

시변 망각 인자를 사용하는 최소 자승 추정의 극점-배치 자기 동조 알고리즘에 관한 연구

박찬영 * 도미선 박민용 이상배
연세대학교 전자공학과

A Study on Reduced Variance Self-Tuning Algorithm Using a Variable Forgetting Factor

Park, Chan Young Do, Mi Sun Park, Mignon Lee, Sang Bae

ABSTRACT

된다.

pole assignment controller with variable forgetting factor is generalized to allow the output and/or input variance to be reduced. The algorithm can give significant reductions in variance for little extra computational effort and is presented for servo-tracking using least-squares estimation. Moreover, the use of a variable forgetting factor with correct choice of information bound can avoid 'blowing-up' of the covariance matrix of the estimates and subsequent unstable control.

랜덤하게 외란 되어지는 선형 단일 입력 단일 출력 (SISO) 시스템을 차분 방정식으로 나타내면 다음과 같다.

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})U(t-K) + C(z^{-1})e(t) \quad (2.1)$$

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}$$

$$B(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}$$

$$C(z) = 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_p z^{-p}$$

자기 동조 알고리즘의 제어방식은 극점 배치 제어 방법과 최소 분산 제어 방법 등이 있으나 파라미터 추정 방법은 매우 다양하다.

$A(z^{-1}), B(z^{-1}), C(z^{-1})$ 은 시간 지연 연산자 z^{-1} 에 대한 다항식이고 각 다항식의 차수는 n_a, n_b, n_c 로 나타낸다. 정수 K (≥ 1)는 시스템의 지연시간을 나타내고 $U(t), y(t), W(t)$ 를 프로세스의 입력, 출력, 기준신호로 표시하고 $e(t)$ 는 외란으로 작용하는 잡음 신호이다.

극점 배치 제어 방식은 비 최소 위상과 시변지연 시간에 적용할 수 있고 시스템 파라미터 변화에 대해 견실 (ROBUST) 하지만, 잡음에 대한 출력 분산이 증가하고 제어입력의 조절이 불가능하다는 단점이 있다. 본 연구에서는 극점 배치 제어 방법의 이런 문제점을 해결하기 위해, 제어가 파라미터를 구하는 단계에서 출력 분산에 대한 성능 지수를 최소화하는 제어가 파라미터를 구하고, 아울러 출력 분산을 감소 시킴에 따라 시스템 제어 입력의 분산이 증가 할 수 있으므로, 성능지수에 입력 분산도 포함시켜 다루었다. 또한 랜덤한 외란이 있는 시스템의 서보추적을 위해 과거 입력력 데이터 값에 가변적 가중치를 주는 최소 자승 추정기를 사용하였다. 프로세스의 각 스텝에 있어서 가중치 인자는, 추정기의 정보내용에 대한 스칼라양을 상수값으로 유지 시키도록 선택

제어 시스템의 디자인에는 프로세스 영점들을 소거함이 많이 쓰이는데 이는 프로세스가 불안정한 영점들을 갖을 때 적용되지 않을 것이다. 표본화 시스템의 영점들은 유동적이기 쉽고 K 스텝의 지연 시간을 모를 수도 있기 때문에 가장 신뢰할 수 있는 방법은 미리 지정된 지점에다가 추구하는 변이 응답과 최대 시스템 응답 비율에 따라 페루프 극점들을 배치 시키는 것이다.

제어하고자 하는 시스템 식 (2.1) 에 대해 설계

할 일반적인 제어기는 다음과 같은 구조를 갖는다.

$$H(z^{-1})U(t) = -E(z^{-1})W(t) - G(z^{-1})y(t) \quad (2.2)$$

(2.1)로부터의 페루프 출력은 다음과 같다.

$$y(t) = \frac{-EB}{AH + z^{-k}BG} W(t - k) + \frac{CH}{AH + z^{-k}BG} \quad (2.3)$$

(2.2)의 제어기 다항식 $H(z^{-1}), G(z^{-1}), E(z^{-1})$ 은 다음의 (2.13), (2.14)에서 구한다.

