

매트릭스 법에 의한 완전 도체의 산란 특성

°김철후, 김재영, 유상대
경북 대학교 전자 공학과

Application of matrix methods to scattering
by conducting bodies

Chul Hoo Kim, Che Young Kim, Sang Dae Yu

Dept. of Electronics, Kyungpook National University

Abstract

A numerical method is presented for the scattering by the perfectly conducting cylinder with arbitrary cross sections. The relevant integral equation considered by the E-field formulation is solved by method of moments, and thereby the surface current induced as well as the radar cross section of the scatterer are numerically computed to specify the scattering nature of the scatterer. Two separate methods, one with point matching and the other Galerkin's method, are considered to make cross checks to the results obtained. Taking two half pulses suggested to expand the surface current shows savings in computation time and accurate solutions for the corners on the scatterer.

I. 서론

산란 문제에 대한 엄밀해 연구는 단면이 타원 및 원 등과 같이 변수 분리가 가능한 구조물에 한정되어 있다. 임의 단면을 갖는 실린더에 대한 산란 특성은 그 구조물의 특이성으로 인해 변수 분리가 되지 않기 때문에 주로 수치 해석에 의존하고 있으며[1], 그 방법에는 여러가지가 있으나 본 논문에서는 모멘트 법을 이용하였다.

입사파에 의하여 산란체에 유기되는 표면 전류밀도를 구함으로써 산란체의 레이더 단면적

(Radar Cross Section), 방사 패턴 및 산란 전자계 등의 산란체 특성을 알 수 있기 때문에 표면 전류밀도를 구하는 것은 중요하다. 전류밀도를 구하는데 있어서 단순 경계를 갖는 구조에 대해서는 point-matching 방법이 적용될 수 있으나, 각형 단면을 갖는 실린더와 같이 모서리(corner)를 갖는 구조나 접합부(Junction)를 갖는 구조물에 대해서는 모서리나 접합부에서 전류밀도를 정확하게 구할 수 없는 단점이 있다. 따라서 본 논문에서는 전개함수(expansion function)와 시험함수(testing function)를 펄스로 하는 Galerkin 방법을 적용하여 전류밀도를 구하였으며, 또한 계산 과정을 간단히 하기 위하여 두개의 반 펄스를 이용해서 각각 반 펄스의 중간점에서 시험(testing) 하여 평균을 취하는 방법을 도입하였다.

단순 경계를 갖는 예로서 단면이 원형이고 ka 가 3.1인 경우에 point-matching 방법과 본 논문에서 제시한 Galerkin 방법에 의한 결과치를 비교함으로써 그 타당성을 보였다. 모서리를 지리한 예로서 ka 가 각각 1.0과 5.0인 정방형 각형 실린더에 대한 표면 전류밀도와 레이더 단면적을 구하였다.

II. 표면 전류밀도 및 레이더 단면적 계산

임의 모양의 단면을 갖는 무한히 긴 완전 도체 산란체에 그림 1과 같이 전개 도가 Z축과 평행하게 편향(TM Polarization)된 균일한 평면파가 X축에 대해 ϕ_i 로 입사 된다고 가정하며, 시간 의존성은 $\exp(j\omega t)$ 의 약속을 따른다.

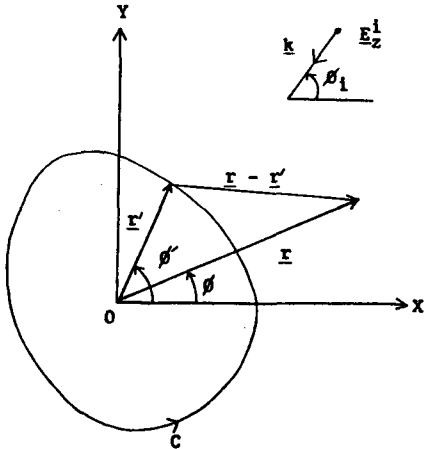


그림 1. 입사 전계와 좌표계

진폭이 1이고 Z축 방향 성분의 입사 전계는 $E_z^i = \exp[jk(x \cos \phi_1 + y \sin \phi_1)]$ 로 표현되며, 도체 표면에서 접선 전계 성분이 영이 되는 경계조건을 적용하면

