

임의로 구성된 많은 Bent Wire에서의
간략화된 적분방정식 유도

이 인철 김 경기
충양대학교 전자공학과

The Simplified Integral Equations for a System
Composed of Many Arbitrarily Bent Wires

In-Cheol BAE Jung-Ki KIM
Dept. of Electronic Engr. Chung-Ang Univ.

< ABSTRACT > Hallen's type integral equation derived by Mei for a curved wire antenna is applied to a system composed of many arbitrarily bent wires with arbitrary excitation. The simplification of kernels Π_2 and Π_3 of Mei's original equation is shown, and coupled integral equations with kernels in which neither derivatives nor integrals appear are derived concerning current and scalar potential for the bent wires.

1. 서론

안테나 이론을 연구함에 있어서 전류분포는 대단히 중요한 비중을 차지한다. 임의의 thin wire 안테나에 대한 전류분포를 결정하는 적분방정식이 1965년 K.K.Me이 의해 유도되었으며, 1971년 Cambrell의 또 다른 접근에서 증명되었다. 비록 이 방정식이 특별히 긴 팔(arm)을 가진 안테나에 유용할지라도 적분방정식의 Kernel에서 미적분항 때문에 합은 계산을 수행해야만 할지도 모른다. 본 논문의 목적은 임의의 형태를 갖는 많은 wire 도체로 구성된 안테나시스템을 해석하기 위해 Mei의 적분방정식의 Kernel에서 미적분항을 제거함으로써 간략화된 Kernel을 유도하는데 있다. 이러한 Kernel의 간략화는 적분방정식을 보다 쉽게 다룰 수 있고, 계산시간을 줄일 수 있는 잇점이 있다.

이 간략화된 Kernel의 응용은 Rectangular spiral안테나, 등과 같은 thin wire 안테나의 해석에서 찾아볼 수 있다. 미적분이 나타나지 않는 Kernels을 가진 coupled 적분방정식은 bent wire에 대한 전류와 scalar potential로부터 유도된다.

해석방법은 Harrington Report의 일반적인 Method of Moments를 사용하였다. 이 Method는 Harrington and Mautz에 의해 가느다란 wire에 대해서 적용했고 Kyle에 의해 Log-periodic 안테나에 대해 적용했다. 본 논문에서는 basis함수로서 pulse함수를 사용하고 weighting함수로는 Dirac delta함수를 사용하였다. 서로 수직으로 연결된 wire가 응용으로 제시된다.

2. 이론

(1) 적분방정식 유도
그림1과 같은 많은 임의의 bent wire로 구성된 system의 적분방정식은 (1)과 같이 표현된다.

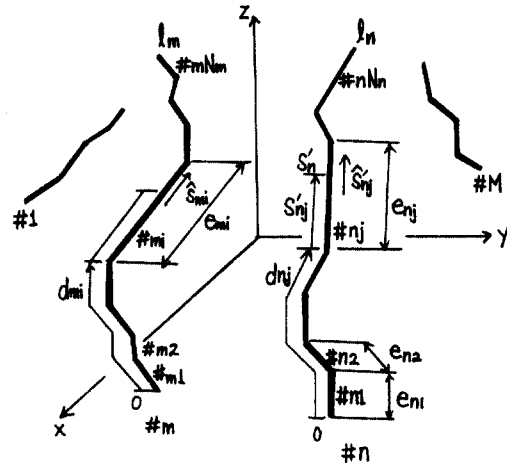


Fig.1 System composed of many arbitrarily bent wires

$$\sum_{n=1}^M \sum_{j=1}^{N_n} \int_0^{e_{nj}} I_{nj}(S_{nj}) \Pi_{mi nj}(S_{mi}, S_{nj}) dS_{nj} = B_m \cos \beta S_m + D_m \sin \beta S_m - \frac{j}{Z_0} \int_0^{e_m} E_z(\xi_m) \sin \beta(S_m - \xi_m) d\xi_m \quad (1)$$

