창 립
40주년학술대회
논문 87-B-20-3

극배치 자기-동조 안정기에 의한 다변수 제어계의 설계

심 재 철° 전 상 영 임 화 영
광 운 대 학 전 기 과

Computer Aided Design of Multivariable Control Systems by Pole-Assignment Self-Tuning Regulators

J. C. Shim° S. Y. Chun W. Y. Yim
Dep. of Electric Engineering Kwang Woon University

Abstract

This paper describes the theory and application of a multi-input/multi-output self-tuning regulator where the control objective is the assignment of the closed-loop pole set to prespecified locations.

The algorithm described in this paper has a 'self-tuning' property. This self-tuners are more robust than the tuners that are based on optimal control synthesis method. This paper demonstrate usefullness of the algorithms by means of some simulation studies.

1. 서 론

Astrom, Wittenmark [1]은 안정하고 최소위상인 단일 입출력 시스템에 랜덤 잡음이 존재할때의 출력 변동을 최소화 시키는 자기 동조 안정기를 실현 시켰고, Wellstead et.al [2]은 전달함수 모델을 이용한 극배치 자기 동조 제어기를 실현했으며, Keviokey, Hetthessy, Hilger and Kolostor [3]는 최소 분산 법칙 (minimum-variance law)의 변형(Variant)을 실현 시켰는데 여기서 self-tuner는 출력의 가중 평균(weighted average)이 유한한 간격 (finite interval)을 넘어서 가능한 기준 level에 가깝게 유지 시킨다. Wellstead, Prager[4]는 비최소 위상 시스템을 다룰 수 있는 자기동조 안정기를 실현하였다. Multiple minimum-variance self-tuners는 이것들의 단변수 (single-variable) 부분과 유사한 불리한 점들 때문에 어려움을 겪는다.

특히, 기본적인 알고리즘은 비최소 위상 시스템들을 제어할 수 없고, 이러한 시스템들을 위해서는 factorisation 단계가 제어-법칙 계산 동안에 반드시 도입되어져야 하는데 이는 계산상의 복잡성을 증가 시킨다. 다변수 시스템에서 모든 루프들이 반드시 같은 시간 뒤짐을 가져야 된다는 minimum-variance 설계에 더 많은 불잇점들이 존재한다.

본 논문에서는 자기 동조기를 극-배치 제어이론에 적용[4]시켜 다입출력 시스템에 맞도록 확장적용 시킴으로써 이 난점들을 극복할 수 있다는것을 보였다.

2. 본 론

2-1 MIMO 모델의 구조

플랜트가 가관측성과 가제어성을 모두 갖는다고 가정하면,플랜트는 다음 미분방정식으로 표현된다.

$$[I+A(z^{-1})]Yt = z^{-k}B(z^{-1})\ Ut + [I+C(z^{-1})]et \qquad (1)$$

여기서 z^{-1}는 시간 지연을 나타내는 연산자이고, Ut,Yt는 시스템의 입력과 출력을 나타내며, et는 평균이 영이고, 공분산 (covariance)행렬이 R인 백색잡음이다. $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$, $C(z^{-1})$는 상수행렬 이고,

$$X(z^{-1}) = X_1 z^{-1} + \dots + X_{n_x} z^{-n_x} \qquad (2)$$

의 형태를 취한다.

2-2 오프 라인 (offline) 제어기 설계

제어 법칙의 형태는

$$U_t = G(z^{-1})(I+F(z^{-1}))\,Y_t \qquad (3)$$

으로 주어지고, $G(z^{-1})$, $F(z^{-1})$는 식(2)와 같은 형태이다. 식(3)을 식(1)에 대입하여 폐루프 시스템

$$Y_t = [I+F(z^{-1})]\,[I+P(z^{-1})]^{-1}\,[I+C(z^{-1})]\,e_t \qquad (4)$$

를 얻는다. 여기서

$$I+P(z^{-1}) = [I+A(z^{-1})]\,[I+F(z^{-1})] - z^{-k}B(z^{-1})G(z^{-1}) \qquad (5)$$

만약 $F(z^{-1})$, $G(z^{-1})$ 다항식의 계수들이 다음식이 되도록 선택된다면

$$I+P(z^{-1}) = [I+C(z^{-1})]\,[I+T(z^{-1})] \qquad (6)$$

폐루프 시스템은 다음과 같이 된다.

$$Y_t = [I+F(z^{-1})]\,[I+T(z^{-1})]^{-1}e_t \qquad (7)$$

여기서, 다항식 $T(z^{-1})$의 계수들은

$$n_t \le n_a + n_b + k - 1 - n_c \qquad (8)$$

에 의해서 결정되며, 이 조건은 식(5)의 해가 존재하기 위해서 요구된다. 이 시스템의 극들은 $|I+T(z^{-1})|$로 주어지고, 이것은 설계자가 자유로이 지정할 수 있다.

