

적응 유한 요소법을 위한 2차 형상 함수 오차 추정

김형석 최홍순** 최경* 한송영*
 서울대학교 전기공학부* 삼성전기**

A Simple Posteriori Error Estimate Method For Adaptive Finite
 Element Mesh Generation Using Quadratic Shape Function

Kim Hyeong Seok* Choi Hong Soon** Choi Kyung* Hahn Song Yop*

Dept. of Electrical Eng. Seoul Univ.* Samsung Electronic Mechanics**

ABSTRACT

This paper reports a simple posteriori error estimate method for adaptive finite element mesh generation using quadratic shape function especially for the magnetic field problems. The elements of quadratic shape function have more precise solution than those of linear shape function. Therefore, the difference of two solutions gives error quantity. The method uses the magnetic flux density error as a basis for refinement.

This estimator is tested on two dimensional problem which has singular points. The estimated error is always under estimated but in same order as exact error, and this method is much simpler and more convenient than other methods.

The result shows that the adaptive mesh gives even better rate of convergence in global error than the uniform mesh.

1. 서론

최근들어 전기공학분야에서 전자장문제물 해석하는데 있어서 유한요소법이 널리 사용되고 있다. 그런데 해석 모델의 형상이 복잡하면 유한요소법을 적용하기 위해 필요한 입력자료의 양이 많아지므로 이를 용이하도록 하기 위하여 자동요소분할 (Automatic mesh generation) 방법 [1],[2], [3] 이 질실히 요구되며 또 해석영역 내에 특이점이 존재하면 자속 또는 전계의 집중현상이 생겨 그 부분의 요소를 세분하여 계산오차를 줄여야 하는데 사용자가 이러한 집중현상을 미리 예측하기 위해서는 경험이 요구되므로 미속면자의 경우 부정확한 요소세분의 가능성을 배제할 수 없다. 이를 극복하기 위해 적응요소분할 (Adaptive mesh generation) 방법 [4],[5] 의 필요성이 대두되어 이에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다.

적응요소분할 방법은 해석영역을 개략적으로 분할하여 초기 요소망을 구성하여 시스템 방정식을 조립하고 계산하여 얻은 결과로부터 각 요소별로 오차를 추정하여 상대적으로 오차가 큰 요소를 더 분할하여 다시 위의 과정을 반복하는 방법을 말한다. 적응요소 기법을 이용하여 전자장의 변화가 심한 부분이 존재하는 해석 모델에 대해 해의 정확도를 향상시키기 위해서는 그 부분을 세분할 수 있도록 오차를 적절하게 추정하는 방법이 매우 중요하다. 오차를 추정하는 방법으로는 보완변분원리 (Complementary variational principle) 을 이용한 오차추정 방법 [6] 과 오차함수를 구성하여 이를 이용한 오차추정 방법 [7] 이 사용되었으나 이들 방법은 해석차수가 높아지고, 오차추정 수식을 다시 풀어야하므로 복잡하고 계산 시간이 길어진다. 이에 따라 본 연구에서는 2 차원

전자장 문제 해석을 위한 간단한 적응요소분할 방법을 제시 하였다.

본 연구에서 제시한 방법은 2 차원 전자장 문제물 유한 요소법으로 해석하기 위해 삼각형 요소를 사용하였고, 6 점의 절점을 갖는 2 차 보간함수 (Quadratic interpolation function) 를 사용하여 구한 해와, 요소의 꼭지점만을 절점으로 갖는 1 차 보간함수 (Linear interpolation function) 을 사용한 해를 각 요소별로 비교하여 그 차이로 오차로 하여 요소를 세분하기 위한 기준으로 이용한 방법이다.

본 연구에서는 해석적인 해를 알 수 있는 2 차원 선형 문제물 때하여 본 방법에 의한 추정오차와 실제오차를 비교하여 본 방법의 유용성을 검토하였다.

