

길쌈부호의 부등 오류 특성 및 그 응용

이수인, 이상근, 문상재

경북대학교 전자공학과

Unequal Bit - Error - Probability of Convolutional codes and its Application

Soo In Lee, Sang Gon Lee, Sang Jae Moon

Dep. of Electronics, Kyungpook National Univ.

Abstract

The unequal bit-error-probability of rate  $r=b/n$  binary convolutional code is analyzed. The error protection afforded each digit of the  $b$ -tuple information word can be different from that afforded other digit. The property of the unequal protection can be applied to transmitting sampled data in PCM system.

I. 서론

그림1의 부호율  $r=b/n, b \geq 2$  인 길쌈부호에서 Viterbi 복호법에 의한 비트오율은 부호기에 입력되는 정보비트의 위치에 따라 각각 다른 오율을 가진다. 이러한 비트별 부등오류 제어 특성을 통신 하고자 하는 정보비트가 지나는 중요도가 다른 경우에 이용하여 채널오류에 의한 영향을 효과적으로 줄일 수 있다.

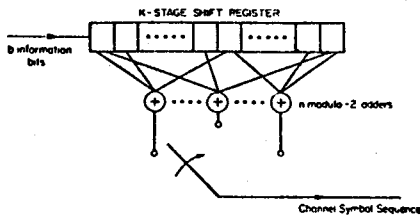


Fig.1. Rate  $r=b/n$  binary convolutional encoder

본 논문에서는 이러한 부등오류제어 특성을 소개하고 이를 DPCM 부호화된  $b$  비트의 정보벡터에 적용해서, 채널 오류에 의해 발생하는 평균자승오차를 최소로 하는 새로운 몇가지 길쌈부호를 발굴하여 자유거리 (free distance)  $d_f$  를 최대로 하는 부호와 비교하여 보았다.

II. 길쌈부호의 부등오류 제어

비트오율  $\epsilon$  을 cross-over 확률로 갖는 이진대칭채널 (BSC) 에서 Viterbi 복호법에 대한 길쌈부호의 평균 비트오율의 상한 (upper bound) 을 전달함수  $T(D, I)$  로 부터 구할수 있다 [1] [2].

$$P_b \leq \frac{1}{b} \left[ \frac{\partial}{\partial I} T(D, I) \right]_{I=1, D^d = P_d} \quad (1)$$

여기서

$$P_d = \begin{cases} \sum_{k=\frac{d+1}{2}}^d \binom{d}{k} \epsilon^k (1-\epsilon)^{d-k} & d : \text{odd} \\ \sum_{k=\frac{d}{2}}^d \binom{d}{k} \epsilon^k (1-\epsilon)^{d-k} + \frac{1}{2} \binom{d}{\frac{d}{2}} \epsilon^{\frac{d}{2}} (1-\epsilon)^{\frac{d}{2}} & d : \text{even} \end{cases} \quad (2)$$

부호율  $r=b/n, b \geq 2$  이면 길이가  $b$  인 벡터  $(i_1, i_2, \dots, i_b)$  가 때 시점마다  $i_1, i_2, \dots, i_b$  의 순서로 부호기에 입력 한다고 볼수 있다. Trellis diagram에서 한 오류경로를 발생시키기 위해 입력된 정보비트들 가운데 "1"의 갯수를  $m$  이라 하자. 그러면 입력된 여러 벡터  $(i_1, i_2, \dots, i_b)$  가운데서 "1"을 갖는 정보비트의 수가  $m$ 이지만, 이들 중에서 보다 자주 "1"이 되는 비트들이 있다. 그러나 식 (1)에서의 평균비트오율은 이러한 점을 고려하지 않았다.

그림2는  $r=2/3, L=4, G=(7, 15, 5)$  인 부호의 trellis diagram 이다. 여기에서 상태 (00) 에서 상태 (01)로 변하는 가지의 010/10는 입력벡터 (10), 출력벡터 (010)을 의미한다.