$$E_z = E_z^i + E_z^s = 0 \quad (1)$$

이 된다. 여기서 E_z 는 총 전계이고, E_z^s 는 산란 전계이다. 입사 전계에 의해 산란체에 유기되는 전류밀도를 구하기 위한 적분 방정식은 식 (1)로부터 다음과 같이 주어진다[2].

$$-E_z^i = E_z^s = -\frac{k\eta}{4} \oint_C J_z(r') H_0^{(2)}(kR) dc' \quad (2)$$

여기서 C는 그림 1에 보인 실린더의 경계선, $H_0^{(2)}$ 는 영차의 제 2종 Hankel함수, η 는 자유 공간에서의 특성임피던스이며 k는 진파상수이다. R은 원천점과 장점사이의 거리, 즉 $R = |r - r'|$ 이다. 식 (2)를 연산자 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$L(J_z) = E_z^i \quad (3)$$

산란체의 특성을 나타내는 중요한 인자만 레이다 단면적은 far field 근사식 $R = r-r'\cos(\phi-\phi')$ 와 far field에서의 E_z^s 에 대한 표현식으로부터 다음과 같이 주어진다[2].

$$\sigma(\phi) = \frac{k\eta^2}{4} \left| \oint_C J_z(r') \exp[jk(x' \cos \phi + y' \sin \phi)] dc' \right|^2 \quad (4)$$

레이다 단면적은 전류밀도가 구하여지면, 식 (4)에 모멘트 법을 적용하여 구할 수 있다.

11. 모멘트 법의 적용

적분 방정식으로 주어진 식 (3)의 해를 직접 점에서만 만족 시키는 point matching 방법으로 구할 수 있으나, 본 논문에서는 그림 2와 같이 두 개의 반 펄스 전개함수와 시험함수를 이용한 Galerkin 방법을 적용하여 수치 계산을 단순화 시켰으며 모서리가 있는 산란체의 모서리 전류밀도 값을 산출할 수 있게 하였다.

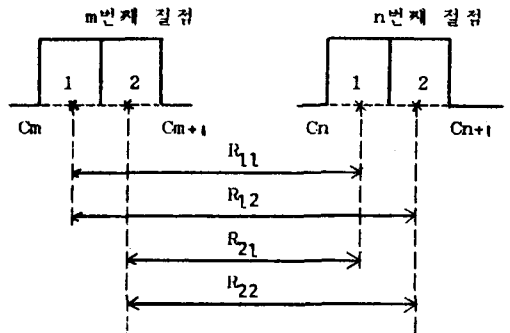


그림 2. 두 개의 반 펄스 전개함수와 시험함수

그림 2의 전개함수를 이용하여 전류밀도를 아래식과 같이

$$J_z = \sum_{n=1}^N J_n f_n \quad (5)$$

으로 전개하고 식 (5)를 식 (3)에 대입한후 각 반 펄스의 중간점에서 시험하여 매트릭스 방정식을 세우면

$$[L_{mn}] [J_n] = [G_m] \quad (6)$$

으로 표현된다. 여기서

$$L_{mn} = \begin{cases} \frac{\Delta C_m \Delta C_n k \eta}{16} [H_0^{(2)}(kR_{11}) + H_0^{(2)}(kR_{12}) + H_0^{(2)}(kR_{21}) + H_0^{(2)}(kR_{22})], & m \neq n \\ \frac{(\Delta C_n)^2 k \eta}{8} [H_0^{(2)}(kR_{12}) + 1 - \frac{j2}{\pi} \ln(\frac{\gamma k \Delta C_n}{8e})], & m=n \end{cases}$$

$$G_m = \Delta C_m \frac{\sin(k\beta)}{k\beta} \exp(jk\alpha)$$

$$\alpha = \frac{X_{m+1} + X_m}{2} \cos \phi_1 + \frac{Y_{m+1} + Y_m}{2} \sin \phi_1$$

$$\beta = \frac{X_{m+1} - X_m}{2} \cos \phi_1 + \frac{Y_{m+1} - Y_m}{2} \sin \phi_1$$

