

새로운 샘플링 방법을 이용한 불완전한  
데이터로부터 영상 재구성

정병문 박길품 하영호  
경북대학교 전자공학과

Image Reconstruction from Incomplete Data  
using a New Sampling Scheme

Byung-Moon Jung, Kil-Hoim Park and Yeong-Ho Ha  
Department of Electronics, Kyungpook National University

Abstract

Recently, an iterative reconstruction-reprojection (IRR) algorithm has been suggested for application to incomplete data computed tomography (CT). In the IRR, the interpolation operation is performed in the image space during reconstruction-reprojection. The errors associated with the interpolation degrade the reconstructed image and may cause divergence unless a large number of rays is used.

In this paper, we propose an improved IRR algorithm which eliminates the need for interpolation. The proposed algorithm adopts a new sampling scheme in which samples (projection data) is taken in phase with the samples of the Cartesian grid.

I. 서론

영상 재구성 분야에서는 제한된 투영각이나 물체 내부의 방해물로 인해서 불완전한 투영 데이터가 발생할 수 있다. 이와같은 문제를 해결하기 위한 연구가 진행되고 있다. 그중 반복적인 재구성-재투영법 (IRR) [1-4] 을 이용한 영상 재구성법이 가장 널리 이용된다. 반복적인 재구성-재투영법은 Papoulis 의 외삽법 [5] 에 근접한 방법으로 물체에 대한 선험적 정보를 갖고, 영상 공간과 투영 공간사이를 오가면서 원래 영상에 근접해가는 방법이다.

기존의 반복적인 재구성-재투영법 에서 사용한 샘플링 방법은 모든 투영각에 대해서 일정한 샘플링을 함으로써 우리가 관심을 가지는 화소의 중앙점을 반드시 지나가지않는 주사가 이루어 진다. 이와같은 샘플링으로 인해 재구성과 재투영 과정에서 반드시 내삽을 필요로 하게된다. 그러므로 기존의 반복적인

재구성-재투영법은 내삽의 오차가 반복시 누적됨에 따라 원래 영상에 근접한 영상을 재구성할 수 없다.

본 논문은누적되는 내삽의 오차를 없애기 위하여 내삽을 필요로 하지않는 새로운 샘플링 방법을 도입한 개선된 반복적인 재구성-재투영법을 제안한다. 새로운 샘플링 방법은 투영 데이터 수집과정과 영상 재구성-재투영 과정에 대해서 Cartesian grid 와 동상의 관계를 유지해 줌으로써 기존의 방법에서 발생하는 내삽과정을 필요로하지 않게된다. 이와같은 샘플링 방법은 Cartesian grid 의 기하학적 구조로부터 유도되어 진다. 개선된 반복적인 재구성-재투영법은 영상 재구성시 최대 엔트로피 방법 [6] 을 사용하였고, 투영 데이터를 얻는 과정과 재투영 과정에서는 내삽이 불필요한 샘플링 방법을 사용하여 누적되는 내삽의 오차를 없애줌으로써 원래 영상에 더 근접한 영상을 얻을 수 있다. 특히 제안한 방법에 의해 재구성된 영상은 경계선 부분이 잘 보존된다.

II. 새로운 샘플링 방법

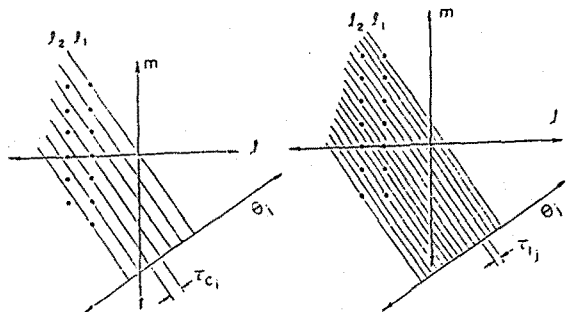


그림 1. 정수 좌표계 (행에 대한 샘플링)

정수 좌표계  $\ell$  과  $m$  을 가지는 Cartesian grid 의 영상  $f(x,y)$  를 생각 해 보자.

$$f_s(l, m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau, y) \delta(x-l, y-m) dx dy \quad (1)$$

식 (1) 에서 우리가 관심을 가지는 영상점은 좌표축 위에서 정수값  $l$  과  $m$  을 가지는 점이다.