그림2에서 자유거리  $d_f=3$ 이다. 확실적으로 hamming weight 가  $d_f$  인 오류가 가장 잘 발생하게 되는데, 이 경우에 입력 정보벡터는 (01) (00) 이므로 입력정보벡터의 두 비트에 대한

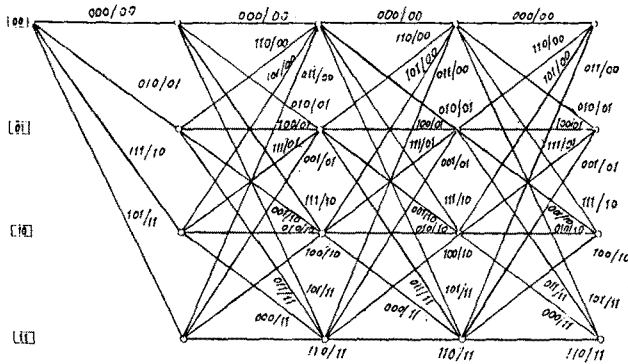


Fig. 2. Trellis diagram of the r=2/3, L=4 code

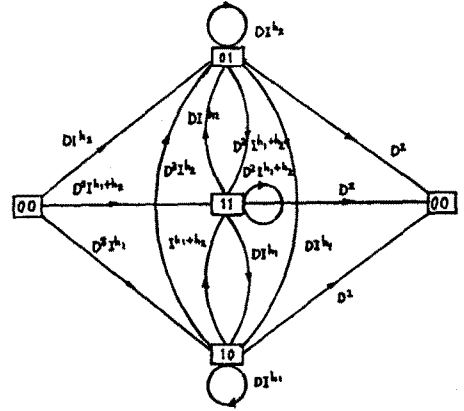


Fig. 3. State diagram of the r=2/3, L=4 code

오류발생빈도가 다르다는 것을 알 수 있다. 일반적으로 임의의 오류경로에서 이 오류경로를 발생시키기 위해서 입력될 정보벡터  $(i_1, i_2, \dots, i_b)$ 의 비트열 가운데서 k번째 위치의 정보비트  $i_k$ 가 "1"이 되는 것은 k에 따라서 다르다.

Hamming weight가 d인 경로의 해당 입력정보 비트열에서 정보비트  $(i_1, i_2, \dots, i_b)$ 의  $i_k$ 에 대응하는 비트가 "1"인 것을 t라 두고, 이러한 오류경로수를  $A(d, t; k)$ 로 표시하도록 한다. 여기서  $d \geq d_p$ ,  $t \geq 1$ ,  $1 \leq k \leq b$ 임을 알 수 있다. 그림2의 trellis diagram에서  $A(d, t; k)$ 를 구해보면 표1과 같다.

Table 1.  $A(d, t; k)$  of the r=2/3, L=4 code

t	k	$A(d, t; k)$			
		d=3	d=4	d=5	d=6
1	1	-	2	4	4
	2	1	2	3	4
2	1	-	1	5	9
	2	-	2	6	11
3	1	-	-	3	12
	2	-	-	4	16
4	1	-	-	1	9
	2	-	-	-	8
5	1	-	-	-	4
	2	-	-	-	-
6	1	-	-	-	1
	2	-	-	-	-

입력정보비트의 k번째 위치에 해당되는 정보비트의 오울을 구하면 [3]

$$P_b(k) \leq \sum_{d=d_p}^b \sum_{t=1}^b t \cdot A(d, t; k) \cdot P_d \quad (3)$$

$$P_b = \frac{1}{b} \sum_{k=0}^b P_b(k) \leq \frac{1}{b} \sum_{d=d_p}^b P_d \sum_{k=1}^b \sum_{t=1}^b t \cdot A(d, t; k) \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^b i \cdot A(d, i) = \sum_{k=1}^b \sum_{t=1}^b t \cdot A(d, t; k) \quad (5)$$

인 관계를 갖는다.

