창 립
40주년학술대회
논문 87-L-20-2

로보틱 매니퓰레이터의 최적 경로 제어

°박 현 우 배 준 경 박 종 국
경희대학교 전자공학과

Optimal trajectory control of robotic manipulators

°Hyun-Woo Park , Jun-Kyung Bae , Chong-Kuk Park
Kyung Hee University

A B S T R A C T

Recently, the problems associated with the achievement of desired trajectories for non-linear robotic manipulatory systems are researched.The control system which is designed for this robot manipulator, poses a number of severe problems. The methods proposed to deal with the problem fall loosely into three main classes : "direct" , "adaptive" , "anthropomorphic". Besides, there is an approach which is described based upon the application of optimal control theory. In this paper, using the optimal theory, we choose error -coordinates between the desired trajectories and the practical as the state values, and determine the control law U which minimize a corresponding performance criterion. Let's consider the robotic arm proposed by Freund and set up the deviations of it's trajectory as a measure of performance. To find the optimal control law U* and the next state value which need to obtain U*,here, we should introduced the conjugate gradient algorithm and the Runge Kutta method.

I. 서 론

로보틱 매니퓰레이터는 조인트로 연결된 여러개의 강체 링크로 구성되어 있으며, 로보트의 제어 방법은 대개 로보트 팔의 end effector 나 tool이 원하는 목적지에 도달하도록 조인트 모터에 power input 을 인가하는 것이다.

이러한 제어 시스템 설계에 있어 발생하는 여러가지 복잡한 제어 문제를 해결하기 위해 대개 다음과 같은 세가지 방법을 이용한다.

1) " direct "방법 : 최적 경로의 표현형태, 즉 데이터값에서 직접 모터의 회전력과 매니퓰레이터의 힘을 계산해서 제어하는 방법 [1,2]
2) " adaptive "방법 : 먼저, 매니퓰레이터의 간단한 수학적 모델을 구성하고 매니퓰레이터에서와 같은 입력을 이 모델에 인가한다. 이때 발생하는 출력의 오차를 이용하여 매니퓰레이터 출력이 모델과 거의 같도록 변수 제어 파라메타를 조정하여 최적화 하는 방법 [3]
3) " anthropomorphic " 방법 : 로보트를 제어하는데 있어, 인간이 자신의 손발의 움직임을 제어하는 원리를 이용하는 방법 [4]

이외에도 다음과 같이 최적 제어 이론을 응용하는 방법도 있다. 먼저, 이상적인 동작의 최소화를 평가지표로 설정한다. 그리고 개루우프 형태의 제어 시스템이 구성되면, 작은 이탈값에도 대처할 수 있는 부가적인 보상기 궤환을 달아준다. 이러한 형태의 제어값들이 매니퓰레이터를 제어하는데 사용된다.

II. 최적 제어 이론

다음과 같이 1 계 미분 방정식으로 나타나는 시스템을 생각해 보자.

SYSTEM :

$$\dot{x}(t) = f(\ x(t)\ ,\ u(t)\ ,\ p\ ) \quad : \quad x(t_0) = x_0 \qquad \text{----(2.1)}$$

여기서,
x : n 차 상태 벡터
u : m 차 입력 제어 벡터
p : 1 차 조절가능한 파라메타 벡터
f : n 차 비선형 벡터 함수 (x, u, p 에 대해 미분 가능하고, 시간 간격은 $t \in [\ t_0\ ,\ t_f\ ]$)

제어 문제는 초기조건 x 에서 부터 식(2.1) 의 비선형 시스템이 진행해 나갈때 평가지표

$$J(u, p) = \psi(p) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), U(t))\, dt \quad \text{----(2.2)}$$

를 최소화하는 파라메타 p와 입력제어 u(t) 를 구하는 것이다.