모든 정수  $l$  과  $m$  에 대한 샘플링률은 식 (2) 와 같이 주어진다.

$$kx_i = l \cos \theta_i + m \sin \theta_i \quad (2)$$

식 (2) 가 주어진 투영각에 대해서 만족하기 위해서는 Cartesian grid ( $l, m$ ) 의 모든 점이  $t$  축에 균등하게 투영되어야 한다. 이러한 조건은 하나의 고정된 행에 대해 그림 (1) 에서 보는바와 같이 균등하게 나타난다. 고정된  $l$  을 가지는 행의 주기성에 대해 두 개의 연결된 화소점 사이에서 식 (2) 에 의해 실제 샘플링 주기률 식 (3) 과 같이 얻을 수 있다.

$$r_{c_i} = \sin \theta_i \quad (3)$$

그러므로 기본 간격  $\tau_{c_i}$  에 의해 동일 간격을 가지는 샘플의 간격을 식 (4) 와 같이 얻을 수 있다.

$$\tau_{(nc)_i} = \frac{\tau_{c_i}}{(nc)} \text{ for } nc = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

여기서  $nc$ 는 고정된  $l$  을 가지는 하나의 행에 대해  $t$  -인접한 영상점 사이의 샘플링 간격의 수를 나타낸다. 마찬가지로 고정된  $m$  에 대해서 그림 (2) 에서와 같이 인접한 두 열사이의 영상점에 대해 기본 간격과 샘플링 간격은 다음과 같다.

$$\tau_{r_i} = \cos \theta_i \quad (5)$$

$$\tau_{(nr)_i} = \frac{\tau_{r_i}}{(nr)} \text{ for } nr = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

여기에서  $nr$  은 고정된  $m$  을 가지는 하나의 열에 대해 두 인접한 영상점 사이의 샘플링 간격의 수를 나타낸다.

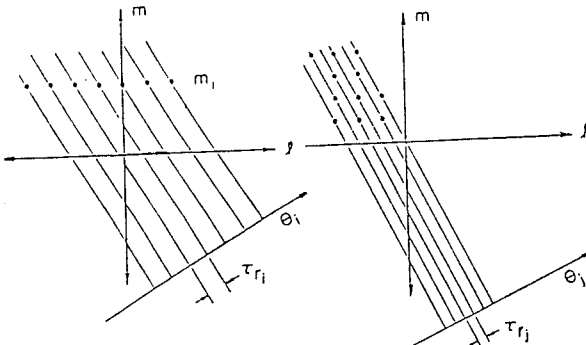


그림 2. 정수 좌표계 (열에 대한 샘플링)

쌍봉 샘플링 주기를 가지도록 식 (4)를 식 (6)으로 나누면 다음과 같다.

$$\frac{nc}{nr} = \tan \theta_i \quad (7)$$

그러므로 내삽이 필요없는 샘플링 조건은 정수값을 가지는  $nr$  과  $nc$  에 대해서 식 (8) 과 같이 주어진다.

$$\theta_i = \tan^{-1} \left( \frac{nc}{nr} \right) \quad (8)$$

주어진  $nr$  과  $nc$  를 이용해서  $\theta_i$  에 대한 샘플링 주기  $t_i$  를 구해보면 다음과 같다.

$$t_i = \frac{1}{\sqrt{(nr)^2 + (nc)^2}} \quad (9)$$

이제 재구성-재투영 하기 위한 샘플의 수를 생각해보자. grid 가  $x$  방향으로  $L$ ,  $y$  방향으로  $M$ 으로 제한되어 있다면 각 투영당 필요한 샘플의 수는 식 (10) 과 같이 나타낼 수 있다.

