창 립
40주년학술대회
논문 87-M-21-5

다변수 그램-샬리어 급수 A형을 이용한 고조파 페이서 전압의 확률적 예측 계산

*° 김 태 현 * 박 인 규 * 박 종 근 ** 강 영 석
* 서울 대학교 ** 한전 기술 연구원

Stochastic Estimation of Phasor Voltage of Harmonics Using Multivariate Gram-Charlier Type A Series

Tae-Hyun Kim In-Gyu Park Jong-Keun Park Young-Shuk Kang
Seoul National University KEPCO Research center

Abstract - This paper presents a method to estimate p.d.f.(probability density function) of harmonic phasor voltage. Because the quantity of harmonics is not fixed, stochastic analysis of harmonics is needed. Because it is impossible to obtain p.d.f. of voltage from p.d.f. of current directly, the moments of voltage and current are used. Firstly, the moments of current is calculated from p.d.f. of current. Secondly, the moments of voltage are calculated from the moments of current using the linearity of the moments. Finally, p.d.f. of voltage is estimated from the moments of voltage using Gram-Charlier Type A Series. [1] The moments of the p.d.f. obtained by the series and of the true p.d.f. is same up to given finite moments. Because current and voltage of harmonics are represented as not instantaneous values but phasors, the estimated value can be compared with the measured value and harmonic phasor voltage can be analyzed when the p.d.f. of phase is nonuniform as well as uniform.

1. 서론

최근 고조파의 발생원이 되는 각종 thyristor 이용 기기 등의 비선형 부하의 증가와 arc로를 사용하는 제철소등의 증가로 고조파 문제가 심각하게 되었다. 따라서, 고조파에 대한 억제 대책이 필요하며 이를 위해서는 대상 계통내에서의 정확한 고조파 해석이 선행되어야 한다. 한편, 발생 고조파 전류는 항상 일정한 값으로 발생하지 않기 때문에 확률 변수로 볼 필요가 있다.

본 논문에서는 전류의 크기와 위상을 모두 확률 변수로 보고, 여러 지점에 있는 고조파 발생원에 의한 어떤 점에서의 고조파 phasor 전압의 확률 밀도 함수를 구하는 방법을 제시하였다. 전류의 moment를 확률 밀도 함수로부터 구한 다음 계통의 moment에 대한 선형성으로부터 multivariate Gram-Charlier Type A Series에 의하여 전압의 확률 밀도 함수를 구할 수 있다.

2. 본론

(1) 고조파 전압의 확률적 예측계산

전력 계통에서 bus impedance matrix를 바탕으로 전류와 전압의 관계를 나타내면

$\dot{V}_{bus}=\dot{Z}_{bus}\dot{I}_{bus}$ (1) 이다.

(여기서, $\dot{I}_{bus}$: bus current
$\dot{Z}_{bus}$: bus impedance matrix
$\dot{V}_{bus}$: bus voltage.)

일반적으로 고조파 발생원은 자여식 inverter를 제외하면, 인가된 전압은 항상 일정한데 전류가 단속되어 고조파 전류가 전원측으로 유입되므로 전류원으로 볼수 있다. 한편 자여식 inverter의 경우도 고조파 전압원을 간단한 변환 과정을 거쳐 전류원으로 바꿀 수 있으므로 모든 고조파 발생원을 전류원으로 처리하여 고조파 계산을 실행할 수 있다.

고조파 전압 계산 문제는 계통 구성에 의하여 $\dot{Z}_{bus}$ 가 주어지고 고조파 발생원 즉 $\dot{I}_{bus}$ 가 주어진 상태에서 각 bus의 전압 $\dot{V}_{bus}$ 를구하는 문제라고 할 수 있다.

그런데, 서론에서 서술한 것같이 고조파 전류원 $\dot{I}_{bus}$ 를 확률 변수로 보아야 할 필요가 있으며, 이 경우 고조파 전압의 예측 계산 문제는 $\dot{I}_{bus}$ 의 확률 밀도 함수를 주었을 때 $\dot{V}_{bus}$ 의 확률 밀도 함수를 구하는 문제가 된다.