식(5), 식(6)의 해를 구하기 위해서는 다음 선형 연립 방정식들의 해가 필요하다.

$$(na+nb+k-1)p\left\{\underbrace{\begin{bmatrix} I & & \\ A1 & \ddots & \\ \vdots & & I \\ Ana & & \vdots \\ & \ddots & \\ & & Ana \end{bmatrix}}_{(nb+k-1)p}\ \ \underbrace{\begin{matrix} (pk)\left\{\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\right. & \\ -B1 & \\ \vdots & -B1 \\ -Bna & \vdots \\ & -Bna \end{matrix}}_{naP}\right. \quad X$$

$$\begin{bmatrix} F1 \\ \vdots \\ Fnf \\ Go \\ \vdots \\ Gng \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ Pnp \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A1 \\ \vdots \\ Ana \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

제어법칙을 실현시키기 위하여 안정기 (regulator) 식(3)의 형태에 더 많은 가정을 하여야만 한다.

$$F^{*}(z) = z^{n_f}\,(I+F(z^{-1})) \qquad (10)$$

$$G^{*}(z) = z^{n_g}\,G(z^{-1}) \qquad (11)$$

여기서, 행렬 다항식 $F^{*}(z)$와 $G^{*}(z)$의 차수는 $na=nb=n$이고, nf는 모든 가제어성과 가관측성을 갖는 차수이다.

안정기 식(3)은 다음과 같이 표현될 것이다.[5,6]

$$U_t = (I+\tilde{F}(z^{-1}))^{-}\tilde{G}(z^{-1})\,Y_t \qquad (12)$$

여기서 $n\tilde{f} = nf$ 이고 $n\tilde{g} = ng$ 이다.

이 가정은 다음 행렬이 $[I+F(z^{-1}),\ G(z^{-1})]$에서 $[I+\tilde{F}(z^{-1}),\ \tilde{G}(z^{-1})]$로 변환을 하는데 요구되며, full rank 가졌다는 것을 확신시켜준다.

$$\begin{bmatrix} Go^T & O & & -I_T & & O \\ G1^T & Go^T & & -F1^T & & -I \\ \vdots & \vdots & Go^T & \vdots & & \vdots \\ G1^T & \vdots & \vdots & -Fnf^T & & \vdots \\ & Gng^T & \vdots & & & \vdots \\ O & & Gng^T & O & & -Fnf^T \end{bmatrix} \qquad (13)$$

식 (11)로 부터 제어 법칙은

$$U_t = -\tilde{F}(z^{-1})U_t + \tilde{G}(z^{-1})Y_t \qquad (14)$$

이고, 이 방법은 $F(z^{-1})$와 $G(z^{-1})$를 계산하기 위해 이미 요구되었던 계산과정을 이용하기 때문에 실행시키기에 매우 쉽다.

자기-동조를 수행하는 극-배치 법은 어떤 어려움 없이도 비최소-위상 시스템들을 다룰 수 있고, 순수 시간 뒤짐이 루프들간에 다를 수 있다는 장점이 있다. 이산-시간 응용에서 '비최소 위상'이란 $|B(z^{-1})|$ 의 어떤 zero들이 단위 원내에 존재한다는 것을 뜻한다. (즉, $|z| > 1$.)

2-3 자기 동조 안정기

다변수 극-배치 안정기의 오프라인 설계는 행렬 다항식 $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$, $C(z^{-1})$을 알고 있다고 전제한다. 이들 매개 변수들은 RML(recursive maximum likelihood) 같은 추정 기법을 사용하여 얻어질 수 있다.

시스템의 온라인 모델은 다음과 같다.

$$Y_t = -\alpha(z^{-1})Y_t + \beta(z^{-1})U_t + \epsilon_t \qquad (15)$$

여기서,

$$\alpha(z^{-1}) = \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_{n_a} z^{-n_a} \qquad (16)$$

$$\beta(z^{-1}) = \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_{n_b+k} z^{-n_b-k} \qquad (17)$$

이고 PxP 행렬 계수들 αi, βi은 RML을 사용 하여 구해진다. 식(3) 으로 정의된 제어법칙은 다음 행렬 다항식을 풀어서 얻어진다.

$$[I+\alpha(z^{-1})][I+F(z^{-1})] - \beta(z^{-1})G(z^{-1}) = I+T(z^{-1}) \qquad (18)$$

오프라인 설계에서와 마찬가지로, $|I+F(z^{-1})|$가 폐루프 시스템 극들을 결정한다.

자기동조 과정은

단계 1) 매 반복에서 식(15)의 행렬 다항식 $\alpha(z^{-1})$와 $\beta(z^{-1})$의 매개변수들은 RML을 사용하여 추정한다.

단계 2) 극-배치 식(18)을 푼다.