$$N = nr(M-1) + nc(L-1) + 1 \quad (10)$$

### III. 반복적인 재구성-재투영법

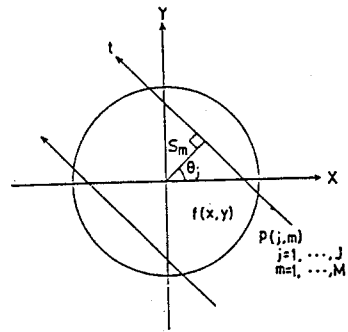


그림 3. 병렬 광선 구조

그림 (3) 에서  $j$  번째 투영각,  $m$  번째 광선의 투영 데이터  $P(j, m)$  은 식 (11) 과 같다.

$$P(j, m) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \cdot f(s_m \cdot \cos \theta_j - t \cdot \sin \theta_j, s_m \cdot \sin \theta_j + t \cdot \cos \theta_j) \quad (11)$$

여기서  $t$  는 광선의 진행 방향,  $s_m$  는 원점에서 광선까지의 거리, 는  $j$  번째 투영각이다.

물체 함수  $f$  의 엔트로피는 식 (12) 와 같이 주어진다.

$$\eta(f) = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \cdot f(x, y) \cdot \ln [f(x, y) \cdot S] \quad (12)$$

여기서  $S$  는 물체의 횡단면적 (cross sectional area)이다. 최대 엔트로피 방법은 식 (11)을 조건으로 식 (12)를 최대화하는 물체 함수  $f$  를 찾는 방법이다. 이와같은  $f$  를 찾기위해 Lagrange multiplier 방법을 이용한다. 먼저 제한조건에 Lagrange multiplier 를 도입하여 Lagrangian  $\Psi$  를 식 (13)과 같이 나타낸다.

$$\Psi(f, \Lambda) = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \cdot f(x, y) \cdot \ln [f(x, y) \cdot S] - \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^M \Lambda(j, m) \cdot [P(j, m) - \int_{-\infty}^{+\infty} dt \cdot f(s_m \cdot \cos \theta_j - t \cdot \sin \theta_j, s_m \cdot \sin \theta_j + t \cdot \cos \theta_j)] \quad (13)$$

여기서  $J$ 는 투영각의 수,  $M$ 은 광선의 수를 나타낸다. 식 (13)을 최대화하는  $f$  를 구하기 위해  $\partial f / \partial \Psi = 0$  를 만족하는  $f$  를 구하면 식 (14)와 같다.

$$f(x, y) = S^{-1} \prod_{j=1}^J \sum_{m=1}^M H(j, m) \cdot x_{jm}(x \cdot \cos \theta_j + y \cdot \sin \theta_j), \quad (14)$$

where

$$H(j, m) = \exp \left[ \Lambda(j, m) - \frac{1}{j} \right]$$

$$x_{jm}(x \cdot \cos \theta_j + y \cdot \sin \theta_j) = \begin{cases} 1, & \text{for } s_m = x \cdot \cos \theta_j + y \cdot \sin \theta_j \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$x_{jm}$  은  $s_m$  점에서의 특성 함수이다.

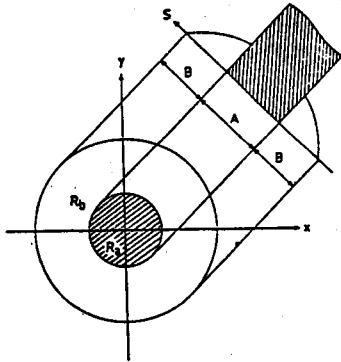


그림 4. 불투명한 방해물이 존재하는 경우  
A: 투영 공간에서 방해물이 존재하는 영역  
B: 다른 영역

계수  $H(j, m)$  은 식 (14)를 식 (11)에 대입하므로써 얻어진다. 먼저 모든  $j, m$  에 대해서  $H^0(j, m) = 1$  로 초기화한 다음 반복시 새롭게 한다.