그러나, 전류의 확률 밀도 함수로부터 직접 전압의 확률 밀도 함수를 구하는 것은 함수식을 다루는 것이어서 상당히 복잡한 계산이 되어 풀이가 거의 불가능해진다. 단지 두 확률 변수의 합에 대한 풀이도 convolution 적분을 해야 하는 등으로 함수식의 처리는 매우 어렵다. 그래서, moment의 개념이 도입되어 사용되는데, 이렇게 하면 함수식이 대수식으로 바꾸어진다. 확률 밀도 함수를 moment로 치환했을 경우 무한대 차수까지의 moment를 알면 역으로 확률 밀도 함수를 구할 수 있다는 것이 알려져 있다.

(2) Multivariate Gram-Charlier Type A Series

이론적으로, 무한개의 moment가 주어지면, 그에 대응하는 확률 밀도 함수가 유일하게 결정되지만, 실제로 무한개의 moment를 구하는 것은 불가능하며 유한개의 moment들로부터 확률 밀도 함수를 결정해야 하는데 이것은 곧 approximation 문제이다.

직교 함수에 의한 approximation 문제에 대한 일반적인 기법은 다음과 같다.

함수 $g_i(x)$ 들이

$$\int_a^b g_n(x)g_m(x)w(x)dx = \begin{cases} \alpha_m & \text{if } n=m \\ 0 & \text{if } n\neq m \end{cases} \quad (2)$$

(여기서 $w(x)$는 weight function)

를 만족하는 경우 함수 $g_i(x)$ 들은 구간 (a,b)에서 weight function w에 대하여 '직교'하다고 말한다.

함수 $f(x)$ 는 $g_i(x)$ 들에 의하여 다음과 같이 근사된다. $f(x)$ 의 근사 함수를 $\hat{f}(x)$ 라고 하면

$$\hat{f}(x)=\sum_{i=0}^{N} c_i g_i(x) \quad (3)$$

여기서 c_i 들은 결정되어야 할 계수로서

$$\int_a^b [f(x)-\hat{f}(x)]^2 dx \quad (i=1, 2, \cdots, N) \quad (4)$$

를 최소화하는 근사 기준을 만족하는 c_i 는

$$c_i=\frac{1}{\alpha_i}\int_a^b f(x)g_i(x)w(x)dx \quad (5)$$

와 같이 구해진다.

Gram-Charlier Series 에서는 $g_m(x)$ 를

$$g_m(x)=H_m(x)G(x)=(-1)^m\frac{d^m}{dx^m}G(x) \quad (6)$$

로 한다.

(여기서, G(x)는 Gaussian 이며

$$G(X)=\frac{1}{(2\pi)^{.5}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (7)$$

H(x) 는 Hermite series 이다.

$$g_m(x)=H_m(x)G(x)=(-1)^m\frac{d^m}{dx^m}G(x) \quad (8))$$

이 $g_m(x)$ 들은 직교이며, 아래와 같은 식을 만족한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)g_m(x)(g(x))^{-1}dx = \begin{cases} m! & \text{if } n=m \\ 0 & \text{if } n\neq m \end{cases} \quad (9)$$

이렇게 정의된 Series를 바탕으로 확률 밀도 함수를 근사하는 것을 생각하자.

참 확률 밀도 함수를 $f(x)$, 구하는 근사 확률 밀도 함수를 $\hat{f}(x)$ 라고 하면

$$\hat{f}(x)=\sum_{i=0}^{N} c_i g_i(x)=\sum_{i=0}^{N} c_i H_i(x)G(x) \quad (10)$$

에서 c_i 는 (5)식으로부터

$$c_i=\frac{1}{i!}\int_a^b f(x)g_i(x)w(x)dx$$

$$=\frac{1}{i!}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)H_i(x)G(x)(G(x))^{-1}dx$$

$$=\frac{1}{i!}\int_{-\infty}^{\infty} H_i(x)f(x)dx$$

$$=\frac{1}{i!}\int_{-\infty}^{\infty} E[H_i(x)] \quad (11)$$

이 된다.

그러므로,

$$\hat{f}(x)=\sum_{i=0}^{N}\frac{1}{i!}E[H_i(x)]H_i(x)G(x) \quad (12)$$

이다.

