

16 QAM 시스템에 대한 신호의 진폭 변화와 위상 지터의 영향

한 덕 수\*                      조 성 준\*

\* 한국 항공 대학 통신 정보 공학과

Effects of Amplitude variation and Phase jitter in 16 QAM System

Deog Su HAN\*                      Sung Joon CHO\*

\* Dept. Telecom. and Information Eng. Hankuk Aviation College

ABSTRACT : In this paper, the error rate equation has been derived and evaluated for 16 QAM signals which have sinusoidal amplitude variation at output of diversity circuit and phase jitter by incomplete phase recovery of repeater or receiver. And the numerical results are shown in figures as parameters of carrier to noise power ratio(CNR), variation index of signal amplitude, and rms deviation of phase jitter.

1. 서론

신호가 무선 전송도 상에서 전송될 때 페이딩을 받게되며, 이로 인해 시스템이 열화되기 때문에 이러한 영향을 줄이기 위한 보상 기법으로서 다이버시티 기법을 일반적으로 사용하고 있다. 그러나, 다이버시티 회로를 거쳐도 신호 진폭에는 어느 정도의 잔류 변동 성분이 존재하게 되어 이것이 신호 진폭에 대해 일종의 진폭 변조 성분으로 작용하는 경우가 생기고, 신호의 위상은 여러 중계기를 거칠 경우 각 중계기의 불완전한 위상 동기등으로 인하여 위상 지터의 영향을 받게된다.

본 연구에서는 다이버시티 회로 후단에서의 잔류진폭의 변화가 정현적이고, 위상 지터의 확률 밀도 함수가 가우스 분포를 하는 경우를 가정하여 전송 대역 효율이 좋고 중계에 드는 경비가 종래의 다른 디지털 통신 방식에 비해 매우 저렴하여 현재 마이크로파 통

신에서 가장 각광을 받고 있는 방식인 16 QAM 방식에 대해 진폭의 변화 및 위상 지터의 영향을 오율의 관점에서 해석한다.

2. 해석 모델

본 연구에서의 해석 모델을 그림 1에 나타내었다.

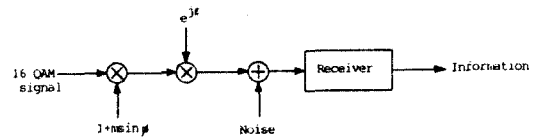


그림 1. 해석 모델

Fig. 1 Analysis model.

2.1 16 QAM 신호

신호 공간상에서의 16 QAM 신호의 표현은 그림 2와 같이 크기가  $A_1$  이고, 위상이  $\theta_1$  인 신호 벡터로 나타내어진다.

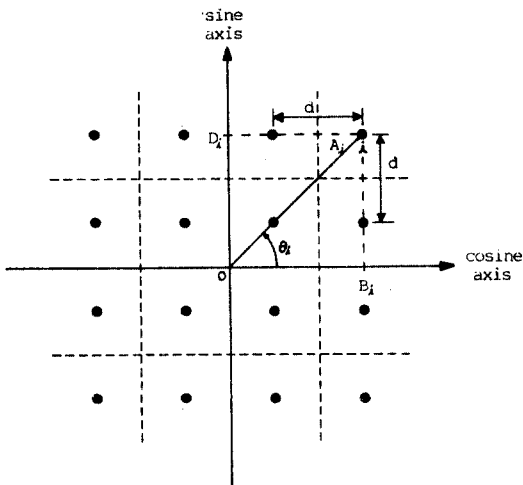


그림 2. 신호 공간상의 16 QAM 신호의 표현  
 Fig. 2 Representation of 16 QAM signal in signal space.