$$H^{i+1}(j, m) = \frac{S \cdot P(j, m)}{\int_{-\infty}^{+\infty} dt \prod_{k \neq j} \sum_n H^i(k, n) x_{kn}(s_n \cdot \cos \theta_k - t \cdot \sin \theta_k)} \quad (15)$$

여기서  $\theta_{ik} = \theta_j - \theta_k$ ,  $i$  는 반복횟수이다. 투영 데이터가 완전할때 식 (15)로 부터  $H(j, m)$  을 반복적으로 계산하여 식 (14) 로 부터 결함없는 영상  $f(x, y)$  를 구할 수 있다. 그러나 물체 내부의 방해물로 인해 투영 데이터가 불 완전한 경우 잃어버린 데이터의 추정이 필요하다. 투영 데이터가 물체 내부의 방해물로 인해 불완전한 경우를 그림 (4) 에 나타내었다. 이와같은 경우 잃어버린 데이터의 추정은 하나의 투영각에서 잃어버린 정보를 다른 투영각들에서 얻는데 기초를 두고있다. 잃어버린 데이터의 추정을 위해서는 반복적인 재구성-재투영 과정이 필요하다. 원래 영상  $f$  를 추정하기위해 알고있는 투영 데이터  $R_k$  와 초기에 가정되는 미지의 투영 데이터  $P_0^i$  를 가지고 시작한다. 초기에는 물론  $H$  를 1로 두고,  $P_0^i$  는 임의의 상수로 둔다. 이때 초기 영상  $f^i$  는 식 (14)와 (15)로 부터 추정된다.

$$f^i(x, y) = \begin{cases} f^i(x, y), & (x, y) \in R_0 \\ C_0, & (x, y) \in R_1 \\ 0, & (x, y) \in \bar{R}_0 \cup \bar{R}_1 \end{cases} \quad (16)$$

이러한 초기 재구성된 영상  $f^i$  으로 부터 미지의 투영 데이터  $P_0^i$  은 Joseph 이 제안한 재투영 방법 [7] 을 이용함으로써 식 (17) 과 같이 얻어진다.

$$P_0^i = \begin{cases} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx}{|\sin \theta|} & \text{for } |\cos \theta| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy}{|\cos \theta|} & \text{for } |\cos \theta| > \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (17)$$

이와같은 재투영 방법은 정방화소법보다 계산이 훨씬 편리함을 알 수 있다.

새로이 추정된  $P_0^i$  와 알고있는 데이터  $R_k$  를 이용하여 전체 투영 데이터  $P_{kw}^2$  를 식 (18) 과 같이 얻을 수 있다.

$$P_{kw}^i = \begin{cases} P_0^i(s, \theta) & (s, \theta) \in A \\ P_k(s, \theta) & (s, \theta) \in B \end{cases} \quad (18)$$

전체 투영 데이터  $P_{kw}^2$  를 이용하여 다음 추정 영상  $f^2$  를 식 (14)와 (15)로 부터 계산해낼 수 있다. 이와 같은 방법을 반복하므로써 원래 영상  $f$  를 재구성할 수 있다.

#### IV. 실험

그림 (5) 와같은 시험 phantom 을 가지고 제안한 반복적인 재구성-재투영법과 기존의 반복적인

재구성-재투영법에 적용시켜 비교해 보았다. 64x64 화소들로 구성된 영상에서 32 개의 투영각, 128 개의 광선을 이용하였다. 제안된 방법에서 사용한 광선의 수는 표 1. 과 같다. 재구성된 영상의 성능을 비교해보기 위하여 아래와 같이 정의된 distance 로써 검토하였고, 특히 경계선 부근의 재구성 상태를 비교해보기 위하여 9 번째 열의 단면을 조사하였다.

$$distance = \left[ \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} |f_{ij} - \hat{f}_{ij}|^2 / \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} |f_{ij} - \bar{f}|^2 \right]^{1/2}$$

여기서  $\hat{f}_{ij}$  는 재구성된 영상의 화소값,  $f_{ij}$  는 원래 영상의 화소값,  $\bar{f}$  는 원래 영상의 평균값, 그리고 NP 는 화소의 수이다.