$$A(z^{-1})H(z^{-1}) + z^{-k}B(z^{-1})G(z^{-1}) = E_1(z^{-1})T(z^{-1}) \quad (2.4)$$

$$E(z^{-1}) = -E(z^{-1})R(z^{-1}) \quad (2.5)$$

다항식 $T(z^{-1}), E(z^{-1}), R(z^{-1})$ 은 미리 알고 있는 다항식이며 $T(z^{-1})$ 은 원하는 극점을 나타내고 $E_1(z^{-1})$ 은 상태공간 설계 방법에서 옵저버(observer) 극점에 해당하고 $R(z^{-1})$ 은 정상상태에서 $W(t)$ 에 대한 $y(t)$ 의 전달함수 이득이 1이 되게 하는 다항식이다. $A(z^{-1})$ 와 $B(z^{-1})$ 이 알려져있는 경우 제어기 다항식 $H(z^{-1})$ 와 $G(z^{-1})$ 이 식 (2.4)에서 유일해가 되기 위한 최소 차수는 다음과 같다.

$$n_H = n_B + k - 1, \quad n_G = n_A - 1 \quad (2.6)$$

여기서 $E_1(z^{-1})$ 과 $T(z^{-1})$ 의 차수는 $n_{E_1} + n_T = n_A + n_B + k - 1$ 로 제한 되어져야 한다. (2.3)과 (2.4)에서 구해진 $H(z^{-1})$ 과 $G(z^{-1})$, 그리고 $E_1(z^{-1}) = C(z^{-1})$ 을 사용하면 (2.3)은

$$y(t) = \frac{B(z^{-1})R(z^{-1})}{T(z^{-1})} W(t - k) + \frac{H(z^{-1})}{T(z^{-1})} e(t) \quad (2.7)$$

(2.4)에서의 방정식을 만족하는 최소차 다항식을 $H_0(z^{-1})$ 과 $G_0(z^{-1})$ 라고 하면 다음식이 성립한다.

$$A(z^{-1})H_0(z^{-1}) + z^{-k}B(z^{-1})G_0(z^{-1}) = E_1(z^{-1})T(z^{-1}) \quad (2.8)$$

식 (2.4)에서 (2.8)를 빼면

$$A(z^{-1})\{H_0(z^{-1}) - H(z^{-1})\} + z^{-k}B(z^{-1})\{G_0(z^{-1}) - G(z^{-1})\} = 0 \quad (2.9)$$

윗 식에서 제어기 다항식 $H(z^{-1}), G(z^{-1})$ 의 일반해는 다음과 같다.

$$G(z^{-1}) = G_0(z^{-1}) - A(z^{-1})F(z^{-1}) \quad (2.10)$$

$$H(z^{-1}) = H_0(z^{-1}) + z^{-k}B(z^{-1})F(z^{-1}) \quad (2.11)$$

다항식 $F(z^{-1})$ 은 차수가 n_F 인 임의의 다항식이고

$$n_H = n_B + k - 1, \quad n_G = n_A - 1 \quad (2.12)$$

제어기 다항식 $H(z^{-1})$ 와 $G(z^{-1})$ 에 대한 해들 중, 잡음에 대한 출력분산을 최소화 하는 다항식을 찾기로 한다. (2.7)에서 잡음에 대한 시스템 출력은

$$y(t) = \frac{H(z^{-1})}{T(z^{-1})} e(t) \quad (2.13)$$

잡음에 대한 시스템 출력분산을 $VAR[y]_{n_F}$ 라고 하면

$$VAR[y]_{n_F} = E\left\{ \frac{H_0(z^{-1}) + z^{-k}B(z^{-1})F(z^{-1})}{T(z^{-1})} e(t) \right\} \quad (2.14)$$

잡음에 대한 최적화된 제어기 다항식은 다음식을 만족해야 한다.

$$\partial \{ VAR[y] \} / \partial F_i = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n_F \quad (2.15)$$

(2.15)식을 정리하면, 잡음에 대한 시스템 출력 분산을 최소화 시키는 제어기의 다항식을 구해주는

다항식 $F(z^{-1})$ 의 계수를 구할 수 있다. 즉

$$E\left\{ \frac{z^{-k}B(z^{-1})F(z^{-1})}{T(z^{-1})} e(t) \right\} X \left\{ \frac{z^{-k}B(z^{-1})z^{-i}}{T(z^{-1})} e(t) \right\} / T(z^{-1})^2 = -E\left\{ \frac{H(z^{-1})}{T(z^{-1})} e(t) \right\} X \left\{ \frac{z^{-k}B(z^{-1})z^{-i}}{T(z^{-1})} e(t) \right\} \quad (2.16)$$