$$\Pi_{mi nj}(S_{mi}, S_{nj}) = \Pi_{1 mi nj}(S_{mi}, S_{nj}) - \Pi_{2 mi nj}(S_{mi}, S_{nj}) - \Pi_{3 mi nj}(S_{mi}, S_{nj}) \quad (2)$$

$$\Pi_1 \text{ mi nj } (S_{mi}, S'_{nj}) = G_{mi nj} (S_{mi}, S'_{nj}) \hat{S}_{mi} \cdot \hat{S}'_{nj} \quad (3)$$

$$\Pi_2 \text{ mi nj } (S_{mi}, S'_{nj}) = \sum_{k=1}^{j-1} G_{mk nj} (e_{mk}, S_{mi})$$

$$\cdot [\hat{S}_{m k+1} - \hat{S}_{mk}] \cdot \hat{S}'_{nj} \cos \beta D_{mk mi} (e_{mk}, S_{mi}) \quad (4)$$

$$\Pi_3 \text{ mi nj } (S_{mi}) = \sum_{k=1}^{j-1} \int_0^{e_{mk}} \left\{ \frac{\partial G_{mk nj} (\xi_{mk}, S'_{nj})}{\partial \xi_{mk}} \cdot (\hat{\xi}_{mk} \cdot \hat{S}'_{nj}) + \frac{\partial G_{mk nj} (\xi_{mk}, S'_{nj})}{\partial S'_{nj}} \right. \\ \left. \cdot \cos \beta D_{mk mi} (\xi_{mk}, S_{mi}) d\xi_{mk} \right. \\ \left. + \int_0^{S_{mi}} \left\{ \frac{\partial G_{mi nj} (\xi_{mi}, S'_{nj})}{\partial \xi_{mi}} (\hat{\xi}_{mi} \cdot \hat{S}'_{nj}) \right. \right.$$

$$\left. + \frac{\partial G_{mi nj} (\xi_{mi}, S'_{nj})}{\partial S'_{nj}} \right\} \cos \beta D_{mi mi} (\xi_{mi}, S_{mi}) d\xi_{mi} \quad (5)$$

$$D_{mk mi} (\xi_{mk}, S_{mi}) = d_{mi} + S_{mi} - d_{mk} - \xi_{mk} \quad (6)$$

$$G_{mk nj} (\xi_{mk}, S'_{nj}) = \frac{e^{-j\beta r_{mk nj} (\xi_{mk}, S'_{nj})}}{4\pi r_{mk nj} (\xi_{mk}, S'_{nj})} \quad (7)$$

$$r_{mk nj} (\xi_{mk}, S'_{nj}) = \left\{ [\bar{Q}_{mk nj} (\xi_{mk}, S'_{nj}) \cdot \hat{S}_{mk}]^2 \right. \\ \left. + [\bar{Q}_{mk nj} (0, S'_{nj}) \cdot \bar{Q}_{mk nj} (0, S'_{nj})] \right. \\ \left. - [\bar{Q}_{mk nj} (0, S'_{nj}) \cdot \hat{S}_{mk}]^2 + \alpha_0^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

$$\bar{Q}_{mk nj} (\xi_{mk}, S'_{nj}) = -\xi_{mk} \hat{S}_{mk} + \bar{Q}_{mk nj} (0, 0) + S'_{nj} \hat{S}'_{nj} \quad (9)$$

- In(Sn') : n-th wire의 sin점에서의 total axial current.
 $\hat{S}_{n'}$: Sn'점에서 n-th wire의 tangential unit vector
 ln : n-th wire의 팔 길이 (arm length)
 Gmn : 자유공간에서의 Green's function
 Zo : 자유공간에서의 intrinsic impedance
 β : 위상상수 (phase constant)
 $\pi_{mi nj}$: kernel function
 E_{ij}^m : incident (or impressed) electric field
 a_0 : wire의 반경
 $\bar{Q}_{mk nj}$: mk에서 Snj점까지의 vector

(2) $\pi_3 \text{ mi nj}$ 의 간략화
 먼저 $\pi_3 \text{ mi nj}$ 를 다음과같이 놓는다.