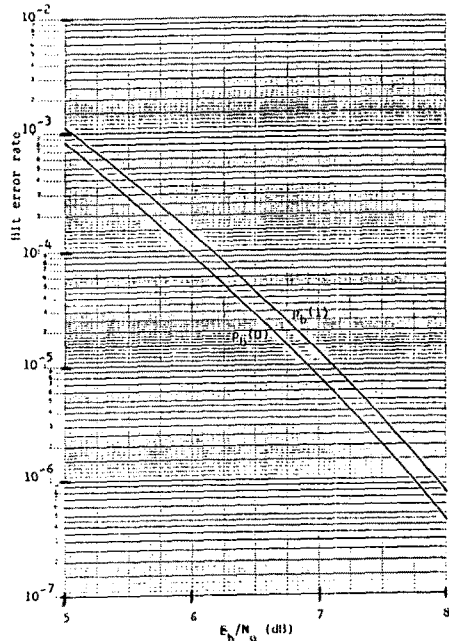


Fig. 4. Unequal error rates of the r=2/3, L=4 convolutional code

식 (3)의  $P_b(k)$ 는 전달함수로부터 구할 수 있다. 상태도 구성시에 I의 역수기호에 변수  $h_1, h_2, \dots, h_b$ 를 사용하여 비트별 "1"의 수를 표시하도록 한다. 그림3은 r=2/3, L=4 G=(7, 16, 5) 부호에 대한 상태도이다.

그림3의 상태도에서 전달함수를 구하면

$$T(D, I; h_1, h_2) = D^2 I^{h_2} + 2 D^4 I^{h_1+h_2} + D^4 I^{2h_1+2h_2} + D^4 I^{2h_2} \quad (6)$$

일반적으로  $h_k$  외에 모두 0으로 하면

$$T(D, I; 0, 0, \dots, h_k, 0, \dots, 0) = \sum_{d=d_p}^b \sum_{t=1}^b A(d, t; k) D^d I^{t h_k} \quad (7)$$

$$P_b(k) \leq \frac{3}{b} T(D, I; 0, \dots, 0, h_k, 0, \dots, 0) \Big|_{I=1, h_k=1, D^d=P_d} \quad (8)$$

여기서  $k=1,2,\dots,b$  이고  $P_b$ 는 식 (2)에 정의되어 있다.

백색가우스잡음 채널에서 동기복조식 FFSK 시스템을 가정 하면 이진대칭채널의 실패율은

$$\epsilon = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \quad (9)$$

이다 (2). 여기서  $E_b$ 는 비트의 에너지이며  $N_0/2$ 는 잡음의 양 주파수대 (two-sided) 전력밀도를 나타낸다.

식 (9) 를 이용하여 그림3의 길쌈부호에 대한 비트별 오류율 구한것이 그림4이다. 여기서 각 입력비트에 대한 비트 오류율이 다름을 알수 있다.

### III. 최적 길쌈부호의 발굴

이러한 비트별 부등오출을 이용하여 아나로그 신호를  $b$  비트의 DPCM 부호화 한 다음 길쌈부호를 이용하여 전송할때 채널오류에 의해서 발생하는 평균자승오차를 계산해 보자.

$$DPCM \text{에서 SNR을 계산해 보면 [4]} \\ SNR = \frac{G(1-\alpha_p L^2 \sigma_{qt}^2(0))}{L^2(\sigma_{qt}^2(0) + \sigma_{qt}^2)} \quad (10)$$

이다. 여기서  $G$ 는 예측기 이득 이며,  $\alpha_p$ 는 예측계수,  $\sigma_{qt}^2$ 는 양자화 오류전력,  $\sigma_{qt}^2$ 은 전송오류전력, 그리고  $L$ 은 load factor 이다.

식 (10) 에서 전송오류전력  $\sigma_{qt}^2$ 을 줄임으로써 SNR 을 개선 할 수 있다. 전송오류전력  $\sigma_{qt}^2$ 은 [4] (5)

$$\sigma_{qt}^2 = (1+b_p) \Delta_m^2 \left[ \sum_{k=0}^{(M-1)} P_b(\mu(0)) (1-P_b(\mu(0))) 2^{2k} \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^{2^M-1} \left( \sum_{k=0}^{(M-1)} P_b(\mu(0)) (1-2s_k) 2^k \right) P(i) \right] \\ + 2 \Delta_m \sum_{i=0}^{2^M-1} q_i \sum_{k=0}^{(M-1)} (1-2s_k) P_b(\mu(0)) 2^k \quad (11)$$

여기서 전송신호  $i = \sum_{k=0}^{M-1} s^k 2^k$ 이며  $b_p$ 는 전송오류가 수신 측 예측기를 통과함으로써 발생하는 계수이고  $q_i$ 는 양자기 구간의 평균 양자화오류, 그리고  $\Delta_m$ 은 step size 이다.

