

창립
40주년학술대회
논문 87-A-20-4

슬롯 고조파를 고려한 전기기계 공극자계의
해석 방법에 관한 연구

임 달 호 *, 김 생 수 **, 김 영 중 *, 은 상 백 **
* : 한양대학교

A study on the Method of Air gap field Analysis considering
slot harmonics in the electric machine.

Im Dal-Ho * , Kim Saeng-Soo ** , Kim Young-Joong * , Yoon Sang-Baeck *
* : Han Yang University , ** : Su Won Tech. College

ABSTRACT

In this study it is proposed a method which is able to compute precisely using time-difference method to the air-gap magnetic field in electric machines take into account of eddy current induced.

The air-gap magnetic field has slot harmonics which are due to the structure of machines and the shape of slot harmonics varies with the related positions of slots when the rotor moves.

Accordingly, considering the influence of slot-harmonics, we coupled macro-air-gap element with finite-order triangular elements in domain and used direct-convergence method for magnetic saturation.

공극자계 해석은 일반적으로 유한요소법을 이용하여 계산하게 된다. 또한 해석의 정밀도를 높이기 위하여 투자율의 비선형성을 고려하고 공극영역의 질점수를 증가시키게 된다. 이 경우 슬롯 고조파까지 고려하기 위해서는 시간변화에 따른 회전자의 위치를 이동시켜 주어야 한다. 그러므로 공극영역을 삼각형 요소로 분할하면 요소변형에 따른오차가 크게 발생하게 되므로 이동변위에 따른요소의 재분할이 필요하다. 또한 유도전동기와 같이 해석방정식에 와류항이 포함될 때는 자계의 시간변화를 jms 의 굵으로 처리하면 슬롯 고조파의 영향을 알아볼 수 없다. 따라서 본 논문에서는 슬롯 고조파를 고려한 공극자계의 정밀해석을 위하여 와류항까지 포함한 일반적인 해석방정식에 대하여 1 차삼각요소와 MACRO 공극요소를 접합하고 비선형성을 고려한 시간차분 알고리즘을 제시하였다.

1. 서론

일반적인 회전형 및 직선형 전기기계는 고정자와 회전자(이동자)에 슬롯이 있어 공극에서의 자기저항이 일정하지 못하다. 따라서 전기기계 설계에서 자기저항 계산시 카터계수등을 이용하여 평균적인 자기저항을 구함으로써 여러가지 특성을 분석하게 된다.⁽⁵⁾

그러나 이 슬롯은 공극자계에 슬롯 고조파를 발생시키게 되며 이것은 회전자의 이동에 의한 슬롯의 상대위치에 따라 양상도 달라지게 된다.

전기기계 특성에서 볼때 이 슬롯 고조파는 보오크의 맥동, 축진동 및 소음등의 나쁜 영향을 주게 된다. 따라서 정밀급의 전기기계를 설계하기 위해서는 공극자계 해석시 슬롯 고조파까지 고려함으로써 특성 및 효율을 향상시키는 슬롯 및 치의 형상등을 결정할 수 있다.

2. 적용 이론

일반적으로 전기기계내의 자계를 2 차원적으로 해석하기 위해서는 자기벡터 포텐셜 A 에 대한 지배방정식을 식(1) 과 같이 구할 수 있다. 또한 유도전동기와 같이 와류전류가 형성되는 경우에는 전류밀도 J 는 식(2) 와 같다.^{(1), (2), (4)}

$$\frac{\partial}{\partial x} (\nu \frac{\partial A}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\nu \frac{\partial A}{\partial y}) = -J \quad (1)$$

$$J = J_0 - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \quad (2)$$

A, J 는 z 축 방향성분이며, J_0 는 입력전류밀도, σ 는 도전율이며, ν 는 자기저항율로서 자기포화 때문에 비선형 함수가 된다. 식(1)의 지배방정식에 유한요소법을 적용하려면 해석영역에 관한애니지침함수 χ 를 정의하고 해석영역을 삼각형요소등으로 분할한다. 또한 벡터포텐셜 A 를 요소의