$$\Pi_3 \text{ mi nj } (S_{mi}, S'_{nj}) = \sum_{k=1}^{j-1} \left\{ f_{mk nj} (e_{mk}, S'_{nj}) \right\} + f_{mi nj} (S_{mi}, S'_{nj}) \quad (10)$$

$$f_{mk nj} (\alpha_{mk}, S'_{nj}) = \eta_{mk nj} (\alpha_{mk}, S'_{nj}) - \eta_{mk nj} (0, S'_{nj}) \quad (11)$$

$$\eta_{mk nj} (\alpha_{mk}, S'_{nj}) = \left\{ \bar{Q}_{mk nj} (\alpha_{mk}, S'_{nj}) \cdot \hat{S}_{mk} \right. \\ \left. \cdot G_{mk nj} (\alpha_{mk}, S'_{nj}) \cos \beta D_{mk mi} (\alpha_{mk}, S_{mi}) \right.$$

$$\left. + j \frac{1}{4\pi} e^{-j\beta r_{mk nj} (\alpha_{mk}, S'_{nj})} \sin \beta D_{mk mi} (\alpha_{mk}, S_{mi}) \right\} \\ \cdot g_{mk nj} (S'_{nj}) \quad (12)$$

$$g_{mk nj} (S'_{nj}) = [\bar{Q}_{mk nj} (0, S'_{nj}) \cdot \hat{S}'_{nj} - \left\{ \bar{Q}_{mk nj} (0, S'_{nj}) \cdot \hat{S}_{mk} \right\} (\hat{S}_{mk} \cdot \hat{S}'_{nj})] / [\bar{Q}_{mk nj} (0, S'_{nj}) \cdot \bar{Q}_{mk nj} (0, S'_{nj}) \\ - \left\{ \bar{Q}_{mk nj} (0, S'_{nj}) \cdot \hat{S}_{mk} \right\}^2 + \alpha_0^2] \quad (13)$$

결국, kernel은 (14)식으로 표현된다.

$$\Pi_{mi nj} (S_{mi}, S'_{nj}) = G_{mi nj} (S_{mi}, S'_{nj}) \hat{S}_{mi} \cdot \hat{S}'_{nj} \\ - \left\{ \eta_{mi nj} (S_{mi}, S'_{nj}) - \eta_{mi nj} (0, S'_{nj}) \right\} \\ - \sum_{k=1}^{j-1} \left\{ G_{mk nj} (e_{mk}, S'_{nj}) [\hat{S}_{m k+1} - \hat{S}_{mk}] \cdot \hat{S}'_{nj} \right. \\ \left. \cdot \cos \beta D_{mk mi} (e_{mk}, S_{mi}) \right. \\ \left. + \eta_{mk nj} (e_{mk}, S'_{nj}) - \eta_{mk nj} (0, S'_{nj}) \right\} \quad (14)$$

(3) Scalar Potential
 scalar potential $\phi_m(S_m)$ 은 S_m 에 대하여 (1)식을 미분함으로써 유도된다.

$$-j\omega \epsilon \phi_m (S_{mi}) = D_m \beta \cos \beta S_m - B_m \beta \sin \beta S_m \\ - \beta \sum_{n=1}^M \sum_{j=1}^N \int_0^{e_{nj}} I_{nj} (S'_{nj}) \Pi_{mi nj}^* (S_{mi}, S'_{nj}) dS'_{nj} \\ - \frac{j}{2} \beta \int_0^{S_m} E_{in}^m (\xi_m) \cos \beta (S_m - \xi_m) d\xi_m \quad (15)$$

$$\Pi_{mi nj}^* (S_{mi}, S'_{nj}) = \Pi_2^* \text{ mi nj } (S_{mi}, S'_{nj}) + \Pi_3^* \text{ mi nj } (S_{mi}, S'_{nj}) \quad (16)$$