2. 오차추정 방법

전기 기기의 특성을 산정하는데 있어서 기본물리량 인 자속밀도가 되는데, 예를 들면 전자력, 인덕턴스 등의 제반 파라미터를 산정하는데 직접 이용된다. 그러므로 요소세분을 위한 오차계산의 지표로서 자속밀도를 이용한다. 자속밀도로 표현된 Error Norm 을 다음과 같이 정의한다.

$$\|e\| = \left\{ \sum_{i=1}^N e_i^2 \right\}^{1/2} \quad (1)$$

$$e_i = \int_{\Omega_i} \Delta B^2 d\Omega \quad i = 1, \dots, N \quad (2)$$

$$\Delta B = |\vec{B}_{cal}| - |\vec{B}_{exac}| \quad (3)$$

여기서,

N : 전체 요소수

\vec{B}_{cal} : 유한요소법에 의해 구한 자속밀도

\vec{B}_{exac} : 자속밀도의 엄밀해

식 (2) 의 e_i 는 각 요소마다 따로 계산하여 요소 분할시 세분도의 기준이 되도록한다. 식 (3) 의 \vec{B}_{exac} 는 실제 문제에서는 알 수 없으므로 본 연구에서는 그림 1 과 같이 요소에 6 개의 절점을 사용한 2 차 보간함수로 구한 자속 밀도를 추정된 값 \vec{B}_{cal} 로 대체하여 3 개의 절점만을 갖는 1 차 보간함수로 구한 자속 밀도와 의 차이를 이용하여 오차를 추정하였다. 2 차 보간함수를 사용한 경우를 1 차 보간함수 사용한 경우 에 비해 엄밀해에 더

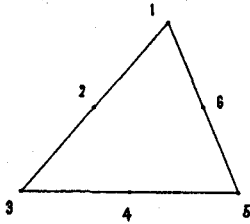


그림 1. 삼각형 요소의 절점의 위치

근접했다고 간주할 수 있는 이유는 첫째, 전자가 후자보다 절점수가 2배 (인접 요소를 고려하면 2배 이상)가 많기 때문인데, 절점수가 증가하면 해의 정밀도가 높아진다. 둘째, 같은 절점수에서도 절점의 위치가 같다면 후자에 비해 전자 쪽에 더 큰 정밀도를 기대할 수 있다. 그런데 두 가지를 모두 풀어서 해를 비교하는 것은 시간과 메모리의 낭비가 생기므로 본 연구에서는 이러한 단점을 없애기 위하여 다음과 같은 가정을 하였다.

절점 1, 2, 3, 4, 5, 6을 제외한 2차 보간함수의 1, 3, 5에서의 자기포텐셜 값과 1, 3, 5만을 제외한 1차 보간함수의 그것이 실제 해석문제에 있어 거의 일치하므로, 1차 보간함수를 따로 구성하여 풀지 않고 2차 보간함수의 절점 1, 3, 5에서의 해를 1차 보간함수의 해로 가정하였다.

실명을 간단하게 하기 위해 문제를 1차원 적선상에서만 고려 하였다. 2차 보간함수를 사용해서 구한 포텐셜의 분포와 1차 보간함수를 사용한 포텐셜의 분포는 그림 2의 (a), (b)와 같이 요소내에서 1차 곡선과 2차 곡선으로 나오게 된다. 그런데 1차 보간함수를 사용한 그림 (a)에서 요소의 양끝 절점이 x_i 와 x_{i+2} 인 이유는 2차원 평면상에서 했던 것과 같이 2차 보간함수를 사용한 그림 (b)의 요소내의 중간에 해당하는 절점을 택하지 않았기 때문이다. 이것의 미분곡선, 즉 자속밀도에 해당하는 곡선은 그림 3에 함께 나타내었다. 그림에서 보면 요소 영역내에 자속밀도의 변화가 클수록 빛금친 부분의 면적이 늘어남을 알 수 있다. 여기서 2차 보간함수의 자속밀도를 참값으로, 1차 보간함수에 의한 자속밀도 값을 계산치로 보면 그것들의 차이를 오차정도라고 가정할 수 있게 된다. 위와 같은 고찰로부터 한개의 요소내의 오차를 정하는 수식을 만들어 보면 다음과 같다. 2차 보간함수의 절점 2, 4, 6에서 구한 자속밀도를 (3)식에서의 \bar{B}_{2n} 로 택하고, 1차 보간함수의 그것들을 \bar{B}_{1n} 로 택한다. 2차 보간함수의 절점 2, 4, 6에서의 자속밀도 값을 각각 B_2, B_4, B_6 라고 하고 1차 보간함수의 그것들을 B_1 라 하면 식 (2)는