제약 조건 : $x_i = X_i - X_{oi}$

X_{oi} : 이상적인 최적 경로 값

X_i : 실질적인 경로 값

이제 최적 제어 문제를 순서쌍(p , u(t))로 이루어진 공간 V 에서 생각해 보자. 여기서,

$$p \in E^l ,\ u(t) \in L_2^m[t_0, t_f]$$

즉, $V = E^l \times L_2^m [t_0, t_f]$

이때 $v_1, v_2 \in V$ 인 두 벡터의 경우, 내적이

$$< v_1, v_2 > = \int_{t_0}^{t_f} u_1^T u_2\, dt + p_1^T p_2$$

와 같이 정의되고, 크기(norm)가

$$|| v || = sq(< v, v >)$$

와 같이 정의되면 V 는 Hilbert 공간이다.

이러한 공간내에서의 비선형 시스템에 대한 최적화 문제의 해는 conjugate gradient 알고리즘을 이용하여 최적값 v^* 을 구할 수 있고 ,이 알고리즘을 구성하기 위해서 gradient 벡터값이 필요하다. [6] 따라서, 만약 비선형 시스템을

정 의 : $\dot{x}_{n+1} = L(x(t), u(t))$; $x_{n+1}(t_0) = 0$ ----(2.3)

라 하면, 식(2.2) 는 식(2.4) 의 형태로 나타낼 수 있다. 즉,

$$J(u, p) = \phi(x(t_f), p) \quad \text{----(2.4)}$$

그리고 J (u,p) 의 gradient는

$$g(v) = (g_p, g_u) \quad \text{----(2.5)}$$

와 같이 주어진다. 여기서,

$$g_p = \int_{t_0}^{t_f} f_p^T z(t)\, dt + \nabla_p \phi$$

$$g_u = f_u^T z(t)$$

$$\dot{z}(t) = -f_x^T z(t) \ ; \ z(t_f) = \nabla_x \phi(x(t_f), p) \quad \text{----(2.6)}$$

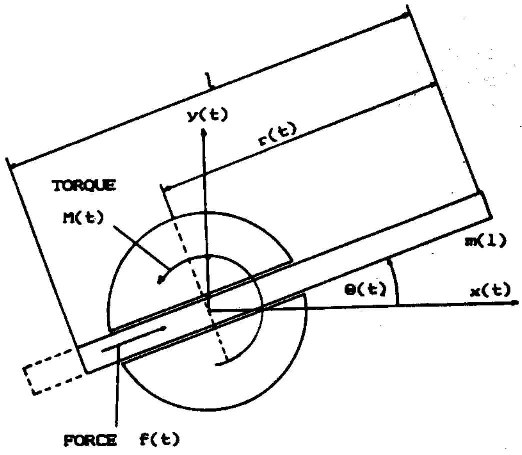
z(t)는 adjoint 시스템 [7]의 해이다. 이때, conjugate gradient 방법은 J (u,p) 의 gradient 가 0 이 될때의 v 값을 구하여 최소화된 v^* 값을 얻어내는 것이다.

III. 로보트 팔의 최적 제어

그림 1 에서 보여 주고있는 로보트 팔을 생각해 보자. 이 시스템에 오일러- 라그란지 (Euler-Lagrange)방법을 적용하면,

$$(m + m_L)\ddot{r} - (m + m_L) r\dot{\theta}^2 + ml\dot{\theta}^2/2 = f(t)$$

$$(k - mrl + (m + m_L) r^2)\ddot{\theta} + \{[2(m + m_L) r - ml]\dot{r}\}\dot{\theta} = M(t) \quad \text{----(3.1)}$$



그 림 1. 로 보 트 팔

어기서, $r(t)$, $\theta(t)$: 일반화된 위치좌표

m^* : 수직 기둥의 질량

r^* : 수직 기둥의 반경

m_L : 부하(load)의 질량

m : 중심점에서의 질량

$$k = (\tfrac{1}{2})\, m^* r^{*2} + (\tfrac{1}{3})\, m l^2$$

k 값은 관성 모우멘트이다. 이때 새로운 상태 변수를 정의하여, 이와 같은 2 계 비선형 미분 방정식을 1 계 미분 방정식으로 변환시킬 수 있다. 즉,