$$\Pi_2^* \text{ mi nj } (S_{mi}, S'_{nj}) = \sum_{k=1}^{j-1} G_{mk nj} (e_{mk}, S'_{nj}) [\hat{S}_{m k+1} - \hat{S}_{mk}] \\ \cdot \hat{S}'_{nj} \sin \beta D_{mk mi} (e_{mk}, S_{mi}) \quad (17)$$

$$\Pi_3^* \text{ mi nj } (S_{mi}, S'_{nj}) = \sum_{k=1}^{j-1} \left\{ f_{mk nj}^* (e_{mk}, S'_{nj}) \right\} + f_{mi nj}^* (S_{mi}, S'_{nj}) \\ = \sum_{k=1}^{j-1} \left\{ \eta_{mk nj}^* (e_{mk}, S'_{nj}) - \eta_{mk nj}^* (0, S'_{nj}) \right\} \\ + \eta_{mi nj}^* (S_{mi}, S'_{nj}) - \eta_{mi nj}^* (0, S'_{nj}) \quad (18)$$

$$\eta_{mk nj}^* (\alpha_{mk}, S'_{nj}) = \left\{ \bar{Q}_{mk nj} (\alpha_{mk}, S'_{nj}) \cdot \hat{S}_{mk} G_{mk nj} (\alpha_{mk}, S'_{nj}) \right. \\ \left. \cdot \sin \beta D_{mk mi} (\alpha_{mk}, S_{mi}) + \frac{1}{4\pi} e^{j\beta r_{mk nj} (\alpha_{mk}, S'_{nj})} \right. \\ \left. \cdot \cos \beta D_{mk mi} (\alpha_{mk}, S_{mi}) \right\} g_{mk nj} (S'_{nj}) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \Pi_{mi}^* n_j (S_{mi}, S'_{nj}) \\ &= \eta_{mi}^* n_j (S_{mi}, S'_{nj}) - \eta_{mi}^* n_j (0, S'_{nj}) \\ &+ \sum_{k=1}^{i-1} \{ \Gamma_{mk} n_j (e_{mk}, S'_{nj}) [\hat{S}_{m, k+1} - \hat{S}_{mk}] \cdot \hat{S}'_{nj} \\ &\quad \cdot \sin \beta D_{mk} m_i (e_{mk}, S_{mi}) \\ &+ \eta_{mk}^* n_j (e_{mk}, S'_{nj}) - \eta_{mk}^* n_j (0, S'_{nj}) \} \quad (20) \end{aligned}$$

(4) 입사 전개

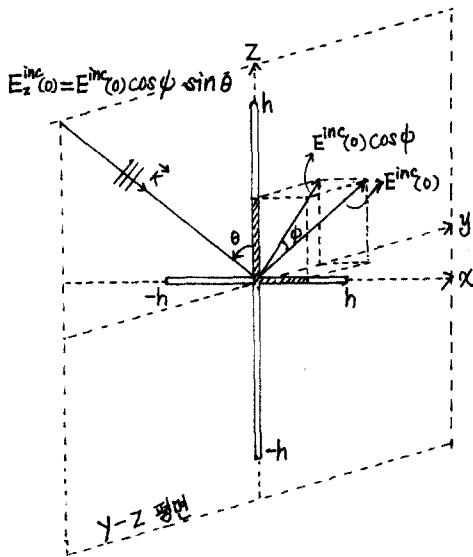


Fig.2 Wire Junction in incident plane wave with propagation unit vector k in plane perpendicular to horizontal wire