$$e_i = \int_{\Omega_i} \Delta B^2 d\Omega = 1/3 [(B_2 - B_1)^2 + (B_4 - B_1)^2 + (B_6 - B_1)^2] \cdot a$$

이고, 여기서 a 는 삼각형 요소 면적을 나타낸다.

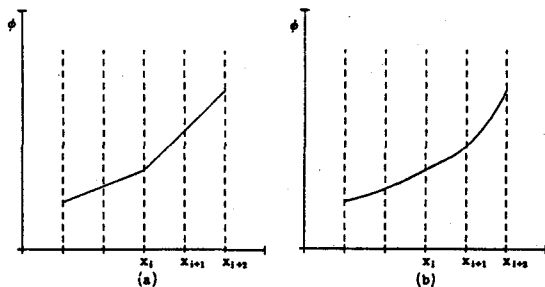


그림 2. 포텐셜 곡선

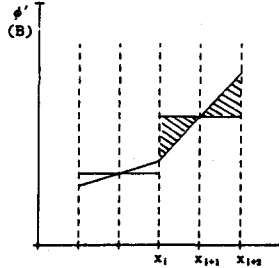


그림 3. 자속 밀도 곡선

3. 요소 세분

요소의 세분방법은 요소의 오차정도에 따라 한번이나 두번 또는 세번을 각각 둘로 나누어서 새로운 요소를 만드는 2분법 (Bisection Method)을 사용하였다. 분할 기준은 요소오차 e_i 의 평균치 (e_m)와 표준편차 (σ)를 구하여 그림 4와 같이

- a) $e_i \geq e_m + 2\sigma$ 일때 4개로 분할
- b) $e_m + 2\sigma > e_i \geq e_m + \sigma$ 일때 3개로 분할
- c) $e_m + \sigma > e_i \geq e_m$ 일때 2개로 분할하였다.

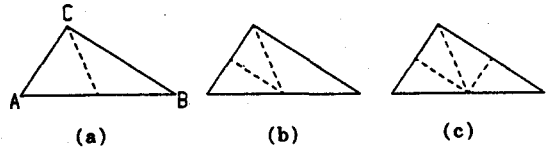


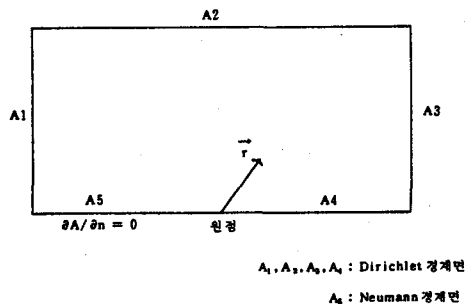
그림 4. 요소의 3가지 분할 방법

4. 사례 연구

본 방법을 해석적인 해가 있는 2차원 정사각문제에 적용 하였으며 적응모델은 그림 5.과 같다. 요소분할이 매우 어려운 경우를 다루기 위해 원점에서 $r^{\frac{1}{2}}$ 의 특이성 (Singularity)을 갖도록 하였고 자기 벡터 포텐셜의 이론해는

$$A(r, \theta) = r^{\frac{1}{2}} \sin(\theta/2) \quad (4)$$

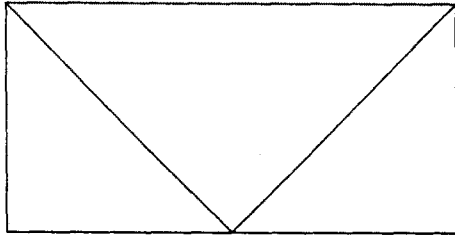
이다. 그리고 Dirichlet 경계의 자기 벡터 포텐셜값은 식 (4)로부터 구하여 입력하였다.