(12)식이 결과식이며, 여기서 계산이 필요한 것은 단지 E $[H_i(x)]$ 뿐이다. 그리고, 이 계산은 주어진 moment들의 간단한 선형 연산이므로 쉽게 구할 수 있다.

이렇게 구한 근사 확률 밀도 함수는

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_j(x)\hat{f}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} H_j(x)\sum_{i=0}^{N}\frac{1}{i!}E[H_i(x)]H_i(x)G(x)dx$$

$$=\sum_{i=0}^{N}\frac{1}{i!}E[H_i(x)]\int_{-\infty}^{\infty}H_j(x)H_i(x)G(x)dx$$

$$=E[H_j(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}H_j(x)f(x)dx \quad (13)$$

그러므로, N차까지의 Hermite 급수에 대한 $f(x)$ 와 $\hat{f}(x)$ 의 기대값이 같음을 알 수 있다.

Hermite 급수의 일반식은

$$H_j(x)=x^j-{}_jC_2x^{j-2}+1\cdot 3_jC_4x^{j-4}\cdots \quad (14)$$

인데 Hermite 급수를 보이면

$H_0(x)=1$
$H_1(x)=x$
$H_2(x)=x^2-1$
$H_3(x)=x^3-3x$
$H_4(x)=x^4-6x^2+3$
$H_5(x)=x^5-10x^3+15x$

이다. 위에서 보는 것과 같이 N차 Hermite 급수는 N차 다항식이므로, N차까지의 Hermite 급수에 대한 $f(x)$ 와 $\hat{f}(x)$ 의 기대값이 같으면, N차까지의 moment가 같게 됨을 알수 있다.

Multivariate Gram-Charlier Type A Series는 이상의 방법이 다차원(multivariate)으로 확장된 것이다.

확률 밀도 함수 x 와 y 의 joint 확률 밀도 함수를 $f(x,y)$ 라고 하면 x 와 y 의 joint moment는

$$m_{kr}=E[x^ky^r]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^ky^rf(x,y)dxdy \quad (15)$$

여기서 moment의 차수는 k+r 이다.

다차원에서의 문제는, N차까지의 joint moment가 주어졌을 때 주어진 moment를 만족하는 joint 확률 밀도 함수를 구하는 문제가 된다. n개의 확률 변수에 대한 각각의 Gram-Charlier 함수의 곱

$\prod_{p=1}^{n} g_{s_p}(x_p)=\prod_{p=1}^{n} H_{s_p}(x_p)G(x_p)$ 를 base 함수로 하면

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{p=1}^{n}H_{s_p}(x_p)H_{q_p}(x_p)G(x_p)dx_p$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{p=1}^{n}(H_{s_p}(x_p)G(x_p))(H_{q_p}(x_p)G(x_p))(G(x_p))^{-1}dx_p$$

$$=\begin{cases}\prod_{p=1}^{n}s_p! & all\ s_p=q_p\\ 0 & otherwise\end{cases} \quad (16)$$

와 같은 직교성을 갖는다.

구하려고 하는 확률 밀도 함수 $\hat{f}(x)$ 를 $\prod_{p=1}^{n}H_{s_p}(x_p)G(x_p)$ 의 일차 결합으로 나타내면

$$\hat{f}(x)=\sum_{s_1=0}^{N_1}\sum_{s_2=0}^{N_2}\cdots\sum_{s_n=0}^{N_n}c_{s_1s_2\cdots s_n}\prod_{p=1}^{n}H_{s_p}(x_p)G(x_p) \quad (17)$$

여기서 ($N_1+N_2+\cdots+N_n\leq N$) 이 된다.

여기서 $c_{s_1s_2\cdots s_n}$ 들은 결정되어야 할 계수로서, 모든 $c_{s_1s_2\cdots s_n}$ 에 대하여

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}(f(x)-\hat{f}(x))^2dx \quad (18)$$