그리고, 16 QAM 신호는 다음과 같이 표현된다.

$$s(t) = A_i \cos(w_c t + \theta_i) = B_i \cos w_c t + D_i \sin w_c t \quad (1)$$

단,  $A_i$  : 신호점  $i$  와 원점과의 길이

( $i = 1, 2, \dots, 15, 16$ )

$\theta_i$  : 신호점  $i$  와 동상 채널(cosine) 축이 이루는 각

$B_i$  : 동상 채널 축상에서의 정보원 신호점

$D_i$  : 역상 채널 축상에서의 정보원 신호점

16 QAM 신호에 있어서 최소 신호점 간의 거리  $d$  는 다음과 같다.

$$d = \frac{\sqrt{2}}{3} A_i \quad (2)$$

단,  $A_i$  : 최대 신호 진폭

16 QAM 파는 진폭이 3가지 값을 가지게 되며, 최대 신호점의 진폭을  $A_i$  이라고 하였을 때 전체 신호점에 대한 평균 전력  $P$  는 다음과 같다.

$$P = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4} A_i^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{5}}{3} A_i \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} A_i \right)^2 \right] = \frac{5}{18} A_i^2 \quad (3)$$

## 2.2 잡음

평균값이 0인 협대역 가우시성 잡음은 다음과 같이

표현 된다.

$$n(t) = n_c(t) \cos w_c t - n_s(t) \sin w_c t \quad (4)$$

여기서,  $n_c(t)$  와  $n_s(t)$  의 확률 밀도 함수는 서로 같으며 이들의 확률 밀도 함수는 다음과 같다.

$$P_n(n_c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{n_c^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad (5-a)$$

$$P_n(n_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{n_s^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad (5-b)$$

단,  $\sigma_n^2$  : 잡음 전력

## 3. 진폭 변화 및 위상 지터의 영향

### 3.1 진폭 변화에 의한 영향

16 QAM 방식에서 신호 벡터의 크기가 부호점을 중심으로 하여 정현적으로 변화하는 경우, 예로써 (I) 상한만을 고려하였을 때 1점의 변화는 그림 3 과 같다

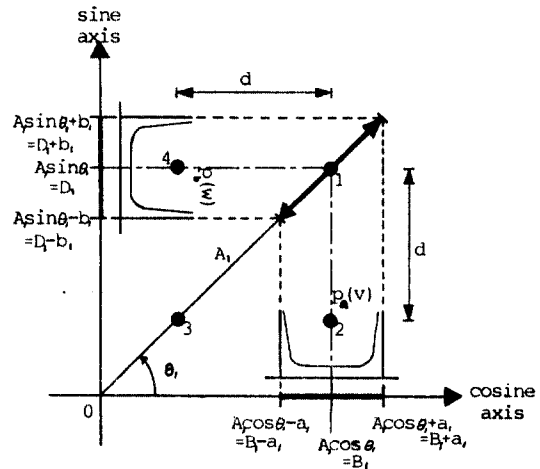


그림 3. 진폭이 변화하는 16 QAM 신호

Fig. 3 Amplitude variation of 16 QAM signal

따라서, 진폭 변화의 영향을 받는 신호점  $i$  의 신호 벡터는 다음과 같이 표현 된다.

$$A_i (1 + m \sin \phi) \angle \theta_i \quad (6)$$

단,  $m$  : 신호 진폭을 중심으로 한 신호 진폭의 변동 지수

여기서, 진폭의 변동 성분  $C_i(\phi)$  는 다음과 같다.

$$C_i(\phi) = mA_i \sin \phi \quad (7)$$

$C_i(\phi)$  에 의한 cosine, sine 축 상의 변위  $C_{ix}(\phi)$ ,  $C_{iy}(\phi)$  는 각각 다음과 같다.

$$C_{ix}(\phi) = mA_i \sin \phi \cos \theta_i \quad (8-a)$$

$$C_{iy}(\phi) = mA_i \sin \phi \sin \theta_i \quad (8-b)$$

여기서,

$$a_i = mA_i \cos \theta_i \quad (9-a)$$

$$b_i = mA_i \sin \theta_i \quad (9-b)$$

라고 놓으면, cosine 축 상에서 신호의 진폭은  $A_i \cos \theta_i$  을 중심으로 하여  $a_i \sin \phi$  로 변화하게 된다. 그런데,  $v = a_i \sin \phi$  에 대한 확률 밀도 함수는 다음과 같다.

$$P_a(v) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{a_i^2 - v^2}} & |v| \leq a_i \\ 0 & |v| > a_i \end{cases} \quad (10)$$

sine 축 상에서도 마찬가지로 신호의 진폭이  $A_i \sin \theta_i$  을 중심으로 하여  $b_i \sin \phi$  로 변화하게 되며  $w = b_i \sin \phi$  에 대한 확률 밀도 함수는 다음과 같다.