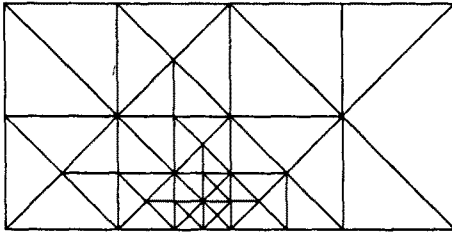
A_1, A_2, A_3, A_4 : Dirichlet 경계면

A_5 : Neumann 경계면

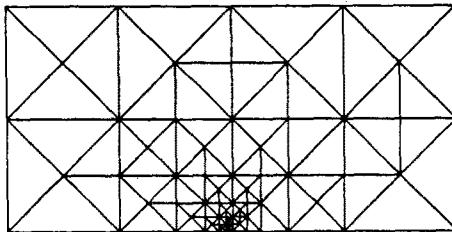
그림 5. 해석 모델



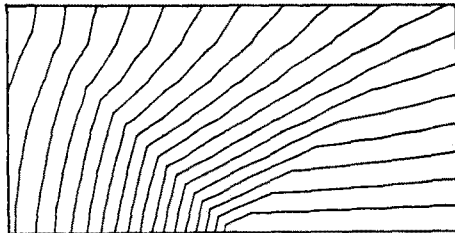
a) 초기요소 절점 : 12



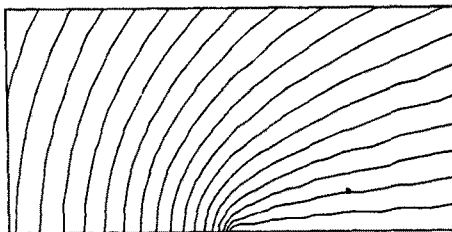
b) 중간과정 절점 : 119



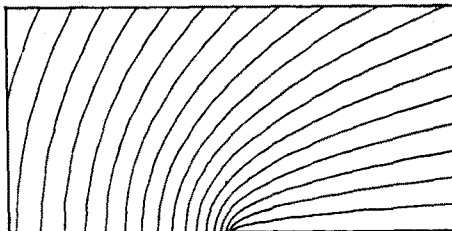
c) 최종결과 절점 : 254



d) 자속분포

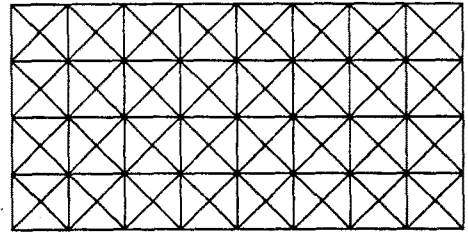


e) 자속분포



f) 자속분포

적응요소분할기법을 적용하여 발생된 요소망의 첫번째, 중간 과정, 마지막과정을 그림 6.의 (a), (b), (c)에 나타내었으며 그림 6.의 (d), (e), (f)는 요소가 각각 (a), (b), (c)인 경우 계산된 자속분포를 나타낸다. (b), (c)에서 보면 특이점 부근에서 세분이 많이 진행되어감을 볼 수 있다. 그림 7.은 균등 요소분할의 요소망과 자속분포이다. 그림 8. 적응요소분할의 경우와 균등요소분할의 경우에서의 추정오차 및 실제오차로서 절점수의 증가에 따라 감소하는 과정을 나타내었다. 실제오차와 추정오차는 그 크기가 동일 차수의 값을 유지하고 있어 추정오차로부터 실제오차를 예측할 수 있다는 것을 알 수 있다.