실질치로 보간하여 실질치에 대한 에너지범함수의 최소화 성리를 이용함으로써 각 절점에 대한 해를 얻을 수 있다.

$$\chi = \int_{\Omega} \left(\int_0^b v b db - JA \right) d\Omega \quad (3)$$

$$A = \sum_{k=1}^m N_k A_k \quad (m = \text{절점}) \quad (4)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial A_k} = 0 \quad (5)$$

여기서 N_k 는 보간함수이며, 에너지범함수 χ 는 식(6)과 같이 각 요소의 에너지범함수를 더한 것과 같다.

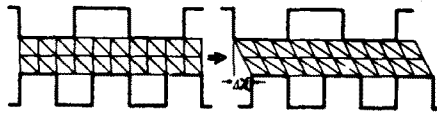
$$\chi = \sum_{e=1}^g \chi^e \quad (g: \text{요소수}) \quad (6)$$

식(5)를 정리하면 식(7)과 같은 Matrix 방정식이 된다.

$$[T] \frac{\partial}{\partial t} [A] + [S] [A] = [J] \quad (7)$$

여기서 행렬 $[T]$ 는 와류전류가 발생하는 경우에만 형성된다.

전기기계의 일반적인 형태로 볼때 고정자 및 회전자가 슬롯을 가지고 있으므로 회전자가 이동을 하면 슬롯의 상대위치가 변함으로 슬롯 고조파의 양상이 변하게 된다. 이러한 변화를 정밀하게 해석하려면 그림(1)과 같이 이동에 따라 해석영역의 절점위치를 이동시켜 주어야 한다.



그림(1). 회전자 위치 이동에 따른 공극에서의 요소변형

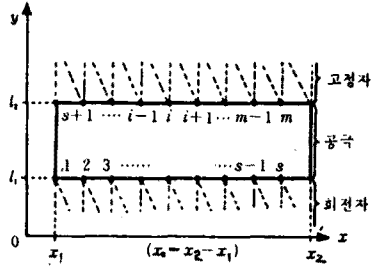
이 경우 공극영역을 삼각형요소로 분할하면 변위가 클수록 심하게 변형되므로 해석의 정밀도가 크게 떨어진다. 따라서 이동변위마다 요소의 재분할이 필요하다. 그러나 MACRO 공극요소를 이용하면 이동변위에 관계없이 요소변형으로 인한 오차를 없앨 수 있다.⁽¹⁾ 또한 와류가 형성되는 경우 벡터포텐셜의 시간적 변화는 슬롯 고조파의 영향을 크게 받으므로 회전자속의 ω 를 $J\omega SA$ 로 처리하면 해석의 정밀도가 떨어진다. 따라서 식(7)의 계산은 시간에 대한 차분식으로 변환하여 계산하여야 슬롯 고조파를 정밀하게 분석할 수 있다. 행렬 $[S]$ 는 각 시간스텝에 대하여 자기포화 및 이동변위에 따라 결정하여야 한다.

MACRO 공극요소 (Macro Air gap Element: 이하 MAE)

는 공극영역에서만 적용되는 것으로 그림(2)와 같이 고정자 및 회전자는 삼각형요소로 분할하여 집합을 하게 된다. 따라서 MAE 영역에서는 항상 식(8)과 같이 Laplace 방정식이 성립된다.

$$\nabla_0 \cdot \nabla^* A = 0 \quad (8)$$

$$A = \sum_{k=1}^m N_k^m A_k \quad (9)$$



그림(2). 직선형 기계에서의 MAE

식(9)와 같이 벡터포텐셜을 절점치로 보간하면 각 절점치에 대하여 식(10)이 성립된다.^{(1),(4)}

$$\nabla^2 N_i^m = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (10)$$

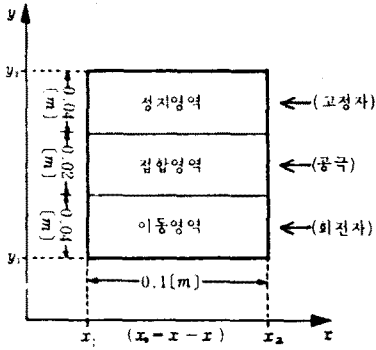
MAE 보간함수 N_i^m 는 식(10)으로부터 삼각형요소와의 집합경계 조건과 x_1, x_2 에서의 주기조건을 대입함으로써 해석적인 방법으로 얻을 수 있다.^{(1),(4)} 그림(2)에서 1차삼각요소와의 집합의 경우 조건은 다음과 같다.