단계 3) $\tilde{F}(z^{-1})$와 $\tilde{G}(z^{-1})$을 구한다. 여기서

$$[I+\tilde{F}(z^{-1})]G(z^{-1}) = \tilde{G}(z)[I+F(z^{-1})] \qquad (19)$$

단계 4) 단계 3)에서 구해진 법칙으로 부터 계산된 제어입력 Ut를 적용 시킨다.

단계 5) 단계 1)로 가서 단계 4)까지를 계속 반복한다.

2-4. 컴퓨터 시뮬레이션

가) 다변수 시스템

$$[I+A_1 z^{-1}+A_2 z^{-2}]Yt=[B_1 z^{-1}+B_2 z^{-2}]Ut+[I+C_1 z^{-1}]et \qquad (20)$$

여기서

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.4 & -0.2 \\ -0.1 & -0.9 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0.48 & 0.1 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0.1 & -0.3 \end{bmatrix}$$

et는 평균이 영이고, 공분산 행렬 R이 다음과 같은 백색 잡음이다.

$$R = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$I+T(z^{-1})$가 다음과 같이 선택하면 폐루프 극들은 z=0.5와 z=0.4 에 놓여지게 된다.

$$I + \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix} z^{-1} \qquad (21)$$

다항식 $B(z^{-1})$의 계수 행렬 B_1이 비정칙 행렬이기 때문에 이 시스템은 비최소-위상이고, 표준 최소-분산 안정기에 의해 제어되지 않는다.

극-배치 안정기의 오프라인 설계는 식(6)을 계산해서 얻어지고 변환을 하면

$$(I+\tilde{F}_1 z^{-1})^{-1}[\tilde{G}o+\tilde{G}_1 z^{-1}] = [Go+G_1 z^{-1}][I+F_1 z^{-1}]^{-1} \qquad (22)$$

나) 제어 법칙

$$Ut = -\tilde{F}_1\, Ut + \tilde{G}o\; Yt + \tilde{G}_1\, Y_{t-1} \qquad (23)$$

다음을 비교해 보면 파라미터들이 정확히 수렴하지는 않았지만 표준 자기동조 최소 분산 안정기가 적용되지 못하는 시스템에서 극-배치 안정기가 우수한 특성을 나타냄을 알 수 있다.

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0.213 & 0.203 \\ 0.155 & 0.286 \end{bmatrix} \qquad F_1 = \begin{bmatrix} 0.275 & 0.213 \\ 0.139 & 0.292 \end{bmatrix}$$

$$Go = \begin{bmatrix} -0.10 & -0.048 \\ -0.16 & -0.115 \end{bmatrix} \qquad Go = \begin{bmatrix} -0.102 & -0.058 \\ -0.153 & -0.106 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0.0682 & 0.0265 \\ 0.0495 & 0.0469 \end{bmatrix} \qquad G_1 = \begin{bmatrix} 0.0707 & 0.0382 \\ 0.0459 & 0.0332 \end{bmatrix}$$

3. 결 론

본 논문에서는 최적제어 접근법보다는 다변수 시스템의 극배치를 자기동조 제어이론에 근거하여 발전시켰다. 이 제어기는 비최소 위상 시스템들을 다룰 수 있기 때문에 최소분산 위상 자기 동조기보다 유리한 점들이 있다는 것을 알 수 있다.

이 방법의 불리한 점으로는 최대 허용-가능한 sampling *frequency*를 제한하는 계산의 복잡성에 있지만, 보다 빠르고 강력한 마이크로 프로세서의 등장으로 계산상의 문제들은 보완된다.

극배치 자기동조 안정기 [2], [7]는 폐루프 특성근이 미리 지정해준 안정근을 갖도록 제어기를 구성하는 방식으로 파라미터 추정의 수렴과 coprime이 만족되면 전체 시스템의 안정도가 보장되므로 정확도는 떨어지나 강건성(robustness)이 뛰어나다.

4. 참 고 문 헌

1. ASTROM, K.J. and WITTENMARK, B. 'On self-tuning regulators', Automatica, 1973, 9, pp. 185-199

2. WELLSTEAD, PE.E., EDMUNDS, J.M., PRAGER, D.L., and ZANKER, P.: 'Self-tuning pole/zero assignment regulators'. Int. J. Control, 1979, 30, pp. 1-26

3. KEVICZKY, L., HETTHESSY, J., HILGER, M., and KOLOSTORI, J.: 'Self-tunig adaptive control of cement raw material blending' Automatica, 1978, 14, pp. 525-532

4. HARRIS, C.J., and BILLINGS, S.A., 'Self-tuning and adaptive control' PETER PEREGRINUS. LTD., 1981, pp.72-92

5. WOLOVICH, W.A.: 'Linear multivariable systems' Springer Verlag, New York, 1974

6. BORISSON, U. 'Self-tuning regulators for a class of multivariable-systems' Automatica, 1979, 15, pp. 209-215

7. ASTROM, K.J. and WITTENMARK, B.: 'Self-tuning controllers based on pole-zero placement' Proc. IEE. Pt.D, Vol.127, 1980 pp. 120-130