이 $F(z^{-1})$ 을 사용하면 시스템에 가해지는 제어입력의 분산을 증가시킬 수 있기 때문에, 시스템 제어 입력 분산 까지도 고려한 성능지수 $J_{n_F}(\alpha)$ 를 정의한다.

$$VAR(U)_{n_F} = E\left\{ \frac{G(z^{-1})}{T(z^{-1})} e(t) \right\}^2 \quad (2.17)$$

잡음에 대한 입력분산과 출력분산을 고려한 다항식 $F(z^{-1})$ 을 구하기 위하여 일반화된 성능지수 $J_{n_F}(\alpha)$ 는 다음과 같다.

$$J_{n_F}(\alpha) = VAR[y]_{n_F} + \alpha VAR[U]_{n_F} (\alpha > 0) \quad (2.18)$$

$$= E\left\{ \frac{H(z^{-1})}{T(z^{-1})} e(t) \right\}^2 + E\left\{ \frac{G(z^{-1})}{T(z^{-1})} e(t) \right\}^2 \quad (2.19)$$

입력과 출력의 분산 문제를 최적화 시키는 다항식 $F(z^{-1})$ 을 구하기 위하여 성능지수 $J_{n_F}(\alpha)$ 도 다음식을 만족시켜야 한다.

$$\partial \{ J_{n_F}(\alpha) \} / \partial F_i = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n_F \quad (2.20)$$

이것을 만족하는 최적화된 다항식 $F(z^{-1})$ 을 구하기 위하여 (2.20)을 정리하면

$$E\left\{ \frac{z^{-k}B(z^{-1})F(z^{-1})}{T(z^{-1})} e(t) \right\} X \left\{ \frac{z^{-k}B(z^{-1})z^{-i}}{T(z^{-1})} e(t) \right\} + \alpha E\left\{ \frac{A(z^{-1})F(z^{-1})}{T(z^{-1})} e(t) \right\} X \left\{ \frac{A(z^{-1})z^{-i}}{T(z^{-1})} e(t) \right\} = \alpha E\left\{ \frac{G_0(z^{-1})}{T(z^{-1})} e(t) \right\} X \left\{ \frac{A(z^{-1})z^{-i}}{T(z^{-1})} e(t) \right\} - E\left\{ \frac{H_0(z^{-1})}{T(z^{-1})} e(t) \right\} X \left\{ \frac{z^{-k}B(z^{-1})z^{-i}}{T(z^{-1})} e(t) \right\} \quad (2.21)$$

추정되어야 할 시스템 파라미터 다항식 $\mathcal{A}(z^{-1})$ 와 $\beta(z^{-1})$ 은 다음의 항등식에서 구해진다.

$$\mathcal{A}(z^{-1})H(z^{-1}) + z^{-k}\beta(z^{-1})G(z^{-1}) = T(z^{-1}) \quad (2.22)$$

여기서 $C(z^{-1})=1$ 이다. 또한 $n_{\mathcal{A}}=n_A, n_{\beta}=(n_B+k-1)$ 이다. (2.22)에다 $e(t)/T(z^{-1})$ 을 곱해주면

$$\frac{\mathcal{A}(z^{-1})H(z^{-1})}{T(z^{-1})} e(t) + z^{-k}\frac{\beta(z^{-1})G(z^{-1})}{T(z^{-1})} e(t) = e(t) \quad (2.23)$$

제어 입력은 (2.7)을 (2.2)에 대입해 구해진다. 즉

$$U(t) = \frac{-z^{-k}G(z^{-1})B(z^{-1})R(z^{-1})}{H(z^{-1})T(z^{-1})} W(t) - \frac{E(z^{-1})}{H(z^{-1})} W(t) - \frac{G(z^{-1})}{T(z^{-1})} e(t) \quad (2.24)$$

(2.23)에다 (2.7)의 $H(z^{-1})$ 와 $G(z^{-1})$ 이 주어지면 $\mathcal{A}(z^{-1})$ 와 $\beta(z^{-1})$ 이 구해진다. 다항식 $M(z^{-1})$ 과 $N(z^{-1})$ 을 정의해보자.