$$i) N_i^m(x_1, y) = N_i^m(x_2, y)$$

$$ii) N_i^m(x, p) = 0$$

$$iii) N_i^m(x, p') = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & (x_{i-1} < x < x_i) \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} & (x_i < x < x_{i+1}) \\ 0 & (\text{그밖의 경계}) \end{cases}$$

단 절점 i 가 고정자 경계면의 절점인 경우 $p = 1, p = 1_2$ 이고, 회전자 경계면의 절점인 경우 $p = 1_2, p = 1_1$ 이다. MAE의 해석상의 정밀도는 변위에 관계없이 절점수에 최우된다. 따라서 경계상의 벡터포텐셜의 변화가 클때는 절점수를 증가시켜야 된다. 본 연구에서는 MAE의 정밀도를 알아보기 위하여 그림(3)과 같이 해석해가 존재하는 영역에 대하여 1차삼각요소와 MAE 집합에 대하여 MAE 절점수에 따른 해석결과의 오차를 그림(4)에 비교 표시하였다. 여기서 해석영역의 경계에 식(11)과 같이 경계치로 주었다.^{(1),(4)}

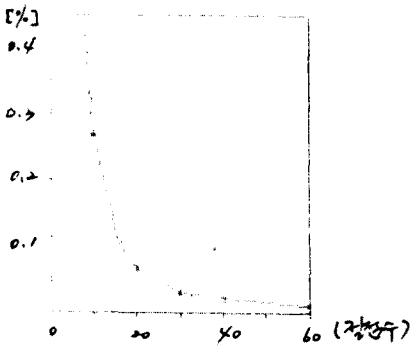


그림(3). 해석모델

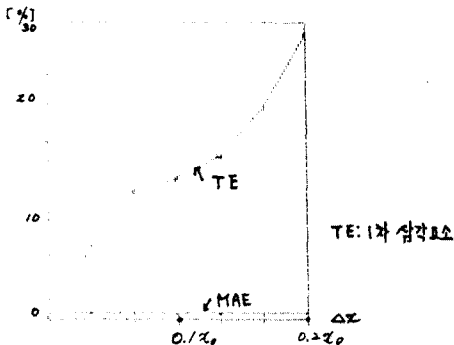
$$A = A_1 e^{\frac{\pi x}{x_0}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x_0} x\right) \quad (11)$$

오차의 크기는 Euclidian norm 으로 표시하였고 이 오차는 이동영역의 변위에 관계없이 일정하다. 따라서 예상되는 슬롯 고조파의 주기내에 오차 허용 범위에 있는 적절한 절점수가 놓이도록 해야한다. 또한 1차삼각요소와 정밀도를 비교하기 위하여 슬롯 고조파 발생시를 가정하여 경계치를 주었을 때 MAE 집합시와 1차삼각요소만의 분할의 경우를 비교하였다. 경계치는 식(12)와 같이 주었다.

$$A = A_1 e^{\frac{\pi x}{x_0}} \cos\left(\frac{\pi}{x_0} x\right) + A_m e^{\frac{\pi x}{x_0}} \cos\left(\frac{3\pi}{x_0} x\right) \quad (12)$$



그림(4). 주기당 MAE 절점수에 따른 해석오차



그림(5). TE 와 MAE 의 이동변위에 따른 오차비교

그림(5)는 그림(3) 영역에 대하여 절점수 124이고 $m=7$, $A_m=A_1/10$ 의 경우에 대한 결과이다. 그림(5)에서 알 수 있듯이 1차삼각요소만으로 분할하는 경우 이동변위 Δx 에 따라 매우 큰 오차가 발생하는 것을 알 수 있다.