로 주어지며 γ 는 Euler 상수이다. 식 (6)의 역행렬을 계산한후 식 (5)의 미정계수 J_n 을 구하여 식 (5)로부터 산란체에 유기된 표면 전류밀도 J_z 를 구하게 된다. 이로부터 구한 각 절점에서 전류값은 각 반 펄스의 중간점에서의 전류에 대한 평균을 취하며 각 조각에 대한 길이 정보가 포함 되어 있다.

IV. 수치 결과 및 고찰

1. 단면이 원형인 경우

그림 3은 Z 축에 평행한 E 파의 입사각 ϕ_1 가 180° 의 각도로 $ka=3.1$ 인 원형 실린더에 입사될때, 실린더 표면에 유기된 전류밀도 분포를 point matching 방법과 본 논문에서 제시한 Galerkin 방법으로 구한 결과를 비교해 보이고 있다. 표 1에서 보는 바와 같이 주파수가 증가함에 따라 shadow영역의 전류밀도가 점점 작아짐을 알 수 있다.

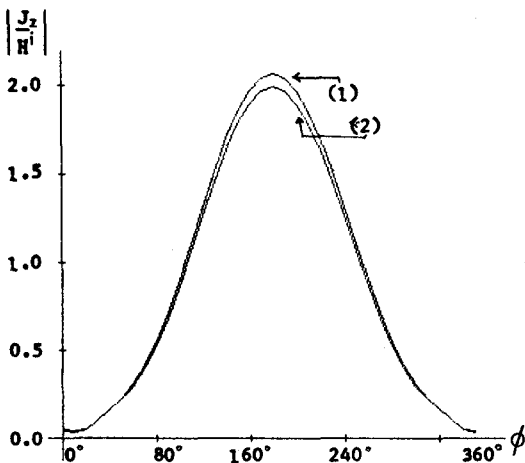


그림 3. 원형 실린더의 전류밀도 분포 ($ka = 3.1$)
(1) Galerkin 방법 (2) Point-matching 방법

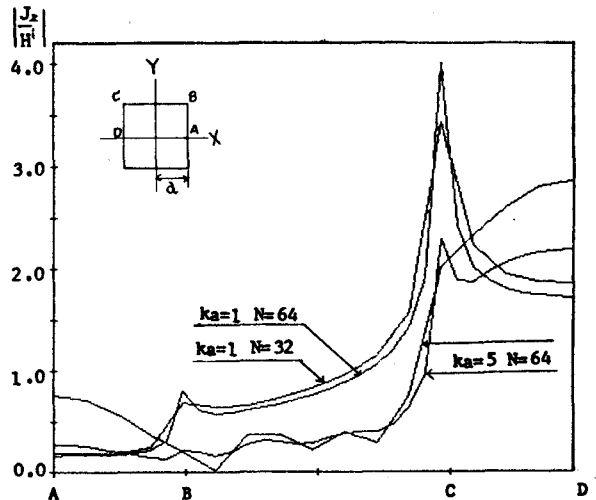
표 1. 원형 실린더의 주파수 증가에 따른 shadow 영역에서의 전류밀도 변화