를 최소화하는 $c_{s_1s_2\cdots s_n}$ 은

$$c_{s_1s_2\cdots s_n}=\frac{1}{\prod_{p=1}^{n}s_p!}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g_{s_1s_2\cdots s_n}(x)w(x)\prod_{p=1}^{n}dx_p$$

$$=\frac{1}{\prod_{p=1}^{n}s_p!}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\prod_{p=1}^{n}g_{s_p}(x_p)(G(x_p))^{-1}dx_p$$

$$= \frac{1}{\prod_{p=1}^{n} s_p!} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathrm{x}) \prod_{p=1}^{n} H_{s_p}(x_p) G(x_p)(G(x_p))^{-1} dx_p$$

$$= \frac{1}{\prod_{p=1}^{n} s_p!} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathrm{x}) \prod_{p=1}^{n} H_{s_p}(x_p) dx_p$$

$$= \frac{E[\prod_{p=1}^{n} H_{s_p}(x_p)]}{\prod_{p=1}^{n} s_p!} \quad (19)$$

그러므로,

$$\hat{f}(x) = \sum_{s_1=0}^{N_1}\sum_{s_2=0}^{N_2}\cdots\sum_{s_n=0}^{N_n} \frac{E[\prod_{p=1}^{n} H_{s_p}(x_p)]}{\prod_{p=1}^{n} s_p!} \prod_{p=1}^{n} H_{s_p}(x_p) G(x_p) \quad (20)$$

(20)식이 결과식이며, 여기서 계산이 필요한 것은 단지 $E[\prod_{p=1}^{n} H_{s_p}(x_p)]$ 뿐이다. 그리고, 이 계산은 주어진 joint moment들의 간단한 선형 연산이므로 쉽게 구할 수 있다.

이렇게 구한 근사 확률 밀도 함수는

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\mathrm{x}) \prod_{q=1}^{n} H_{s_q}(x_q) \prod_{p=1}^{n} dx_p$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{q=1}^{n} H_{s_q}(x_q) \sum_{s_1=0}^{N_1}\sum_{s_2=0}^{N_2}\cdots\sum_{s_n=0}^{N_n}$$

$$\frac{E[\prod_{p=1}^{n} H_{s_p}(x_p)]}{\prod_{p=1}^{n} s_p!} \prod_{p=1}^{n} H_{s_p}(x_p) G(x_p) dx_p$$

$$= \sum_{s_1=0}^{N_1}\sum_{s_2=0}^{N_2}\cdots\sum_{s_n=0}^{N_n} \frac{E[\prod_{p=1}^{n} H_{s_p}(x_p)]}{\prod_{p=1}^{n} s_p!}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{q=1}^{n} H_{s_q}(x_q) \prod_{p=1}^{n} H_{s_p}(x_p) G(x_p) dx_p$$

$$= E[\prod_{q=1}^{n} H_{s_q}(x_q)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathrm{x}) \prod_{q=1}^{n} H_{s_q}(x_q) dx_q \quad (21)$$

그러므로, N차까지의 Hermite 급수의 곱에 대한 $f(\mathrm{x})$와 $\hat{f}(\mathrm{x})$ 의 기대값이 같아지므로, $f(\mathrm{x})$ 와 $\hat{f}(\mathrm{x})$ 의 N차까지의 joint moment가 같아진다.

(3) 순시치를 이용한 정식화

j node에서의 고조파 전류원이

$$I_j(t) = I_{mj} \sin(n\omega t + \theta_j) \quad (22)$$

이라고 하면, i node에서의 고조파 전압은

$$V_i(t) = \sum_{j=1}^{n} |\dot{Z}_{nij}| \sin(n\omega t + \theta_j + \phi_{nij}) \quad (23)$$

이 된다.

식 (22)의 전류원에서, 순시치라는 것은 순간적인 값을 말하며 이 경우 $-I_{mj}$ 와 I_{mj} 사이의 임의의 값이 된다. 이와 같이 순시치는 시시각각 변하는 값이므로 어떤 한 순간의 순시치만 알아서는 크기를 알 수 없다.

확률론을 도입하지 않았을 때에는 위와 같이 어떤 한 순간의 순시치를 아는 것은 크기를 아는데 별로 도움을 못 주지만, 확률론을 도입했을 때는 순시치 해석이 가능해지며 phasor 해석에 비해서 계산이 간편해서 이용되어 왔다. [2] [3]

그러나, 계산이 간편한 대신 순시치를 이용한 해석에서 얻은 값은 순간적인 값이므로 측정한 값과 비교하기 어려우며, 위상이 균일하지 않은 경우에는 시간에 따라 값이 달라지는 단점이 있으므로 본 논문에서는 phasor를 이용한 해석 방법을 사용했다.