정 의 : $X_1 = r$

$$X_2 = \dot{r}, \quad U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ M(t) \end{pmatrix}$$

$$X_3 = \theta$$

$$X_4 = \dot{\theta}$$

이러한 정의로 부터

$$\dot{X}_1 = X_2$$

$$\dot{X}_2 = X_1 X_4^2 - 0.429 X_4^2 + 0.0286 U_1$$

$$\dot{X}_3 = X_4$$

$$\dot{X}_4 = \frac{-2X_1 X_2 X_4 + 0.857 X_2 X_4 + 0.0286 U_2}{X_1^2 - 0.857 X_1 + 0.344} \quad \text{----(3.2)}$$

어기서, 임의적으로 m = 20 Kg, l = 1.5 m, m^* = 40 Kg, r^* = 0.2 m, m_L = 15 Kg, k = 12.05 를 선택한다.

이때의 제어 문제는 이상적인 최적 경로가 X_{o1}^T = (0.775 , 0 , 0.75 , 0)에서 X_{o2}^T = (1.125 , 0 , 1.5 , 0) 까지 식(3.2) 로 표시되는 역학을 갖는다고 가정할때, 제어 벡터 $U^T(t)$ = ($U_1(t)$, $U_2(t)$) 를 선택하는 것이다. 여기서 Xi값을, 상태 변수 $x_i = X_i - X_{oi}$ 을 이용하여 (3.3) 식과 같이 x_i 값으로 나타낼 수 있다. 즉,

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = 0.696\, x_4^2 + x_1 x_4^2 + 0.0286\, u_1$$
$$\dot{x}_3 = x_4$$
$$\dot{x}_4 = \frac{-1.393\, x_2 x_4 - 2\, x_1 x_2 x_4 + 0.0286\, u_2}{x_1^2 + 1.393\, x_1 + 0.6455} \qquad \text{----(3.3)}$$

이때 초기 조건 $x^T(t_0) = (-0.35,\ 0,\ -0.75,\ 0)$ 을 갖는다. 상태 변수 x(t) 와 제어 변수는 이제 Xo2 에서 발생하는 오차 값이다. 여기서, 최적 제어 문제는 역학 방정식 (3.3)을 만족하는 비용함수,

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} (x^T Q x + u^T R u)\, dt \qquad \text{----(3.4)}$$

를 최소화 하는 u(t)를 선택하는 것이다.

정 의 :

$$Q = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 450 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

따라서, 비용 함수 J를 x_5 로 잡고 상태 변수를 재전개하면 ,이때의 최적 제어 문제는

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = 0.696\, x_4^2 + x_1 x_4^2 + 0.0286\, u_1$$
$$\dot{x}_3 = x_4$$
$$\dot{x}_4 = \frac{-1.393\, x_2 x_4 - 2\, x_1 x_2 x_4 + 0.0286\, u_2}{x_1^2 + 1.393\, x_1 + 0.6455}$$
$$\dot{x}_5 = 50(2\, x_1^2 + 4.5\, x_3^2) + \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2)$$

초기조건 $x^T(o) = (-0.35,\ 0,\ -0.75,\ 0,\ 0)$ ----(3.5)

를 만족하는 J 를 최소화하는 U(t)를 구하는 것이다. 여기서, adjoint 시스템은

ADJOINT SYSTEM : $\dot{Z}(t) = -fx^T Z(t)$ ----(3.6)

과 같이 나타낼 수 있고, 이때 fx는

$$fx = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_4^2 & 0 & 0 & 2X_4(0.696+X_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ fx_1 & \frac{-1.393X_4 - 2X_1X_4}{den} & 0 & \frac{-1.393X_2 + 2X_1X_2}{den} & 0 \\ 200x_1 & 0 & 450x_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Z^T(tf) = (0 , 0 , 0 , 0 , 1)$$

이다. 여기서, $fx_1 =$

$$\frac{(-2X_2X_4)den - (2X_1 + 1.393)\{-1.393X_2X_4 - 2X_1X_2X_4 + 0.0286U_2\}}{(den)^2}$$

$$den = x_1^2 + 1.393x_1 + 0.6455$$

따라서, GRADIENT 벡터는

$$g(u(t)) = \begin{pmatrix} 0.0286\, z_2(t) + u_1(t)\, z_5(t) \\ 0.0286/den\ z_4(t) + u_2(t)\, z_5(t) \end{pmatrix} \qquad \text{----(3.7)}$$

가 된다.

