PID 자기 동조 제어기

ⓞ이 정용, 이 상범, 홍 근환, 윤 재강
숭 실 대 학 교　전 자 공 학 과

PID self-tuning controller

Jeong-Yong Lee, Sang-beum Lee, Kun-Hwan Hong, Jae-Gang Youne
Dept. of Electronic Engg., Soong Sil University

Abstract

This paper presents a new algorithm to solve the initial transient problem. Though PID self-tuning controller removed the offset by integal action, there is initial transient. The problem is solved by use of a pole-placement strategy.
The process to be controlled is assumed to be based on a modified version of the design method of Clarke and Gawthrop.

1 서론

지난 20여년 동안 공정이나 주위 환경의 변화에 따라 제어기 계수들을 실시간에 자동적으로 조정 할 수 있는 자기 동조(또는 적응) 제어 시스템에 매우 많은 관심을 기울여왔다. 자기 동조 제어기(STC)는 공정의 매개 변수들을 추정하고 출력과 입력을 매개 변수로 하는 목적 함수를 최소화하는 제어 법칙에 의하여 제어 입력을 구해 출력이 기준 출력을 따라가도록 제어한다. 이러한 자기동조 제어기는 PID 구조를 갖이 않고 있었으나 1980년대에 Isermann, Wittenmark, Astrom등에 의하여 PID 구조를 갖는 자기 동조 제어기가 제시되었다.
이들의 PID 자기동조 제어기는 integal action에 의하여 offset를 재거 했지만 초기과도 현상(initial transient)이 나타났다.
본 논문에서는 이 초기 과도 현상을 개선하기 위하여 초기 예측 계수를 결정하는 알고리즘을 제시하였다.

2 PID 자기 동조제어기

단일 입출력 계통(SISO)의 차분 방정식을 z변환하여 다음과 같은 공정 모델로 한다.

$$A(z^{-1})y(t)=z^{-k}B(z^{-1})u(t)+C(z^{-1})v(t) \quad (1)$$

여기서 y(t)는 출력
u(t)는 입력
v(t)는 noise
t 는 sampling 주기
$A(z^{-1})=1+a_1z^{-1}+\ldots+a_nz^{-n}$
$B(z^{-1})=b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_mz^{-m}$
$C(z^{-1})=1+c_1z^{-1}+\ldots+c_nz^{-n}$
$C(z^{-1})$의 모든 근은 단위원 안에 있다고 가정 한다.

평가 함수로 부터 보조 출력을 다음과 같이 잡는다.

$$\phi(t+k)=P(z^{-1})y(t+k)+Q(z^{-1})u(t)-R(z^{-1})w(t) \quad (2)$$

여기서 w(t)는 set-point
$P(z^{-1}),Q(z^{-1}),\ R(z^{-1})$는 다음 같은 전달 함수이다.

$$P(z^{-1})=\frac{Pn(z^{-1})}{Pd(z^{-1})},\ etc$$

편의상 다음부터는 z^{-1}를 생략한다.
다음과 같은 관계식을 정의한다.

$$C\cdot Pn=A\cdot Pd\cdot E+z^{-k}F \quad (3)$$

위의 관계식과 공정 모델로 부터 다음과 같은 예측 모델을 얻는다.

$$\phi(t+k)=\frac{F}{Pd\cdot C}y(t)+\left(\frac{E\cdot B}{C}+Q\right)u(t)$$
$$-R\cdot w(t)+E\cdot v(t+k) \quad (4)$$

k-step ahead prediction theory에 의하면

$$\phi(t+k)=\phi^{*}(t+k/t)+\tilde{\phi}(t+k/t)$$

여기서 $\phi^{*}(t+k/t)$는 optimum prediction
$\tilde{\phi}(t+k/t)$는 prediction error

$\phi(t)$의 변위를 최소로 하는 제어법칙으로 부터

$$u(t)=\frac{C\cdot R\ w(t)-\hat{F}\cdot y(t)/Pd}{E\cdot B+C\cdot Q}$$

$$= \frac{R \cdot w(t) - \hat{F}\, yf(t)}{G + Q} \qquad (5)$$

여기서 $\hat{F}$ 는 예측 값

$G = E\,B$

$C = 1$

$$yf(t) = \frac{y(t)}{Pd}$$

3 이산치 PID 제어기

이상적인 연속 PID 제어기의 방정식은

$$u(t) = Ko\left(e(t) + \frac{1}{Ti}\int_0^t e(\tau)\, d\tau + Td \frac{d}{dt} e(t)\right) \qquad (6)$$

이다.