(4) Phasor를 이용한 정식화

전류와 전압을 phasor로 나타냈을 때의 계산식은

$$\dot{V}_{bus} = \dot{Z}_{bus}\dot{I}_{bus} \quad (24)$$

(여기서 $V_{bus}, I_{bus}, Z_{bus}$ 위의 점은 복소수라는 것을 나타낸다.)

이다. 식 (24)에서 $\dot{Z}_{bus}$ 는 계통에 의해 주어지는 값이고 $\dot{I}_{bus}$ 의 joint 확률 밀도 함수가 주어졌을 때 $\dot{V}_{bus}$ 의 joint 확률 밀도 함수를 구하는 문제가 되는데, 확률 변수 $\dot{I}_{bus}$ 들이 독립이라고 하더라도 선형 연산의 결과인 $\dot{V}_{bus}$ 들은 독립이 되지 않는다. 그러므로, 여러 node의 전압 사이의 관계를 알려면 joint 확률 밀도 함수를 구해야 하지만 관심 대상은 여러 node의 전압 사이의 관계가 아니라 한 node 전압의 marginal 확률 밀도 함수이므로, 한 node에서의 marginal 확률 밀도 함수를 구하는 방법을 소개하겠다. 한 node에서의 marginal 확률 밀도 함수를 구하는 것이므로 다른 node와의 cross moment를 구할 필요가 없다.

Z,I,V를 모두 직각 좌표로 나타내어

$$\left.\begin{aligned} \dot{I} &= a + jb \\ \dot{Z} &= R + jX \\ \dot{V} &= e + jf \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

라고 하면

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} (R_{ij}a_j - X_{ij}b_j) \quad (26)$$

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} (X_{ij}a_j + R_{ij}b_j) \quad (26)$$

이 된다.

(26)식은 선형 연산이므로 주어진 a_j 와 b_j 의 확률 밀도 함수로부터 moment를 구해서 (26)식에 의하여 e_i 와 f_i 의 moment를 구할 수 있다. 그런데, e_i 와 f_i 는 독립이 아니므로 2변수 Gram-Charlier series를 이용한다. 여기서 전압의 크기가 얼마 이상일 확률은 이중 적분으로 구할 수 있다.

3. 결론

고조파 전류원에서 발생하는 전류의 확률 밀도 함수가 주어졌을 때, 임의의 지점에서의 전압의 실수부와 허수부에 대한 joint 확률 밀도 함수를 구하는 방법을 제시하였다. 전류의 확률 밀도 함수로부터 전압의 확률 밀도 함수를 직접 구하는 것은 거의 불가능하므로, moment를 사용했으며, moment로부터 확률 밀도 함수를 구하는 데에 multivariate Gram-Charlier Type A Series를 이용하였다. 그렇게 함으로서 주어진 moment를 정확히 만족하는 확률 밀도 함수를 구할 수 있었다.

순시치를 사용하면 위상이 구형 분포를 갖는 경우에만 해석이 가능하였으나, phasor를 사용함으로써 위상이 임의의 분포를 갖는 경우에도 적용될 수 있도록 하였다. 발생 고조파 전류의 확률 밀도 함수는 실측 등의 방법을 통하여 구할 수 있으며, 일반 소비자 부하에서 발생하는 고조파 부하에 대한 modeling 방법을 연구 중에 있다.

4. 참고 문헌

[1] P.W. Sauer and G.T. Heydt "A Convenient Gram-Charlier Type A Series" IEEE Transactions on Communication, Vol Com-27, No 1 p 247 - p 248, Jan 1979

[2] W.G. Sherman "Summation of harmonics with random phase angles" Proc. IEE, Vol. 119, p 1643 - p 1648, Nov. 1972

[3] 강 상 희 "Probabilistic estimation of harmonics in power system" 일본 전기 학회 전력 기술 연구회, PE-87-30, p 41 - p 50, 1987

[4] A. Papoulis "Probability, Random Variables and Stochastic Processes" McGraw-Hill, 1984

[5] R. Kniel, P.A. Schnieper "Summation of harmonics with random phase angles" Proc. IEE, Vol. 121, p 708 - p 709, Jul. 1974