식 (11)에서 알 수 있듯이 전송오류의 평균자승오차  $\sigma_{qt}^2$ 는 입력 신호의 확률밀도함수  $P(i)$ 와 비트별 오출  $P_b(\mu(0))$ 에 의해서 결정되며 비트별 위치  $k$ 를 적절히 치환 (permutation) 시켜 길쌈부호기에 입력 시킴으로써 채널오류에 의한 왜곡을 줄일 수 있다.  $r=b/n$  길쌈부호기에 입력되는 정보벡터  $b = (b_1, b_2, \dots, b_b)$  라 하면

$$b_j = s(\mu(j)) \quad j=1, 2, \dots, b \quad (12)$$

$$\sigma_{qt}^2 = (1+b_p) \Delta_m^2 \left[ \sum_{k=0}^{M-1} P_b(\mu(0)) (1-P_b(\mu(0))) 2^{2k} \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^{2^M-1} \left( \sum_{k=0}^{M-1} P_b(\mu(0)) (1-2s_k) 2^k \right) P(i) \right] \\ + 2 \Delta_m \sum_{i=0}^{2^M-1} q_i \sum_{k=0}^{(M-1)} (1-2s_k) P_b(\mu(0)) 2^k \quad (13)$$

즉 평균자승오차는 치환  $\mu$ 의 선택에 따라 달라짐을 알 수 있다. 그림 4 에서  $P_b(1)$ 이  $P_b(0)$  보다 크므로 중요도가 낮은 비트를  $b_1$ 에 해당하도록 함으로써 평균자승오차를 줄일 수 있다.

이제 부러는 평균자승오차를 최소로 하는 길쌈부호를 발굴 발굴하기 위한 방법에 대해서 알아보고 그 방법에 의해 찾아 낸 몇가지 부호를 제시하겠다.

구속장이  $L$  부호를  $r=b/n$ 인 길쌈부호에 대해서 모든 가능한 생성행렬  $G$ 는  $2^{Ln}$  개이다. 그러므로 비교적 짧은  $L$ 이나  $n$ 의 경우를 제외하면 모든 경우에 대한 평균자승오차를 구하여 비교하는 것은 많은 시간과 노력이 요구되므로 다음 몇가지의 방법의하여 시간과 노력을 절약할수 있다.

첫째, 생성행렬  $G=(g_{11}, g_{12}, \dots, g_{1n})$ 으로 나타내면  $g_{11}, g_{22}, \dots, g_{nn}$ 의 순서의 변화는 그들의 상태도 및 출력비트들의 framing weight 를 변화 시키지 않는다. 즉 이들은 모두 같은 부호로 취급할수 있다.  $r=2/3, L=4$ 인 부호에서  $G=(3, 4, 5), (3, 5, 4), (4, 3, 5), (4, 5, 3), (5, 3, 4), (5, 4, 3)$ 은 모두 같은 부호이다.

둘째, 구속장  $L$ 과 입력비트수  $b$ 와의 관계에서  $L=kb$ , 여기서  $k=1, 2, \dots$ 인 경우 구속장의 각 레지스터를  $(u_1, u_2, \dots, u_1)$ 로 표시할때  $(u_1, \dots, u_b), \dots, (u_{(k-1)b+1}, \dots, u_{kb})$ 의 역순은 비트별 오류에 무관하다.  $r=2/3, L=4$ 인 경우  $G=(12, 2, 15)$ 와  $(12, 10, 7)$ 은 같은 비트별 오출을 가진다.

셋째, 모든 catastrophic 부호를 제거한다. catastrophic 부호는 유한한 채널오류에 의하여 Viterbi부호에서 무한개의 정보비트오류를 범할수 있다.

위와 같은 방법으로 생성행렬  $G$ 의 수를 줄인 다음 식 (13)을 이용하여 채널오류에 의한 평균자승오차를 최소로 하는 몇가지의 길쌈부호를 발굴하여 표2-표6에 비트별 오출과 함께 나타내었다. 또한 DAUT등에 의해 발굴된 최대자유거리를 갖는 부호와 비교하였다 [6]. 여기서 step size =  $2^{-(n-1)} P(i)$ 는 Load factor 가 3.16인 Laplace 확률분포함수,  $b_p = 3.16$  그리고  $E_b/N_0 = 4$  dB로 가정 하였다.