$$M(z^{-1}) = \mathcal{A}(z^{-1}) + z^{-k}G(z^{-1}) \quad (2.25)$$

$$N(z^{-1}) = H(z^{-1}) - \beta(z^{-1}) \quad (2.24)$$

양변에 $C(z^{-1})$ 을 곱해주고, (2.4)에서 빼주면

$$H(z^{-1})(A(z^{-1}) - M(z^{-1})C(z^{-1})) + z^{-k}G(z^{-1})(z^{-k}B(z^{-1}) + N(z^{-1})C(z^{-1})) = 0 \quad (2.25)$$

$H(z^{-1})$ 과 $G(z^{-1})$ 은 다음과 같이 구해지게 된다.

$$H(z^{-1}) = \frac{z^{-1} B(z^{-1}) + N(z^{-1})C(z^{-1})}{r} \quad \text{---(2.27)}$$

$$G(z^{-1}) = \frac{z^{-1} M(z^{-1})C(z^{-1}) - A(z^{-1})}{r} \quad \text{---(2.28)}$$

여기서 r 은 임의의 상수이다. (2.24)의 $N(z^{-1})$ 을 (2.27) 에 대입하면

$$(z^{-k+1}\beta(z^{-1}) - C(z^{-1})\beta(z^{-1})) = r(z^{-1})H(z^{-1}) - H(z^{-1})C(z^{-1}) = -H(z^{-1})C'(z^{-1}) \quad \text{---(2.29)}$$

$$C'(z^{-1}) = C(z^{-1}) - r(z^{-1}) \quad \text{---(2.30)}$$

(2.29)를 (2.22) 에 대입하면

$$\mathcal{A}(z^{-1})y(t) = \beta(z^{-1})u(t-1) + (-c'(z^{-1})w'(t-1) + e(t)) \quad \text{---(2.30)}$$

$$w'(t) = R w(t) \quad \text{---(2.31)}$$

(2.5) 의 정의에 의해

$E(z^{-1}) = (-C'(z^{-1})R(z^{-1}) - rR(z^{-1}))$ 이라 하면 r 을 1로 할 때

$$E(z^{-1}) = -(C'(z^{-1}) + 1)R(z^{-1}) \quad \text{---(2.33)}$$

(2.31)의 $e(t)$ 는 입출력 데이터와 상관 관계가 없으므로 $\mathcal{A}(z^{-1}), \beta(z^{-1})$ 그리고 $C'(z^{-1})$ 의 파라미터들은 보통의 최소 자승 추정방법에 의해 추정 되어질 수 있고, 그 추정값은 (2.22) 와 (2.33) 을 사용하여 재 여기 다항식 $H(z^{-1}), G(z^{-1})$, 그리고 $E(z^{-1})$ 을 구하는데 사용 되어진다.

$R(z^{-1})$ 은 $y(t)$ 의 $w(t)$ 에 대한 전달함수의 정상 상태 이득을 1로 유지시키도록 온라인 으로 조정되어 지는 스텔라값이다.

3. 제안된 시변 망각 인자

적응 제어기의 주된 특성은 프로세스 다이내믹스에서의 변위량을 추적하는 능력이며, 그 능력을 성취하기 위해서는 과거의 데이터를 망각하여야 한다. 너무 빠르게 데이터를 망각하게 되면 실제 파라미터가 상수일 때 그의 추정치를 불확실하게 만들것이다. 너무 느리게 망각되면 빠른 파라미터 변화를 추적하기가 불가능하게 된다. 파라미터 추정에는 여러 방법이 있으나 최소 자승 추정 방법을 썼을 때 그 추정과 정방향 지표(Quadratic Index)의 수렴비율이 가장 최적성을 나타내고 확률적 적응 추적과 극점 배치 문제에 쓰일 수 있다. (2.1)의 시스템 다이내믹스에서의 순환 최소 자승 추정은 다음과 같다.