$$P_b(w) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{b_i^2 - w^2}} & |w| \leq b_i \\ 0 & |w| > b_i \end{cases} \quad (11)$$

위의  $p_a(v)$ 와  $p_b(w)$ 를 그림 3에 함께 나타내었다. 가우스성 잡음과 신호 진폭의 정현 변화분은 상호 독립이므로 이들의 합  $x = n_c + v$ ,  $y = n_s + w$ 에 대한 확률 밀도 함수는 각각의 확률 밀도 함수의 convolution integral에 의해 다음과 같이 표현된다.<sup>[3]</sup>

$$\begin{aligned} p(x) &= p_a(v) \otimes p_n(n_c) \\ &= \int_{-a_i}^{a_i} p_a(z) p_n(x-z) dz \\ &= \int_{-a_i}^{a_i} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{(x-z)^2}{2\sigma_n^2}\right) \right] \left[ \frac{1}{\pi \sqrt{a_i^2 - z^2}} \right] dz \end{aligned} \quad (12-a)$$

$$\begin{aligned} p(y) &= p_b(w) \otimes p_n(n_s) \\ &= \int_{-b_i}^{b_i} p_b(z) p_n(y-z) dz \\ &= \int_{-b_i}^{b_i} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{(y-z)^2}{2\sigma_n^2}\right) \right] \left[ \frac{1}{\pi \sqrt{b_i^2 - z^2}} \right] dz \end{aligned} \quad (12-b)$$

(12-a)와 (12-b)식에서 각각  $z = a_i \sin \phi$ ,  $z = b_i \sin \phi$ 로 놓고 변수 변환을 하면, 각각의 확률 밀도 함수  $p(x)$ ,  $p(y)$ 는 다음과 같다.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(x-a_i \sin \phi)^2}{2\sigma_n^2}\right] d\phi \quad (13-a)$$

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(y-b_i \sin \phi)^2}{2\sigma_n^2}\right] d\phi \quad (13-b)$$

16 QAM 신호에 있어서 판정 레벨을 최소 부호점간 거리의 반( $d/2$ )으로 하였을 때, 진폭 변화의 영향을 받은 신호가 판정 레벨을 넘어서게 되면 에러가 발생한다. 즉, 신호점  $i$ 에 대한 부호 오류는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P_{ei} &= \text{Prob}[p(x) > \frac{d}{2}] + \text{Prob}[p(y) > \frac{d}{2}] \\ &\quad + \text{Prob}[p(x) < -\frac{d}{2}] + \text{Prob}[p(y) < -\frac{d}{2}] \end{aligned} \quad (14)$$

따라서, 임의의 신호점  $i$ 에 대한 부호 오류식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P_{ei} &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{erfc}\left(\frac{\sqrt{a_i} - m\sqrt{a_i} \cos \theta_i \sin \phi}{\sigma_n}\right) d\phi \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{d}{2}} \text{erfc}\left(\frac{\sqrt{a_i} - m\sqrt{a_i} \sin \theta_i \sin \phi}{\sigma_n}\right) d\phi \right] \end{aligned} \quad (15)$$

단,  $\rho_a = \frac{5A_i^2}{18\sigma_n^2}$  : 평균 전력 대 잡음 전력비

$\rho_i = \frac{A_i^2}{2\sigma_n^2}$  은 1, 2, 3, 4 각 점에 대한 평균

전력 대 잡음 전력비로서 각각 다음과 같다.

$$\begin{cases} \rho_1 = \frac{9}{5} \rho_a \\ \rho_2 = \rho_a \\ \rho_3 = \frac{1}{5} \rho_a \\ \rho_4 = \rho_a \end{cases} \quad (16)$$

또한, 각 점의 위상  $\theta_i$ 는 다음과 같다.

$$\begin{cases} \theta_1 = 45^\circ \\ \theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \\ \theta_3 = 45^\circ \\ \theta_4 = \tan^{-1}(3) \end{cases} \quad (17)$$

(16)식과 (17)식을 (15)식에 대입하여, 신호점 1, 2, 3, 4에 대해 계산한 오류율 각각  $Pe_1, Pe_2, Pe_3, Pe_4$ 라고 하면, 16 QAM 신호의 전체 신호점에 대해 평균