여기서 Ko는 gain
Ti 는 적분시간
Td 는 미분시간

e(t) 는 에러 신호로 다음과 같이 정의된다.

$$e(t) = w(t) - y(t) \qquad (7)$$

(6)식은 sampling 시간이 작을 때 차분 방정식으로 근사화 시킬수 있다. 이때 적분부분의 여러가지 근사화 방법 중 직사각형(rectangular) 방법을 사용하여 속도 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\Delta u(t) = Ko\left(e(t) - e(t-1) + \frac{To}{Ti} e(t) + \frac{Td}{To}\left(e(t) - 2e(t-1) + e(t-2)\right)\right) \qquad (8)$$

(8)식이 이산치 PID 제어기 방정식이다.
여기서 To 는 sampling 시간

$$\Delta u(t) = u(t) - u(t-1) \qquad (9)$$

에러 신호를 이산치 PID 제어기 방정식에 대입하면

$$\Delta u(t) = Ko\left(-yf(t) + yf(t-1) + \frac{To}{Ti}\left(w(t) - yf(t)\right) + \frac{Td}{To}\left(-yf(t) + 2yf(t-1) - yf(t-2)\right)\right) \qquad (10)$$

위 식에서 set-point는 적분항에만 존재함을 알수있고 yf(t)는 출력 필터를 거쳐 나온 것이다.

$\Delta u(t)$를 다시 정리하면

$$\Delta u(t) = \frac{Ko\, To}{Ti} w(t) - Ko\left(1 + \frac{To}{Ti} + \frac{Td}{To}\right) yf(t) + Ko\left(1 + 2\frac{Td}{To}\right) yf(t-1) - Ko \frac{Td}{To} yf(t-2) \qquad (11)$$

4 PID 구조를 갖는 자기동조 제어기

STC의 제어법칙을 만족하는 입력을 PID의 속도형과 같은 형태로 나타낸다. STC의 입력 u(t)가 PID구조를 갖기 위해 F 다항식의 차수를 2로 한다. 출력 필터를 적당히 선택하기위해 deg Pd는 1 (first order filter) 또는 0 (no filtering)로 한다.
이에따라 다음을 가정한다.

$$Pd(z^{-1}) = 1 + Pd1\, z^{-1} \qquad (12)$$

출력 y와 set-point w 사이의 정상상태 일치를 위하여 R 를 자유롭게 다음과 같이 선택한다.

$$R = Ho$$

여기서 Ho 를 다음과 같이 정의한다.

$$Ho = \left(\frac{\hat{F}}{Pd}\right)_{z=1} = \frac{\sum_{i=0} \hat{f}i}{1 + Pd1} \qquad (13)$$

STC 제어 법칙에 integal action 를 도입하여 offset 를 제거하기 위해 Q 를 자유롭게 선택하고 다음과 같이 정의 한다.

$$G + Q = \frac{1 - z^{-1}}{\nu} \qquad (14)$$

여기서 ν 는 설계 파라미터로 관례적인 재어기의 이득과 같은 역활를 한다.
(5), (13), (14)식 으로 부터

$$u(t) = \nu \cdot \frac{R \cdot w(t) - \hat{F}\, yf(t)}{1 - z^{-1}} \qquad (15)$$

를 얻는다.

(11)과 (15)식 으로부터

$$\Delta u(t) = \nu\left(Ho \cdot w(t)\right) - \left(fo + f1 z^{-1} + f2 z^{-2}\right) yf(t)) \qquad (16)$$

여기서 출력 필터 yf(t) 는

$$yf(t) = \frac{y(t)}{1 + Pd1 z^{-1}}$$

(16)식이 PID 구조를 갖는 자기동조 재어기이다.
(16) 식과 (11) 식을 비교하여 PID 재어기의 계수를 구하면

$$Ko = \nu\,(f1 + 2f2)/\alpha$$

$$Td = \nu\, f2 \cdot To \,/\, Ko \cdot \alpha$$

$$T_i = \frac{T_o \cdot K_o}{\nu \cdot f_o/\alpha - K_o - T_d \cdot K_o / T_o}$$

$$\alpha = 1 + P_{d1}$$

이다.