3. 해석 방법

3.1 MAE 집합

MAE를 집합하게 되면 해석결과를 계산하기 위한 방정식인 식(7)의 행렬 [S]는 다음과 같다.

$$[S] = [K] + [M] \quad (13)$$

여기서 [K]는 1차삼각요소에 대한 계수행렬이고 행렬 [M]는 이동변위에 따른 MAE에 대한 계수행렬이다. 행렬요소값 M_{ij} 는 다음과 같다.

$$M_{ij} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} N_i^T \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} dx \quad (\Gamma_m: MAE \text{ 계})$$

$$= \frac{1}{x_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K[\sinh K(p-l) \cdot \cosh K(Q-l) - \sinh K(p-l) \cdot \cosh K(Q-l)] \cdot [a_{in} a_{jn} + b_{in} b_{jn}]}{\sinh K(p-l) \cdot \sinh K(Q-l)}$$

$$a_{in} = -\frac{4}{x_0} \cdot \frac{1}{K^2} \left[\frac{1}{x_i - x_{i-1}} \cdot \sin \left\{ \frac{K}{2} (x_i + x_{i-1}) \right\} \cdot \sin \left\{ \frac{K}{2} (x_i - x_{i-1}) \right\} + \frac{1}{x_i - x_{i+1}} \cdot \sin \left\{ \frac{K}{2} (x_{i+1} - x_i) \right\} \cdot \sin \left\{ \frac{K}{2} (x_{i+1} - x_i) \right\} \right]$$

$$b_{in} = \frac{4}{x_0} \cdot \frac{1}{K^2} \left[\frac{1}{x_i - x_{i-1}} \cdot \sin \left\{ \frac{K}{2} (x_i - x_{i-1}) \right\} \cos \left\{ \frac{K}{2} (x_i - x_{i-1}) \right\} + \frac{1}{x_i - x_{i+1}} \cdot \sin \left\{ \frac{K}{2} (x_{i+1} - x_i) \right\} \cdot \cos \left\{ \frac{K}{2} (x_{i+1} + x_i) \right\} \right]$$

여기서 표현한 M_{ij} 는 직선형기계에 적용되는 값으로 회전형 기계에 대해서는 원통좌표계의 값으로 표현 된다.

3.2 자기포화의 처리

자기포화에 의한 자기저항률의 비선형을 고려하기 위한 방법으로는 Newton Raphson법, 직접수렴법 및 위 두 방법의 혼합적용 방법등이 있으나 수렴속도에 다소차이가 있다. 따라서 정밀도의 관점에서 볼 때 가장 간단하게 처리할 수 있는 직접수렴법이 효과적이라 할 수 있다. 직접수렴법 과정은 논문(2)에 자세히 설명되어 있다. 자기포

와는 철심에서만 일어남으로 식(13)에서 [M] 에는 관계가 없다. 즉 식(13)은 식(14)와 같이 쓸 수 있다.

$$[S]^i = [K]^i + [M] \quad (14)$$

여기서 i 는 수렴반복 회수이다.

3.3 시간차분 알고리즘

와류가 발생하는 경우 $\frac{\partial A}{\partial t}$ 항은 시간차분에 대하여 이산화처리를 해야한다. 즉 Δt 차분에 대하여 식(15)와 같다.

$$\beta \frac{\partial A}{\partial t} \Big|_{t+\Delta t} + (1-\beta) \frac{\partial A}{\partial t} \Big|_t = \frac{A_{t+\Delta t} - A_t}{\Delta t} \quad (15)$$

여기서 β 는 가중치로서 $0 \leq \beta \leq 1$ 에 있게 된다. 따라서 식(7)을 식(15)의 양과좌편에 대입하여 식(16)과 같다.