을 위한 평균 부호 오율은 다음과 같다.

$$P_e = \frac{1}{16} [(4 \times \frac{1}{2} P_{e1}) + (4 \times \frac{3}{4} P_{e2}) + (4 \times P_{e3}) + (4 \times \frac{3}{4} P_{e4})] \\ = \frac{1}{16} [2P_{e1} + 3P_{e2} + 4P_{e3} + 3P_{e4}] \\ = \frac{1}{8} P_{e1} + \frac{3}{16} P_{e2} + \frac{1}{4} P_{e3} + \frac{3}{16} P_{e4} \quad (18)$$

### 3.2 위상 지터의 영향

위상 지터의 영향을 받는 16 QAM 신호의 예로써 (I) 상한의 1 점에 대한 것을 신호 공간상에 표현하면 그림 4 와 같다.

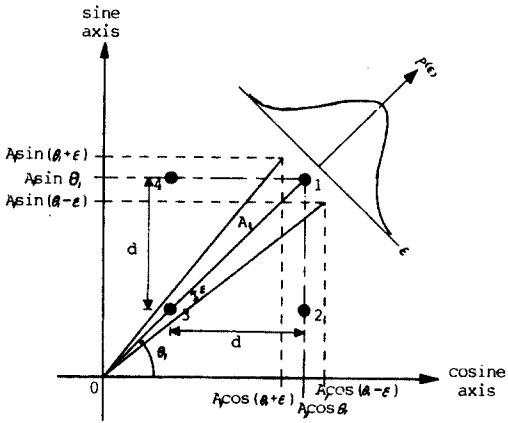


그림 4. 위상 지터의 영향을 받는 16 QAM 신호

Fig. 4 16 QAM signal influenced by phase jitter.

위상 지터의 영향을 받은 신호점  $i$  에 해당하는 신호 벡터는 다음과 같이 표현 된다.

$$A_i / \theta_i + \epsilon \quad (19)$$

단,  $\epsilon$  : 위상 지터 ( $^\circ$ )

판정 레벨을 최소 부호점간 거리의 반( $d/2$ )으로 하였을때, 그림 4 에 나타낸 바와 같이 위상 지터의 영향을 받은 신호는 잡음에 의해 다음과 같은 경우에 에러가 발생한다.

$$P_{ei} = \text{Prob} \left\{ \left[ \frac{d}{2} - (A_i \cos(\theta_i - \epsilon) - A_i \cos \theta_i) \right] < n_i \right\} \\ + \text{Prob} \left\{ \left[ \frac{d}{2} - (A_i \sin(\theta_i + \epsilon) - A_i \sin \theta_i) \right] < n_i \right\} \\ = \text{Prob} \left\{ \left[ -\frac{d}{2} + (A_i \cos \theta_i - A_i \cos(\theta_i + \epsilon)) \right] > n_i \right\} \\ + \text{Prob} \left\{ \left[ -\frac{d}{2} + (A_i \sin \theta_i - A_i \sin(\theta_i - \epsilon)) \right] > n_i \right\} \quad (20)$$

$p_n(n_i)$ ,  $p_n(n_i)$ 를 고려하여 첫 식을 풀면 다음과 같이 된다.

$$P_{ei} = 2 \int_{n_i}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_n} \exp\left(-\frac{n_i^2}{2\sigma_n^2}\right) dn_c \\ + 2 \int_{n_i}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_n} \exp\left(-\frac{n_i^2}{2\sigma_n^2}\right) dn_s \\ \text{단, } u_r = \frac{d}{2} - [A_i \cos(\theta_i - \epsilon) - A_i \cos \theta_i] \\ u_s = \frac{d}{2} - [A_i \sin(\theta_i + \epsilon) - A_i \sin \theta_i] \quad (21)$$

(21)식에서  $t_r = \frac{n_c}{\sqrt{2}\sigma_n}$ ,  $t_s = \frac{n_s}{\sqrt{2}\sigma_n}$ 로 놓고 변수 변환을 행하면 다음과 같이 된다.

