \tag{4.11}$$

이고 $Kd(t,\sigma)$, $K(t,\sigma)$, $\underline{K}(t,\sigma)$ 는 식 (4.5a)-(4.5c) 로 주어진다. 그리고 $R(t,\sigma)$ 와 $\underline{R}(t,\sigma)$ 는 식(2.10a),(2.10b) 의 리카티 미분방정식을 만족한다.

위의 식은 매 시점 t 마다 관심있는 필터구간 T 까지의 연립미분 방정식을 풀어야한다. 그러나 대상 시스템이 정상과정(stationary process) 이면 시불변 FIR 필터를 적용시킬 수 있다. 이때에는 추정오차 공분산은 상수행렬이 되어 시점 t 와는 무관한 필터 구간 T 의 함수가 된다.

<u>따름정리4.2</u>: 대상시스템이 정상과정이면 모델오차에 의한 FIR 필터의 추정오차 공분산 $Rr(T)$ 은 다음과 같다.

$$Rr(T) = R(T) + r(T) \tag{4.12}$$

$$dr(\sigma)/d\sigma = [\underline{A} - \underline{K}(\sigma)\underline{C}]r(\sigma) + r(\sigma)[\underline{A} - \underline{K}(\sigma)\underline{C}]'$$
$$+ [a - \underline{K}(\sigma)c]T'(\sigma) + T(\sigma)[a - \underline{K}(\sigma)c]'$$

$$+ Kd(\sigma)Kd'(\sigma), \quad 0 \leq \sigma \leq T \tag{4.13}$$

$$T(\sigma)/d\sigma = [\underline{A}-\underline{K}(\sigma)\underline{C}]T(\sigma)+T(\sigma)A' + Kd(t,\sigma)CR(t,\sigma)$$
$$+ [a - \underline{K}(\sigma)c][P - R(\sigma)], \quad 0 \leq \sigma \leq T \tag{4.14}$$

여기에서

$$Kd(\sigma) = K(\sigma) - \underline{K}(\sigma),\ K(\sigma) = R(\sigma)C',\ \underline{K}(\sigma) = \underline{R}(\sigma)\underline{C}$$

이고 $R(\sigma)$ 와 $\underline{R}(\sigma)$ 는 식(2.13a),(2.13b) 의 리카티 미분 방정식을 만족한다.

5. 예 제

관측치에 잡음이 있는 상수를 추정하는 문제를 생각하자. 이 시스템에 대한 모델은

$$d\underline{x}(t)/dt = 0,\ \underline{x}(0) = 1 \tag{5.1}$$
$$\underline{z}(t) = \underline{x}(t) + \underline{v}(t) \tag{5.2}$$

이고 $\underline{v}(t)$ 는 분산이 1 인 영평균 백색잡음이다. 그러나 실재 추정하고자하는 상수가 조금씩 변한다고 하면 이 시스템은

$$dx(t)/dt = w(t),\ x(0) = 1 \tag{5.3}$$
$$z(t) = x(t) + v(t) \tag{5.4}$$

이고 $w(t)$, $v(t)$ 는 분산이 1 인 영평균 백색잡음이다.

식(5.1), (5.2) 에서 설계된 칼만필터를 실재 시스템에 적용시키면 추정오차 분산은 다음과 같이 주어져 시간이 흐름에 따라 발산함을 알 수 있다 [4].

$$Rk(t) = 1 + [t^3 + t^2 + 2t]/[3(t+1)^2] \tag{5.5}$$

구간T 의 state model based optimal FIR 필터를 이 시스템에 적용시키면 추정오차 분산은 다음과 같다.

$$Rr(t,T) = 1/(1+T) + r(t,T) \tag{5.6}$$

$$dr(t,\sigma)/d\sigma = -2\underline{K}(t,\sigma)r(t,\sigma) + Kd^2(t,\sigma) \tag{5.7}$$
$$0 \leq \sigma \leq T$$

$$K(t,\sigma) = 1/(1+\sigma) \tag{5.8}$$

$$Kd(t,\sigma) = \underline{K}(t,\sigma) - \frac{(1+t)\cosh\sigma + \sinh\sigma}{(1+t)\sinh\sigma + \cosh\sigma} \tag{5.9}$$

따라서 $Kd(t,\sigma)$, $\underline{K}(t,\sigma)$ 가 시간이 흐름에 따라 발산하지 않고 그러므로 $Rr(t,T)$ 가 유한한 값을 갖음을 볼 수 있다. 실재 시스템의 공정잡음이 없더라도 계산상의 오차에 의해 공정잡음이 존재하는 것과 같은 효과가 나타나므로, 이 예로부터 칼만필터는 공정잡음이 없는 경우 발산하기 쉬우나, state model based optimal FIR 필터는 이러한 발산문제를 효과적으로 방지함을 볼 수 있다.

6. 결 론

본 논문에서는 연속형 시스템에 대하여 state model based optimal FIR 필터의 계수나 시스템 모델 오차에 대한 성능분석을 하였다. 필터 계수에 오차가 있는 경우 추정오차 공분산은 하나의 적분방정식으로 주어진다. 이 식으로부터 준최적 필터의 추정오차는 같은 계수 오차에 대하여 필터 길이가 커지고 관측신호의 상관계수(covariance matrix) 가 커지면 증가함을 볼 수 있으나 모델 오차에 대한 일반적 경향을 알 수 없다. 모델오차가 주어진 경우의 FIR 필터의 추정오차는 정리4.1 에 나타나 있다. 이 식으로부터 FIR 필터의 추정오차는 시스템 행렬 A,C 에 오차가 있고 대상시스템의 상태 공분산이 무한히 커지지않는한 항상 유한한 값을 갖게되어 따라서 칼만필터보다 발산문제에 대해 효과적임을 알 수 있다. 또한 간단한 예를 통하여 state model based optimal FIR 필터가 발산문제를 해결하면서 수치적으로 칼만필터보다 유리할 수 있음을 보였다.

참고 문헌

[1] A.H. Jazwinski, "Limited memory optimal filtering," IEEE Trans. Automat. Contr., vol.AC-13,pp.558-563, Oct. 1968.

[2] F.C. Schweppe, Uncertain Dynamic Syatems, Prentice-Hall, Englewood Cliff, NJ, 1973.

[3] A.M.Bruckstein and T.Kailath,"Recursive limited memory filtering and scattering theory,"IEEE Trans. Inform. Theory, vol.IT-31, pp.440-443,May. 1985.

[4] R.J.Fitzgerald, "Divergence of the Kalman Filter," IEEE Trans. Automat. Contr., vol.AC-16,pp.736-747, Dec. 1971.

[5] W.H. Kwon and O.K. Kwon, "FIR filters and recursive forms for continuous-time state-space signal models," IEEE Trans. Automat. Contr., vol.AC-30, pp.352-356, Apr. 1987.

[6] A.B. Baggeroer , State Variables and Communication Theory, MIT Press, 1970.

[7] 권 오규,"FIR 필터의 성능 분석," '87한국자동제어학술회의 논문집, pp.470-472, Oct. 1987.