각도	전류 밀도 (J_z/H^i)			
	$ka=3.1$	$ka=5.0$	$ka=8.0$	$ka=12.0$
0°	0.055	0.075	0.034	0.056
10°	0.043	0.055	0.027	0.073
20°	0.054	0.014	0.022	0.064
30°	0.108	0.044	0.014	0.067
40°	0.165	0.099	0.071	0.043
50°	0.226	0.150	0.114	0.065
60°	0.306	0.212	0.156	0.142
70°	0.417	0.330	0.258	0.169
80°	0.555	0.483	0.359	0.312
90°	0.720	0.635	0.521	0.477

산란체 단면이 X축에 대해 대칭인 구조이므로 위 그림에서 보는 바와 같이 전류밀도 분포가 대칭임을 알 수 있으며 ϕ 가 180° 되는 산란체 표면 전류밀도는 입사각 크기의 약 두 배가 되고 shadow 영역으로 갈수록 전류밀도가 급격히 감소함을 알 수 있다. 또한 본 논문에서 제시한 두 개의 반 펄스를 이용한 Galerkin 방법이 point matching 방법보다 더 정확함을 알 수 있다[3].

2. 단면이 정방형 각형인 경우

그림 4는 ka 가 각각 1.0과 5.0인 경우에 대한 전류밀도 분포와 레이다 단면적의 수치 예이며, (a)는 조각 갯수 N 을 증가시킬때 결과해의 수렴 특성을 보이고 있다[4].



(a)

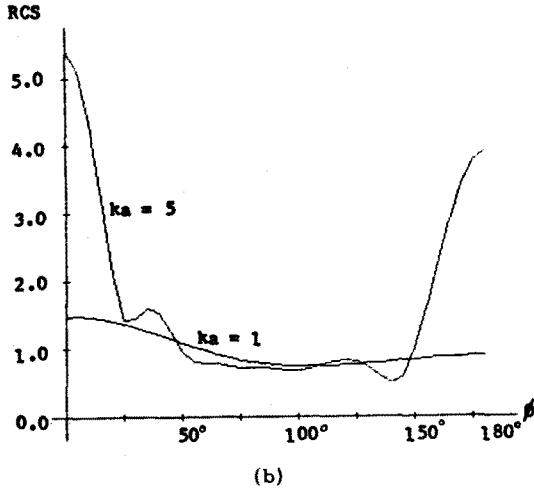


그림 4. 정방향 각형 실린더의 (a) 전류밀도 분포
(b) 레이다 단면적

TM 편향일때 모서리에서 전류밀도가 거의 무한대에 접근함을 알 수 있으며, 주파수가 증가함에 따라 모서리부분의 예리한 정도가 둔화됨을 알 수 있다. 또한 그림 4(b)에서 보는 바와 같이 레이다 단면적은 ka 가 작을때는 ϕ 에 대한 변화가 적으며 ka 가 커짐에 따라 지향성이 나타남을 알수있다.

V. 결론

단면이 원형과 모서리를 가진 각형 실린더 표면에 유기되는 전류밀도와 레이다 단면적을 수치 계산하여 이들 산란체의 특성을 조사 하였다. 특히 수치 계산의 용이성을 위하여 두 개의 반 펄스 전개함수를 이용하였고 이를 이용한 모서리 처리법을 보여주었다. 모서리가 있는 각형 산란체의 경우 TM 편향일때는 모서리에서의 전류밀도가 거의 무한대이며, 주파수가 증가함에 따라 지향성이 나타남을 알 수 있었다.

참고 문헌

[1] Mogens G. Andreassen, "Scattering from Parallel Metallic Cylinders with Arbitrary Cross Section," IEEE, Trans. Antennas propagat.,

AP-12, 746-754, 1964

- [2] R. F. Harrington, Field Computation by Moment Methods, New York, Macmillan, 1968
- [3] J. Van Bladel, Electromagnetic Fields, Hemisphere Publishing Corporation, 1985
- [4] K. K. Mei and J. Van Bladel, "Scattering by perfectly conducting rectangular cylinder," IEEE, Trans. Antennas propagat., AP-11 No.2, 185-192, Mar., 1963