$$P_{ei} = \text{erfc} \left[ \frac{d - 2A_i (\cos(\theta_i - \epsilon) - \cos \theta_i)}{2\sqrt{2}\sigma_n} \right] \\ + \text{erfc} \left[ \frac{d - 2A_i (\sin(\theta_i + \epsilon) - \sin \theta_i)}{2\sqrt{2}\sigma_n} \right] \\ = \text{erfc} \left[ \sqrt{\frac{A_i}{10}} - \sqrt{A_i} (\cos(\theta_i - \epsilon) - \cos \theta_i) \right] \\ + \text{erfc} \left[ \sqrt{\frac{A_i}{10}} - \sqrt{A_i} (\sin(\theta_i + \epsilon) - \sin \theta_i) \right] \quad (22)$$

위 식을  $\epsilon$  에 관해 평균을 취하면, 위상 지터의 영향에 의한 부호 오율  $P_{ei}$  를 구할 수 있다. 여기서는 위상 지터  $\epsilon$  의 확률 밀도 함수가 다음과 같이 가우스 분포를 한다고 가정한다.<sup>[4]</sup>

$$p(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Delta \epsilon} \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{2(\Delta \epsilon)^2}\right) \quad (23)$$

단,  $\Delta \epsilon$  :  $\epsilon$  의 실효 편차

따라서, 위상 지터의 영향을 받은 신호점  $i$  에 대한 부호 오율은 식(22)과 식(23)으로 부터 다음과 같이 된다.

$$P_{ei} = \int_{-\infty}^{\infty} [P_{ei} | \epsilon] p(\epsilon) d\epsilon \quad (24)$$

여기서, 계산상 적분의 상하한을 각각  $5\Delta \epsilon$ ,  $-5\Delta \epsilon$ 으로 잡으면 다음과 같이 된다.

$$P_{ei} = \int_{-5\Delta \epsilon}^{5\Delta \epsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Delta \epsilon} \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{2(\Delta \epsilon)^2}\right) \cdot \\ \left[ \text{erfc} \left[ \sqrt{\frac{A_i}{10}} - \sqrt{A_i} (\cos(\theta_i - \epsilon) - \cos \theta_i) \right] \right. \\ \left. + \text{erfc} \left[ \sqrt{\frac{A_i}{10}} - \sqrt{A_i} (\sin(\theta_i + \epsilon) - \sin \theta_i) \right] \right] d\epsilon \quad (25)$$

전체 신호점에 대한 평균 부호 오율은 식(18)과 마찬가지로 다음과 같이 구해진다.

$$P_e = \frac{1}{8} P_{e1} + \frac{3}{16} P_{e2} + \frac{1}{4} P_{e3} + \frac{3}{16} P_{e4} \quad (26)$$

### 3.3 진폭 변화와 위상 지터의 영향

16 QAM 신호가 진폭 변화와 위상 지터의 영향을 동시에 받을 경우는, 진폭의 영향과 위상의 영향은 서

로 독립적이라고 가정하여, 앞에서 유도된 식(15)와 식(25)를 결합하면 신호점  $i$  에 대한 부호 오류식은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P_{ei} = \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}\Delta\epsilon} \int_{-\frac{\Delta\epsilon}{2}}^{\frac{\Delta\epsilon}{2}} \left[ \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{P_s}{10}} - \sqrt{A_i} \cos(\theta_i - \epsilon)\right) - \cos\theta_i - m\sqrt{A_i} \cos(\theta_i - \epsilon) \sin\phi + \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{P_s}{10}} - \sqrt{A_i} (\sin(\theta_i + \epsilon) - \sin\theta_i) - m\sqrt{A_i} \sin(\theta_i + \epsilon) \sin\phi\right) \right] \exp\left(-\frac{2}{2(\Delta\epsilon)^2}\right) d\phi d\epsilon \quad (27)$$

따라서, 전체 신호점에 대한 평균 부호 오류는 식(18)과 마찬가지로 다음과 같이 구해진다.

$$P_e = \frac{1}{8}P_{e1} + \frac{3}{16}P_{e2} + \frac{1}{4}P_{e3} + \frac{3}{16}P_{e4} \quad (28)$$

#### 4. 수치 계산 및 검토

앞에서 유도한 오류식 (15), (25), (27)에서 반송파 전력 대 잡음 전력비 CNR, 진폭의 변동 지수  $m$ , 위상 지터의 실효 편차의 값  $\Delta\epsilon$ 를 변수로 하여 수치 계산한 결과를 그림으로 나타내었다.