$$\left[\frac{1}{\Delta t} [T] + \beta [S] \right] \{A\}_{t+\Delta t} = \left[\frac{1}{\Delta t} [T] - (1-\beta) [S] \right] \{A\}_t + \left[\beta \{J\}_{t+\Delta t} + (1-\beta) \{J\}_t \right] \quad (16)$$

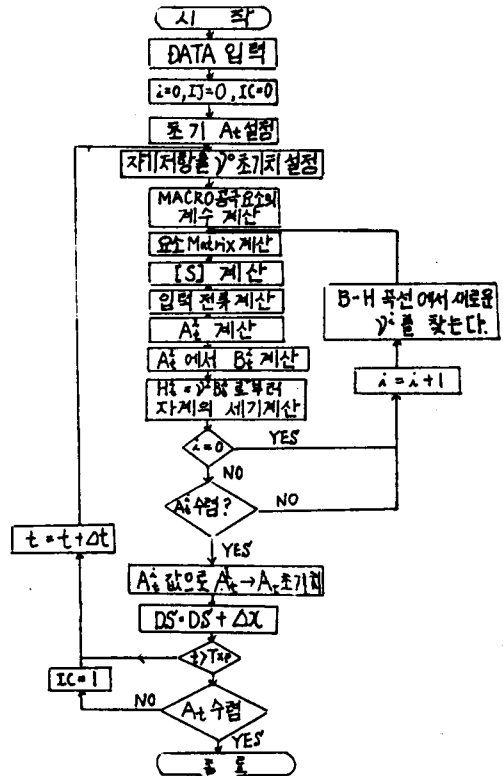
따라서 MAE 및 비선형을 고려하여 종합알고리즘을 구하면 식(17)과같이 표현된다.

$$\left[\frac{1}{\Delta t} [T] + \beta [CK] + [CM] \right] \{A\}_{t+\Delta t} = \left[\frac{1}{\Delta t} [T] - (1-\beta) [CK] + [CM] \right] \{A\}_t + \left[\beta \{J\}_{t+\Delta t} + (1-\beta) \{J\}_t \right] \quad (17)$$

비선형 수렴과정에서 [K] 를 고정된 다음 식(17)을 계산한다. β 값은 일반적으로 0.5 근방에서 설정하는 것이 적당하다고 알려져 있다. 종합알고리즘에 관한 Flow Chart는 그림(6) 와 같다.

4. 결 론

본 연구에서의 해석방법은 전기기계 공극자계의 슬롯 고조파 영향까지도 정밀해석하기 위한 방법이다. 특히 와류전류도 고려한 종합알고리즘을 제시함으로써 일반적인 전기기계에 모두 적용할 수 있도록 하였다. 따라서 정밀전기기계 설계시 슬롯 형성결정 및 토오크 특성해석에 정밀도를 높일 수 있으리라 기대된다.



그림(6). FLOW CHART

참 고 문 헌

1. 임 달호, 김 하식, 김 영중, "유한요소법에 의한 전기기계의 자속분포해석을 위한 MACRO 공극요소에 관한 연구", 대한전기학회논문지, Vol. 35, No. 11, pp. 479-486, 1986.
2. 임 달호, 신 응고, "전기기계의 비선형 자기적 특성 해석방법에 관한 연구", 대한전기학회논문지, Vol. 35, No. 3, pp. 102-107, 1986.
3. 中田高孝, 高橋則雄, 藤原利二, 岡田幸弘, "T-Ω法を用いた非線形三次元電流問題の解析法", 日本電機學會資料, RM-86-40, pp. 199-215, 1986
4. Frederic BOUILLIAULT and Adel RAZEK, "Eddy Current Due to Stator Teeth in Synchronous Machine Rotors", IEEE Trans, Vol. MAG-20, No. 5, pp. 1939-1941, 1984.
5. 広瀬敬一, "電機機器設計", 電氣學會, 昭和57年.
6. 임 달호, "전기계의 유한요소법", 동명사, 1987.
7. F. B. Hildebrand, "Advanced Calculus for Applications (2 ed.)", Prentice-Hall, Inc., 1976.