IV. 시뮬레이션 및 고찰

본 논문에서, 최적 제어값 U* 를 구하기 위한 알고리즘은 conjugate gradient method 을 이용하여 구성하였다.

여기서 gradient 벡터 g 값을 구하는데 필요한 상태 x(t) 값과 adjoint 시스템의 해 z(t) 값은 Runge Kutta integration 방법 [7,8]을 이용하여 얻어내고, 전상태에 대한 증가분 α 는 [5] 에 있는 식을 이용하여 구한다. 즉,

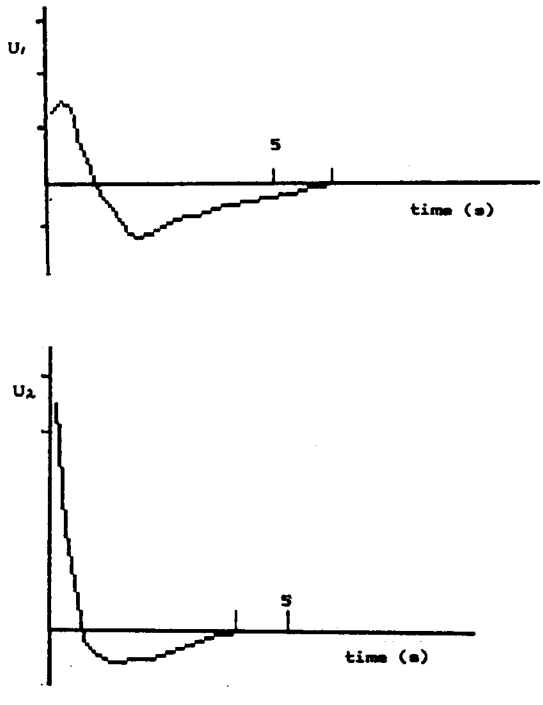
$$\alpha(t) = \frac{-\nabla J(u)^T S(t)}{S(t)^T R\, S(t)}$$

단, $S(t)^T R\, S(t) > 0$

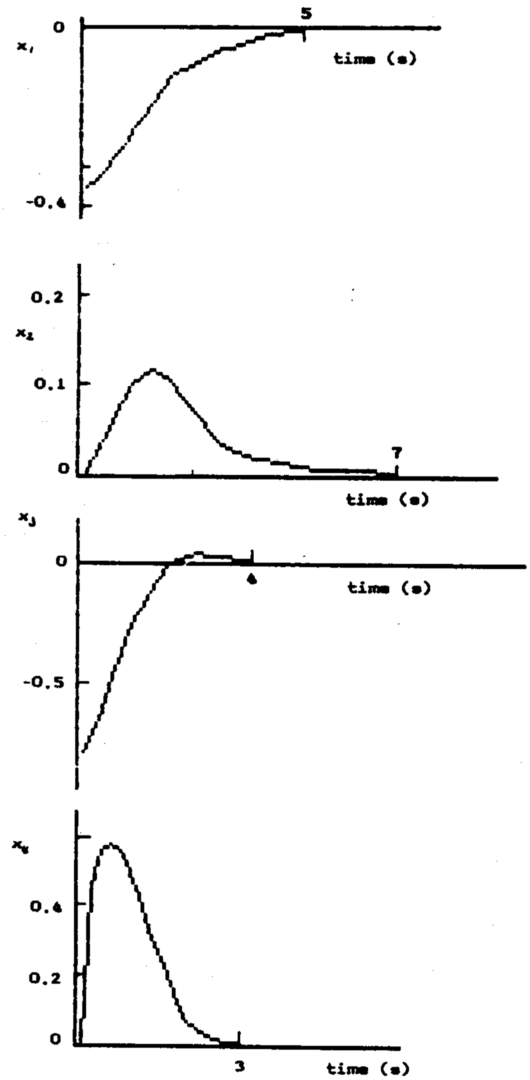
이때 초기 x(o) , z(o)값은 주어지며, U(o)값은 임의로 설정한다. 또, S(o) = -g(o) 이다.