<그림2>에서와 같이 하나의 wire는 z축상에 놓고, 다른 wire는 x축 방향으로 놓고, wire의 점점을 원점에 놓았다. 입사평면파의 방향은 y-z평면상에 놓아 x축의 wire에 수직으로 입사하도록 하고, 그 electric vector는 항상 wave의 진행방향을 나타내는 vector k 와 수직을 이루면서 임의의 방향을 갖는다. <그림2>에서 vector k 는 z축에 대해서 θ 의 값을 가지며, incident field vector E^{inc} 는 y-z평면에 대해서 ϕ 값을 갖는다. 원점에서 입사평면파는 $E^{inc}(0)$ 로 나타내는데 같은 z축에 대해 나타난다. 수평 dipole(x축)상의 field 성분은 $E_z^{inc}(0) = E^{inc}(0) \sin(\phi)$ (21) 가 되는데 이것은 wave가 수평wire에 수직으로 입사하기 때문에 수평dipole의 모든점에서의 field이다. 반면에, 원점에서의 field의 z성분은 $E_z^{inc}(0) = E^{inc}(0) \cos(\phi) \sin(\theta)$ 인데, 이것은 수평축과는 달리, 수직wire에서는 z값에 따라 위상이 달라진다. <그림3>은 이 위상을 고려한 것이다. 위상을 고려한 수직wire의 입사전계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E_z^{inc}(z) &= E_z^{inc}(0) \cdot e^{ikz \cos \theta} \\ &= E_z^{inc}(0) \cos(\phi) \sin(\theta) e^{ikz \cos \theta} \quad (22) \end{aligned}$$

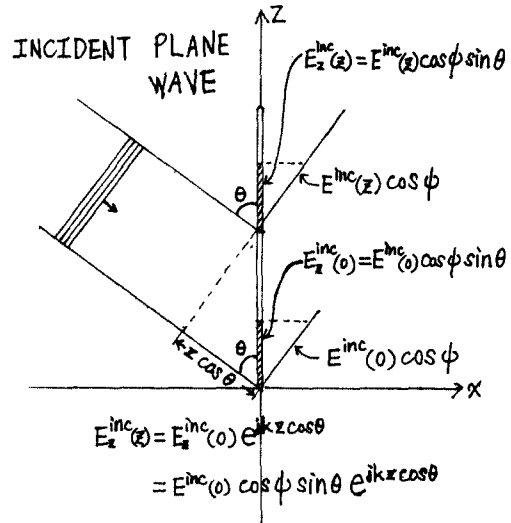


Fig.3 Component of incident electric field along vertical wire of junction at distance z from junction

(3) 수치 해석

Moment Method에서 weightings함수와 기저함수를 같이 취하는 Galerkin Method와 weighting함수를 delta dirac함수로 취하는 Collocation Method를 많이 사용하고 있다. 본 연구에서는 Galerkin Method의 경우 이중적분으로 인해 CPU time의 증가를 초래하기 때문에 Collocation Method를 사용하여 해를 구하였다. 기저함수로는 pulse함수를 사용하였는데 다음과 같다.

$$P(x) = \begin{cases} 1, & x_i - (x_i - x_j) / 2 < x < x_i + (x_i - x_j) / 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

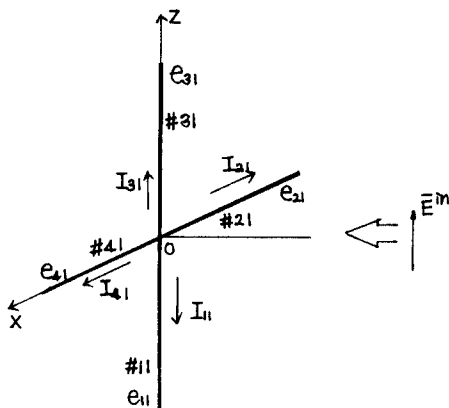
구간의 element를 N개라 할 경우, 기저함수도 N개가 된다.

식을 matrix 형태로 나타내면, 다음과 같다.

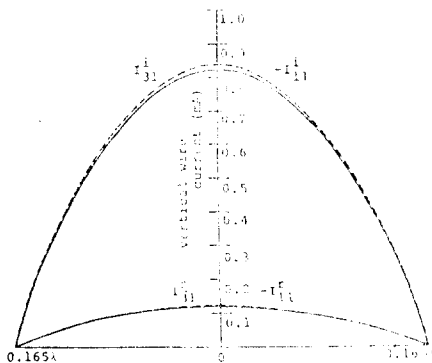
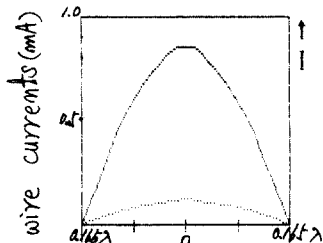
$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \dots & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \quad (23)$$

4.결과 및 고찰

간략화된 적분식을 이용해서 서로 수직으로 연결된 wire에 대한 전류분포를 구해 보았는데 Chao가 구한 전류분포와 일치함을 보였다. <그림4>는 입사전계가 $E = \exp(jky)U$ 이고 파장 (λ) 이 1 (m)일때의 전류분포를 나타낸 것이다.