절점 : 281

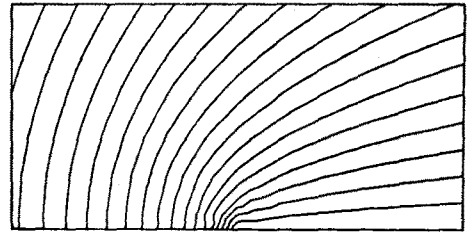


그림 7. 균등 요소망 및 계산 자속선

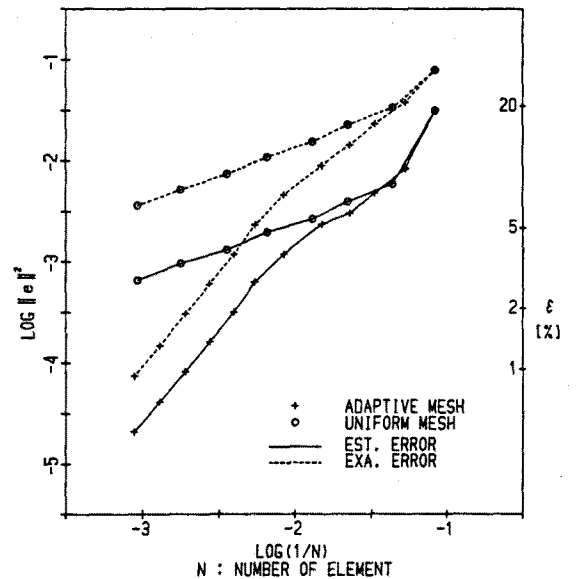


그림 8. 전체오차의 수렴비 특성

6. 결론

본 연구에서는 정자장문제에서 적응요소분할을 적용하기 위한 간단한 방법을 제시하였다. 본 방법을 2차원 자장문제에 적용한 결과 적응요소분할방법이 요소를 균등하게 분할 경우 보다 같은 절점수에서 해의 정확도에 있어 훨씬 유리함을 알 수 있었다.

또한 본 연구에서 제시한 방법의 추정오차가 실제오차와 동일차수의 값을 가지고 있기 때문에 이 추정오차로부터 자장의 정확도를 예측할 수 있어 계산 종료의 지표로 삼을 수 있다. 본 방법에서는 오차추정을 종전의 방법보다 매우 간단하게 할 수 있으므로 적응요소과정에서 요소분할에 소요된 계산시간은 전체 계산시간에 비해 무시할 정도였다. 그러므로 본 연구결과는 정자장 문제해석에 매우 유용한 방법이라 사료된다

7. 참고 문헌

- [1] W.C.Thacker, "A brief review of technique for generating irregular computational grids", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.15, pp.1335-1341, 1980
- [2] O.F. Watson , "Computing the n-dimensional Delaunary tessellation with application to Voronoi polytopes", The Computer Journal Vol.24, No.2, pp.162-166, 1981
- [3] C. F. Bryant , " Two dimensional automatic triangular mesh generation ", IEEE Trans. Magnetics, Vol. MAG-21, No.6, pp.2547-2550, Nov., 1985
- [4] J.Penman and M.D.Grieve, "An approach to self adaptive mesh generation", IEEE Trans. Magnetics, Vol.MAG-21 No.6, pp.2567-2570, Nov., 1985
- [5] A.R.Pinchuk and P.P.Silvester, "Error estimation for automatic adaptive finite element mesh generation", IEEE Trans. Magnetics, Vol.MAG-21, No.6, pp.2551- 2554, Nov., 1985
- [6] Z.J.Cendes and D. N. Shenton, "Adaptive mesh refinement in the finite element computation of magnetic field", IEEE Trans. Magnetics, Vol.MAG-21, No.5, Sep., 1985
- [7] Kelly, D.W., De S.R. Gago, J.P., Zienkiewicz, O.C. and Babuska, I.: "A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method Part I - Error analysis", INMJE, Vol.19, pp.1593-1619, 1983