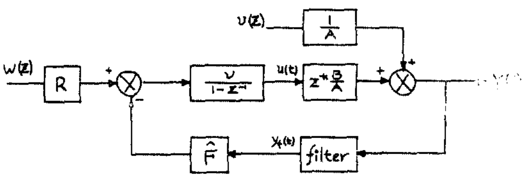

그림 1 PID구조를 갖는 자기동조 제어기

5 초기 예측 계수 결정

필터 $P_{d1} = 0$, $k=1$ 로 놓고
$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$
$B(z^{-1}) = b_o + b_1 z^{-1}$ 로 정의한다.
그림 1 를 전달함수로 나타내면

$$\frac{Y(Z)}{W(Z)} = \frac{z^{-1} R \cdot B}{A(1 - z^{-1}) + \nu z^{-1} \hat{F} \cdot B}$$

$$\frac{Y(Z)}{V(Z)} = \frac{(1 - z^{-1})}{A(1 - z^{-1}) + \nu z^{-1} \hat{F} \cdot B}$$

이다. $\hat{F}$의 초기값을 결정하기 위하여 pole-placement를 사용하면

$$A(1 - z^{-1}) + \nu z^{-1} F \cdot B = D \cdot E$$

여기서 D 와 E는 closed-loop poles으로 미리 정해지며 다음과 같이 정의된다. ($\nu=1$ 일때)

$$D(z) = 1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2}$$

$$E(z) = 1 + e_1 z^{-1} + e_2 z^{-2}$$

(17)식으로 부터 F의 초기값 f_o, f_1, f_2를 구하면

$$f_o = e_1/b_o + (d_1 - a_1 + 1)/b_o$$

$$f_1 = d_2 e_1/b_1 + (d_1/b_1 - b_o d_2/b_1^2) e_2 + a_2/b_1$$

$$f_2 = d_2 e_2 / b_1$$

이다.
이방법에서 $D \cdot E = 0$로 정의된 네개의 극점은 의존적이다. 이때문에 $D(z^{-1})$의 극점이 결정되면 $E(z^{-1})$의 계수는 다음과 같은 관계식을 만족한다.

$$e_2 = e_1 \cdot k_1 + k_2 \qquad (18)$$

6 시뮬레이션

프로세스는 식 (1)에서
$A(z^{-1}) = 1 - 1.5z^{-1} + 0.7z^{-2}$
$B(z^{-1}) = 0.2 + 0.02z^{-1}$
$D(z^{-1}) = 1 - 1.32z^{-1} + 0.43z^{-2}$
으로 주어진다.
$E(z)$ 의 계수는 식 (18)에 의해서 $e_1 = -0.631$, $e_2 = 0.094$로 되고 초기치 f_o, f_1, f_2는 다음과 같다.

$f_o = -12.255$
$f_1 = 4.98$
$f_2 = 0.202$

7 결 론

본 논문에서는 PID 구조를 갖는 자기동조 제어기에서 초기 과도 현상을 제거하기 위해 초기 파라미터 결정 알고리즘을 제시하고 초기 파라미터를 사용해 시뮬레이션한 결과 초기 과도 현상이 현저하게 줄어듬을 보았다.
그러나 $E(z^{-1})$의 계수 선택 문제점이나타나 가장 좋은 계수를 선택하는 것이 앞으로의 과제이다.

참고 문헌

1. D.W. Clarke and P.J. Gawthrop "Self-tuning controller." PROC. IEE Vol.122, No.9,1975
2. F.Cameron and D.E.Sebog, "A self-tuning controller with a PID structure." Int.J. controller,Vol.38,No.2,1983
3. P.J. Gawthrop, "Self-tuning controllers; Algorithms and Implementation.",IEEE trans.aut.contr.,Vol.AC 31,No.3,1986
4. A.Y. Allidina and F.M. Hughes, "Generalized self-tuning controller with pole-assignment.",IEE Proc,Vol.127,No.1,1980
5. Bernard and Cashen, "Direct digital control.",Instr.and contr. syst.,Vol.38 No.9, 1965
6. Phillips, " Digital control system analysis and design."
7. C.J. Harris and S.A. Billings, "Self-tuning and adaptive control; theory and applications."