$$\theta(k+1) = \theta(k) + P(k+1)\phi(k+1)\epsilon(k+1) \quad \text{---(3.1)}$$

$$P(k+1) = [P(k) - P(k)\phi(k)R(k)\phi^T(k)P(k)]/\lambda \quad \text{---(3.2)}$$

$$R(k) = [\lambda + \phi^T(k)P(k)\phi(k)]^{-1} \quad \text{---(3.3)}$$

θ 는 추정되어질 파라미터들의 벡터이고 ϕ 는 입력력값의 벡터이며 ϵ 는 예측오차이다. 지수함수적인 망각함수는 프로세스가 항상 적당하게 Excited 될 때만 잘 적용되는데 Excitation의 주된 요인이, 기준신호에 잘의 변화가 없이 긴 시간동안 지속될 때, 추정기는 과거 데이터를 망각해 갈 것이고, 따라서 파라미터들의 불확실성은 증가할 것이다. 이것것을 추정기 과도 응답 (Estimator Wind-Up) 이라 한다. (3.2) 의 우변의 음의 항은 가장 최근의 측정치에 의한, 불확정성의 감소함을 나타낸다. 만약 최근의 측정치에서 아무런 데이터가 없다면 $P(k), Q(k)$ 가 0이 될것이므로 (3.2) 는 다음과 같다.

$$P(k+1) = P(k)/\lambda \quad \text{---(3.4)}$$

인가 $\lambda < 1$ 의 상수값이라면 ϕ 가 변할 때까지 $P(k)$ 는 지수적으로 증가할 것이다. 만약 긴 시간동안 아무런 Excitation 이 없다면 $P(k)$ 는 대단히 큰 값이 되어 있을 것이다. $P(k)$ 는 (3.1)에서의 이득이기 때문에 새로운 입출력 데이터가 시스템내로 들어 왔을 때, 추정된 파라미터에는 커다란 변화가 있을 것이다. 그래서 Estimator Wind-Up 은 프로세스의 출력에서 엄청나게 증폭된 값을 초래하게 된다.

추정기에서 예측오차가 작으면 파라미터 오차를 크게 감소시키기에 충분할 만큼 민감하다는 것이고, 오차가 크다면, 작은 망각인자를 선택하여 추정기를 민감하게 함으로써 파라미터들이 재조정되어, 오차가 보다 작아질때까지 추정기의 실제 메모리 길이를 단축시킬 것이다. 이들에 근거하여 예측오차의 자승가중치를 함으로서 필터의 정보량 기준치를 정의할 수 있다.

$$S_N = \sum_{k=0}^N \lambda^{N-k} (\epsilon(k))^2 = \lambda S_{N-1} + (1 - \phi_N^T K_N) \epsilon_N^2 \quad \text{---(3.5)}$$

여기서 $\epsilon(k) = y_k - \phi_k^T \hat{\theta}_k$, $K_N = P_N^T \phi_N$

망각인자를 선택하는 방법은 S_N 을 다음과 같이 유지하도록 정되어 진다. 즉 망각량은 매 샘플에서 최근의 측정에서의 새로운 데이터 양에 상당한다는 것이다. 따라서 접근적 샘플길이 $N(t)$ 는

$$N(t) = 1 / (1 - \lambda(t)) \quad \text{---(3.6)}$$

로 되고 (3.7)에서

$$N(t) = 1 / (1 - \lambda(t)) = S_0 / (1 - \phi(t-k)^T K(t)) \epsilon(t)^2 \quad \text{---(3.7)}$$

$$\lambda(t) = 1 - [1 - \phi(t-k)^T K(t)] \epsilon(t)^2 / S_0 \quad \text{---(3.8)}$$

S_0 는 오차의 자승합에 연관되었기 때문에

$$S_0 = \sigma_0^2 N_0 \quad \text{---(3.9)}$$

는 프로세스의 실제 정보에 근거한 측정잡음 분산 값이다. 시스템의 민감성은 N_0 의 선택에 의해 결정되어 지는데 작은값의 N_0 는 큰 공분산 행렬 $P(k)$ 와 예민한 시스템을 만들어 주고 큰 값의 N_0 는 덜 민감한 추정기와 보다 느린 적응을 하게 해준다.

4. 결과 및 고찰

입력분산을 최소화하기 위한 가중치 = 100 이고 1500 샘플까지 프로세스를 시뮬레이션하였다. 1 ~ 300 샘플까지 시스템 1로 301 ~ 800 샘플까지 시스템 2로 801 ~ 1500 샘플까지는 시스템 3으로 변화하게 하였다. 시스템 파라미터 추정과정에서 시변 망각인자가 사용 되면 잘 적응함을 알 수 있다. 정상 상태 동작 중에는 매우 긴 근사적 메모리 길이를 갖는 가중치 최소-자승 추정기와 같이 추정 알고리즘이 동작하여 프로세스 다이내믹스의 느린 변화를 따라가고 모델에 측치와 플랜트 측정치간의 오차량이 있는한 보다 낮은 값으로 감소되어진다. 모델 파라미터들이 그의 새로운 값으로 수렴하고 예측(Prediction)이 항상 되어지면 망각 인자는 1에 가까운 값으로 복구되어진다