Table 2. minimum mse code for r=2/3, L=4

G	* (17, 6, 15)	** (12, 13, 15)
Pb[0]	$6.498148 \times 10^{-3}$	$6.128634 \times 10^{-3}$
Pb[1]	$6.128634 \times 10^{-3}$	$5.064998 \times 10^{-3}$
MSE	$2.721217 \times 10^{-2}$	$2.323443 \times 10^{-2}$

Table 3. minimum mse code for r=2/3, L=5

G	* (33, 15, 22)	** (33, 15, 22)
Pb[0]	$1.668377 \times 10^{-3}$	$1.668377 \times 10^{-3}$
Pb[1]	$9.862290 \times 10^{-3}$	$9.862290 \times 10^{-3}$
MSE	$4.994798 \times 10^{-3}$	$4.994798 \times 10^{-3}$

Table 4. Minimum mse code for r=2/3, L=6

G	* (27, 75, 72)	** (31, 55, 77)
Pb[0]	$1.753771 \times 10^{-3}$	$8.951143 \times 10^{-4}$
Pb[1]	$2.118617 \times 10^{-3}$	$8.761353 \times 10^{-4}$
MSE	$8.062758 \times 10^{-3}$	$3.872599 \times 10^{-3}$

Table 5. Minimum mse code for r=3/4, L=4

G	* (13, 15, 2, 14)	** (2, 4, 5, 11)
Pb[0]	$3.039228 \times 10^{-2}$	$4.619175 \times 10^{-2}$
Pb[1]	$4.375454 \times 10^{-2}$	$2.319348 \times 10^{-2}$
Pb[2]	$2.825816 \times 10^{-2}$	$1.372643 \times 10^{-2}$
MSE	$1.354534 \times 10^{-1}$	$7.972080 \times 10^{-2}$

Table 6. Minimum mse code for r=3/4, L=5

G	* (36, 14, 32, 7)	** (4, 22, 27, 31)
Pb[0]	$3.155537 \times 10^{-2}$	$2.295375 \times 10^{-2}$
Pb[1]	$4.253559 \times 10^{-2}$	$1.940033 \times 10^{-2}$
Pb[2]	$4.468877 \times 10^{-2}$	$1.482857 \times 10^{-2}$
MSE	$1.572540 \times 10^{-1}$	$7.491441 \times 10^{-2}$

\* founded by Daut, et. al [5]  
 \*\* founded by author

IV. 결론

부호율  $r=b/n$ ,  $b \geq 2$  인 길쌈부호에서 입력되는 b개의 비트들은 각기 다른 오율을 갖는다. 이러한 부등오류제어 성능을 본 논문에서 간략히 소개 하였다.

이러한 부등오류제어 특성을 통신하고자 하는 b개의 정보 벡터에서 비트별 지니는 중요도가 서로 다를 때 이용하여 채널오류에 의한 영향을 줄일 수 있다. 본 논문에서는 DPCM에서의 채널오류에 의한 평균자승오차를 구할 수 있는 계산식을 이용하여 이를 최소로 길쌈부호를 몇개의 경우에 대해서 찾아 최대자유거리를 갖는 부호와 비교하여 보았다.

표2-표7 에서 부등오류제어 특성을 이용하여 발급된 부호가 채널오류에 의한 영향을 적게 받음을 알 수 있다.

참고 문헌

1. A.Viterbi, "Convolutional Codes and Their Performance in Communication System," IEEE Trans. Comm. Tech., vol. COM-19, pp. 751-772, Oct. 1971.
2. A.Viterbi and J.Omura, "Principles of Digital Communication and Coding," McGraw-Hill, New York, 1979.
3. S.J.Moon, "Unequal Error Control Properties of Convolutional Codes," submitted the 1988 IEEE Intern. Symposium on Information Theory, June, 1988.
4. B.J.Goodman and C.E.Sundberg, "Transmission Errors and Forward Error correlation in Embedded Differential Pulse Code Modulation," BSTJ, vol.62, No.9, November 1983.
5. 최운철, 박영구, 문상재, "부등오율이 고려된 DPCM의 신호대 잡음비", 1988년도 전기 전자공학 학술대회 발표논문, July, 1988.
6. D.G.Daut, J.W.Modestinae, and L.D.Wisner, "New Short Constraint Length Convolutional Code Constructions for Selected Rational Rates," IEEE Trans. Info. Theory, vol. IT-28, pp. 794-800, Sept. 1982.