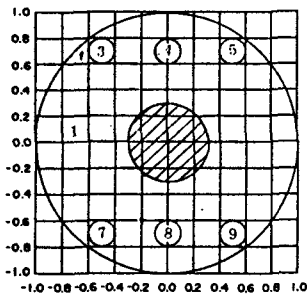


그림 5. 시험 phantom

표 1. 새로운 샘플링에 의한 광선의 수

투영각도 ( $\theta$ )	기울기 (nc/nr)	광선의 수
0.00	0	64
5.71	1/10	321
11.31	1/5	264
16.70	3/10	327
21.80	2/5	144
28.30	7/13	344
33.69	2/3	230
39.80	5/6	320
45.00	1	91

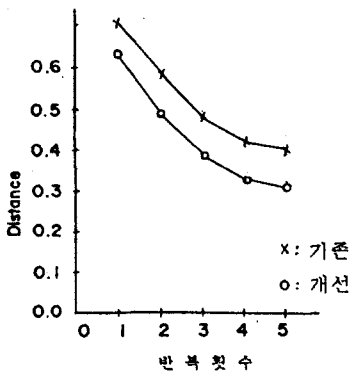
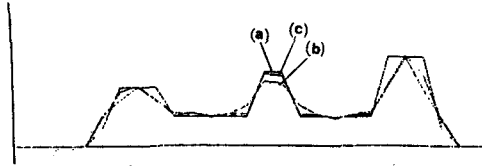


그림 6. 시험 phantom 에 대한 distance



(a) 원래 영상  
(b) 기존의 반복적인 재구성-재투영법  
(c) 개선된 반복적인 재구성-재투영법  
그림 7. 9 번째 열에 대한 단면도

그림 (6) 의 distance 에서 나타낸 바와같이 제안한 방법으로 재구성한 영상이 내삽에 의한 오차가 없으므로 원래 영상에 훨씬 더 근접함을 알 수 있다. 또한 제안한 방법은 화소의 중앙점을 지나게 샘플링해줌으로써 명암도 차가 급격히 변하는 경계선 부분이 잘 보존됨을 9 번째 열의 단면을 나타낸 그림 (7) 에서 알 수 있다.

V. 결론

개선된 반복적인 재구성-재투영법이 제안 되었다. 제안된 방법은 기존의 방법과 반복과정은 동일하나 내삽의 오차를 없애기 위해 새로운 샘플링 방법을 도입 하였다. 실험을 통하여 제안한 방법이 기존의 방법보다 우수함을 알 수 있었다.

VI. 참고 문헌

- [1] K.H.Park, S.B.Park, "Maximum Entropy Image Reconstruction for an Object with Opaque Obstructions,"IEEE Trans.Med.Imaging, vol.MI-6, pp.308-312, Dec.1987.
- [2] J.H.Kim, K.Y.Kwak, S.B.Park, and Z.H.Cho, "Projection Space Iteration Reconstruction-Reprojection,"IEEE Trans.Med.Imaging vol.MI-4, pp.139-143,Sept.1985.
- [3] J.S.Choi, K.Ogawa, M.Nakajima, and S.Yuta, "A Reconstruction Algorithm of Body Sections with Opaque Obstructions,"IEEE Trans.Sonics Ultrason., vol.SU-29, pp.143-150, May 1982.
- [4] K.Ogawa, M.Nakajima, and S.Yuta, "A Reconstruction Algorithm from Truncated Projections," IEEE Trans.Med. Imaging vol. MI-3, pp.34-40, March 1984.
- [5] A.Papoulis, Signal Analysis, New York:Mcgraw-Hill,1977, pp.243-248.
- [6] G.Minerbo, "MENT : A maximum entropy algorithm for reconstructing a source from projection data,"Comput.Graphics Image Processing, vol.10, pp.48-68,1979.
- [7] P.M.Joseph, "An Improved for Reprojecting Rays Through Pixel Images,"IEEE Trans.Med.Imaging, vol.MI-1, pp.192-196, Nov. 1982.