그림 5는 진폭 변화만의 영향을 받는 16 QAM 신호의 오류 특성을 CNR 과  $m$ 을 변수로 하여 나타낸 것으로  $m$ 의 값의 변화에 따라 성능이 현저하게 열화됨을 알 수 있다. 그림 6은 위상 지터만의 영향을 받는 16 QAM 신호의 오류 특성을 CNR 과  $\Delta\epsilon$ 를 변수로 하여 나타낸 것이다. 그림 7~9에는 진폭 변화와 위상 지터의 영향을 동시에 받는 16 QAM 신호의 오류 특성을 나타낸 것인데  $\Delta\epsilon$ 의 값이 각각  $2^\circ, 3^\circ, 4^\circ$ 일 때  $m$ 의 변화에 따른 열화 정도를 알 수 있다. 그림 10은 진폭의 변동 지수를 일정한 값 즉,  $m=0.2$ 로 했을 경우의 오류 특성을 나타낸 것인데 이 그림으로부터 어느 특성의 오류값, 예를 들어  $10^{-4}$ 을 달성하기 위해서는 위상 지터의 영향이 없을 때에 비해,  $\Delta\epsilon$ 가  $2^\circ, 3^\circ, 4^\circ$ 로 증가하는데 따라 CNR면에서 각각 0.7dB, 2.3dB, 5.7dB로, 열화의 정도가 급격해짐을 알 수 있다.

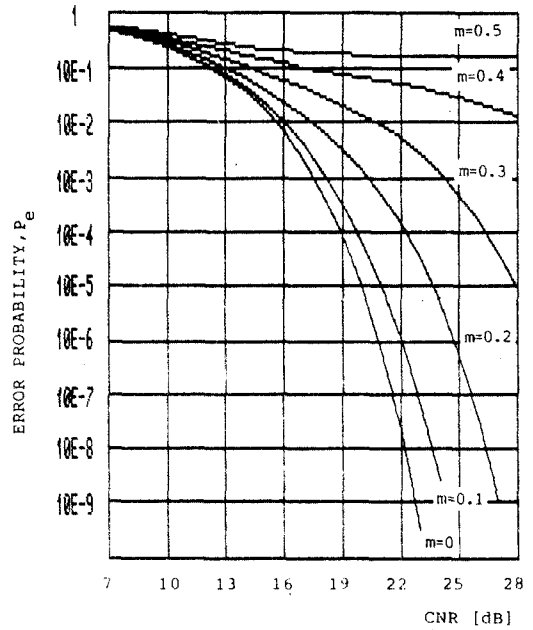


그림 5. 진폭 변화의 영향을 받는 16 QAM 신호의 오류 특성( $\Delta\epsilon=0^\circ$ 일 경우)

Fig. 5 Error rate performance of 16 QAM signal with amplitude variation when  $\Delta\epsilon=0^\circ$ .

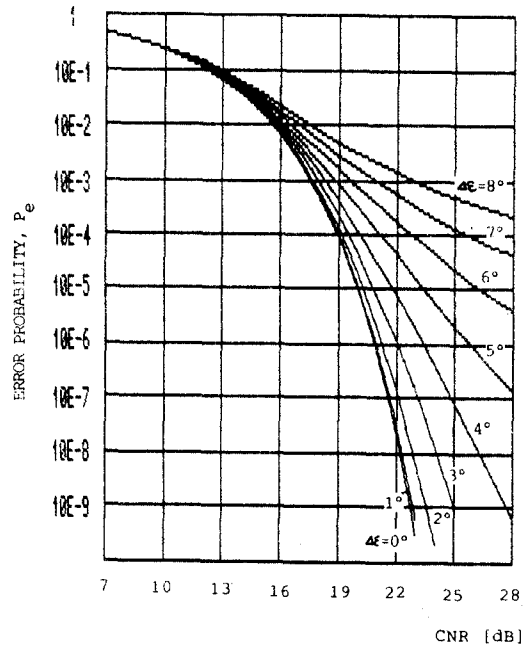


그림 6. 위상 지터의 영향을 받는 16 QAM 신호의 오류 특성( $m=0$ 일 경우)

Fig. 6 Error rate performance of 16 QAM signal with phase jitter when  $m=0$ .