이 프로그램의 결과 값 U와 그때의 상태 값 X는 그림 2와 그림 3에 도시되어 있다. 여기서 U(o) 값은 임의로, $U_1 = 1.5$, $U_2 = 5.5$ 라 가정하였다. 이때, U_1과 U_2값은 각각 6 초, 6 초일때 0 에 수렴하고 경로오차값 x_1, x_2, x_3, x_4 는 각각 5 초, 7 초, 6 초, 3 초후 0 에 수렴하게 된다.

따라서, 약 7 초후 이상적인 최적 경로와 실제 경로가 일치하게 됨을 알 수 있다.



그 림 2. 최 적 제 어



그 림 3. 최 적 경 로

V. 결 론

본 논문에서는 3 장에서의 로보틱 매니퓰레이터가 목적지까지 최적 경로를 따라 이동하는데 있어 발생하는 경로 오차를 상태치로 설정하고 이에 대한 경로를 최적화하기 위한 최적 제어 법칙 U^* 를 4 장에 나와있는 conjugate gradient 알고리즘과, 차기 상태의 x 값과 u 값을 얻기 위한, 런지 쿠타 방법(Runge Kutta Method)을 이용하여 얻어냈다. 이에 대한 결과치를 통해서 약 7초 후, 이상적인 최적 경로와 실제 경로가 일치함을 알 수 있었다.

REFERENCES

[1] J. Y. S. Luh, M. W. Walker and R. P. C. Paul, ASME Trans., J. Dynamic Systems Measurement and Control 102 (1980).

[2] J. M. Hollerbach, IEEE Trans. SMC-10(1980).

[3] S. Dubowsky and D. T. Desforges, Trans. ASME , J. Dynamic Systems Measurement and Contrl 101 (1979).

[4] J. S. Albus, Trans. ASME, J. Dynamic Systems Measurement and Control (1975).

[5] H. Mukai, A scheme for determining step size for unconstrained optimization methods. IEEE Trans. on Automatic Control AC-23(6) (1978).

[6] Y. Barness and I. G. Ben-Tovim, Int. J. Systems Sci. 7(4), 361-368 (1976).

[7] K. Ogata, State Space Analysis of Control Systems. Prentice-Hall, pp 374-376 (1984).

[8] J. L. Melsa and S. K. Jones, Computer Programs for Computational Assistance In The Study of Linear Control Theory.2nd. pp 165 - 166,179 (1973).

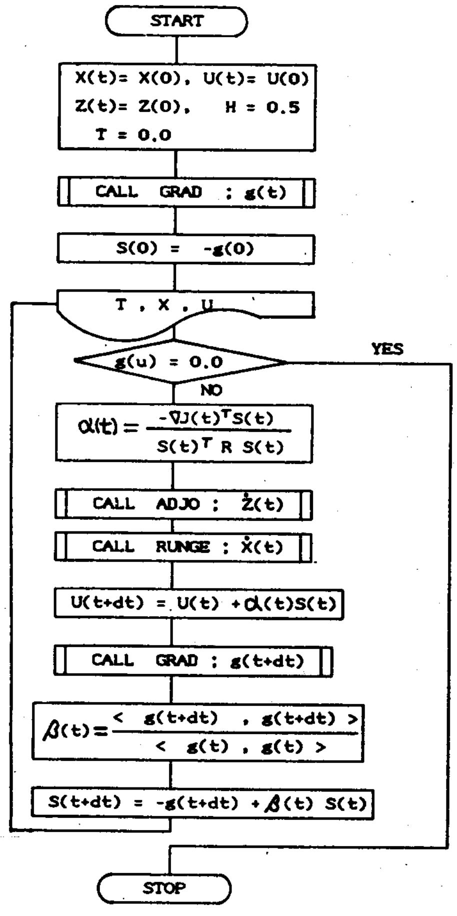


그림 4. 시뮬레이션을 위한 흐름도