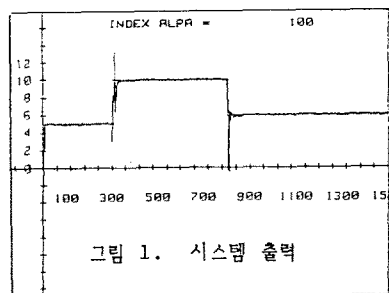


그림 1. 시스템 출력

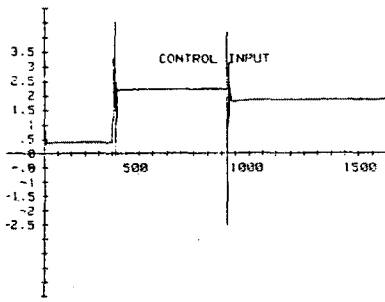


그림 2. 제어 입력

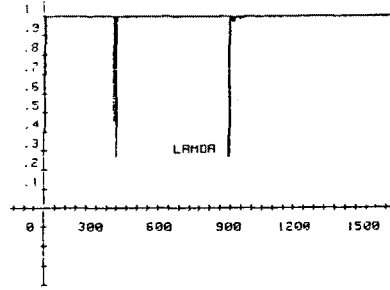


그림 5. 시변 망각인자 λ

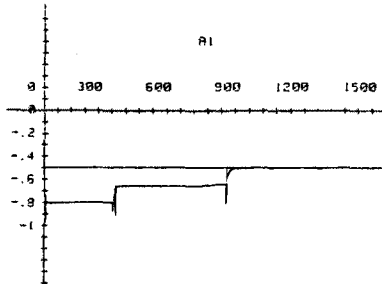


그림 3. 시스템 파라미터 a_1

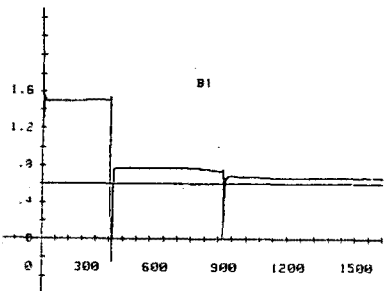


그림 4. 시스템 파라미터 b_1

5. 결론

시변 망각인자를 사용한 분산감소 극점배치 자기 동조 알고리즘이 제안되었다. 시변 망각인자를 가진 추정기는, 비선형 플랜트나 부하에서의 갑작스런 변화에 따른 Set-point 변화 동안에 일어날 수도 있는 프로세스 동역학에 있어서의 돌발적 변화를 따라갈 수 있게 해준다. 따라서 이 제어 알고리즘은 제어 상수들의 주기적인 재 동조를 요구하는 플랜트의 특 급레이션에도 적합할 것이다. 그러나 S_0 는 σ^2 의 값에 큰 영향을 받게 되므로 잡음의 외란 비율과 수렴성, 그리고 안정성 확보를 신중히 고려 할 필요가 있다.

참고 문헌

1. Clark, D.W., and Gawthrop, p.j., "Self-Tuning Controller", Proc. IEE, 1975, 122, (9), pp 929 - 934
2. Fortescue, T.R. and L.S. Kershenbaum and B.E. Ydstie, "Implementation of Self-tuning regulators with variable forgetting factors", Automatica, 17 pp. 831 - 835
3. A.Y. Allidina and H. Yin, "Explicit pole-assignment self-tuning algorithms", Int. J. Control, Vol. 42, No. 5, pp 1113 - 1130, 1985
4. M.J. Chen and J.P. Norton, "Estimation technique for tracking rapid parameter changes", Int. J. Control, Vol. 45, No. 4, pp. 1387 - 1398, 1987
5. R.J. Aström and B. Wittenmark, "Self-tuning Controllers based on pole-zero placement", IEE Proceedings, Vol. 127, Part D, No. 3, 1980
6. 한병환, "최소자승 추정에 의한 분산감소 자기동조 알고리즘", 연세대학교 대학원, 1986