$\epsilon_{11} = 0.157$
 $\epsilon_{21} = 0.111$
 $\epsilon_{31} = 0.111$
 $\epsilon_{14} = 0.111$
 $\epsilon_{24} = 0.111$
 $\epsilon_{34} = 0.111$
 $(n=1, 2, 3, 4)$
 wire radius $a_0 = 0.002227$



----- Chao
 eq.(1)

$$I_{21} = 0, \quad I_{24} = 0$$

Fig4. Current distributions on crossed wires

5. 결론

single thin wire 안테나에 대한 Mie 의 적분 방정식을 임의 형태의 많은 wire 도체로 구성된 안테나 시스템으로 확장하였다. 이 적분방정식의 Kernel 은 digital computer 로 프로그램 하기 위한 알맞은 form 으로 간략화되었다. Kernel 이 미적분계산을 포함하고 있지 않기 때문에, 계산 시간이 상당히 줄어들것으로 기대된다. 이 간략화된 Kernel K_{11} 와 K_{12} 는 thin wire 안테나 문제와 scattering 문제를 보다 쉽게 다루게 해준다. 서로 수직으로 연결된 wire 가 유도된 적분방정식의 응용으로 제시되었다.

REFERENCES

- [1] Mei, K.K.: "On the integral equations of thin wire antenna," IEEE trans. Antennas and Propag., pp.374-378 (May 1965).
- [2] Cambrell, G.K. and Carson, C.T.: "On Mei's integral equation of thin wire antennas", IEEE Trans. Antennas and Propag., pp.781-782 (Nov. 1971).
- [3] Nakano, H.: "The simplified expression for the kernel of Mei's integral equation", Trans.IECE Japan, J62-B, 11, pp.1058-1059 (Nov. 1979).
- [4] Nakano, H., Yamauchi, J. and Hashimoto, S.: "Sunflower spiral antenna", Trans. IECE Japan, E64, 12, pp. 736-769(Dec. 1981).
- [5] Yamauchi, J., Nakano, H., and Mimaki, H.: "Balanced helical antenna with tapered open ends", Trans. IECE Japan, J64-B, 4, pp. 279-286(April 1981).
- [6] Egashira, S. and Taguchi, M: "Hall-en type integral equation for antenna composed of straight wires", Paper of Technical Group. TGAP78-15, IECE Japan (June 1978)
- [7] Nakano, H.: "The simplified expression for the kernel of Mei's integral equation (II)", Paper of Technical Group, TGAP80-26, IECE Japan (June 1980).
- [8] Kominami, M. and Rokushima, K.: "On a simplified Hallen's integral equation for continuous wire antennas constructed of straight segments", Trans. IECE Japan, J63-B, 9, pp.941-942(1980).
- [9] Taylor, C.D.: "Electromagnetic scattering from arbitrary configurations of wires": IEEE Trans. Antennas and Propag., pp.662-663 (Sept. 1969).
- [10] Chao, H.H. and Strait, B.J.: "Radiation and scattering by configurations of bent wires with junctions", IEEE Trans. Antennas and Propag., pp.701-702 (Sept.1971).
- [11] R. Mittra, Computer Techniques for Electromagnetics, Chap2, Pergamon Press.
- [12] R.F. Harrington, "Matrix Methods for Field Problems", Proc. IEEE, Vol. 55, Feb. 1967, pp. 136-149
- [13] R.F. Harrington, Field Computat- ion by Moment Methods. New York: Macmillan, 1968