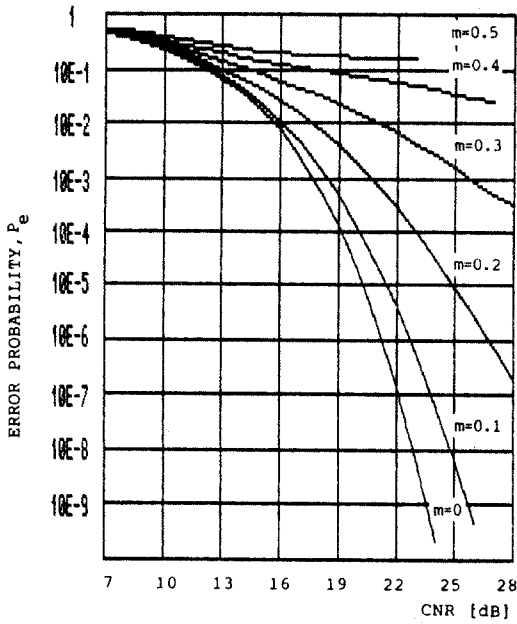


그림 7. m의 변화에 따른 16 QAM 신호의 오율 특성 ( $\Delta E=2^\circ$  일 경우)  
 Fig. 7 Error rate performance of 16 QAM signal with various m when  $\Delta E=2^\circ$ .

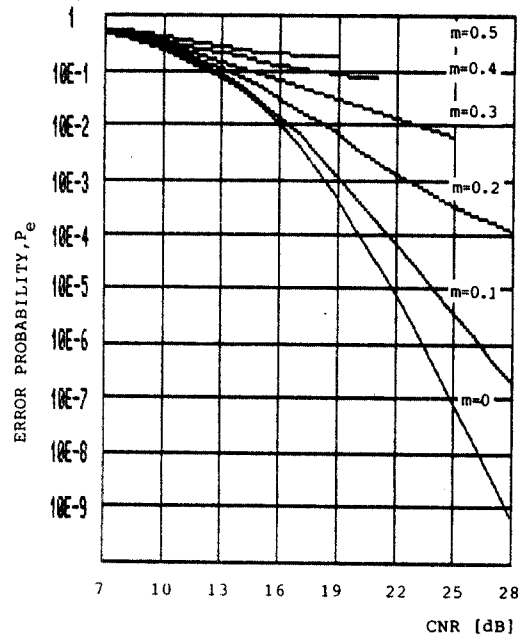


그림 9. m의 변화에 따른 16 QAM 신호의 오율 특성 ( $\Delta E=4^\circ$  일 경우)  
 Fig. 9 Error rate performance of 16 QAM signal with various m when  $\Delta E=4^\circ$ .

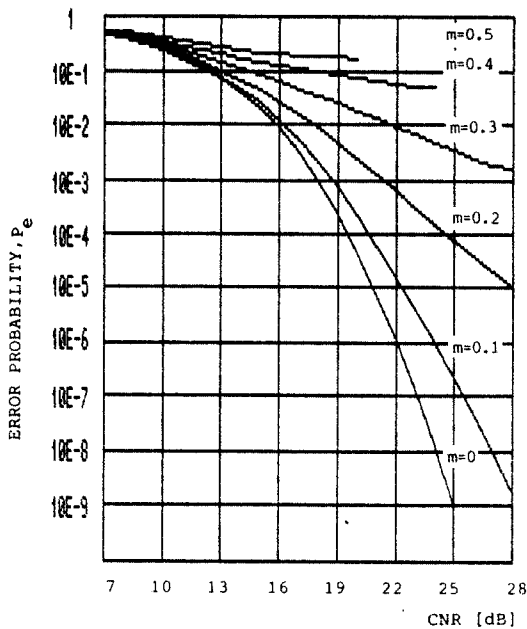


그림 8. m의 변화에 따른 16 QAM 신호의 오율 특성 ( $\Delta E=3^\circ$  일 경우)  
 Fig. 8 Error rate performance of 16 QAM signal with various m when  $\Delta E=3^\circ$ .

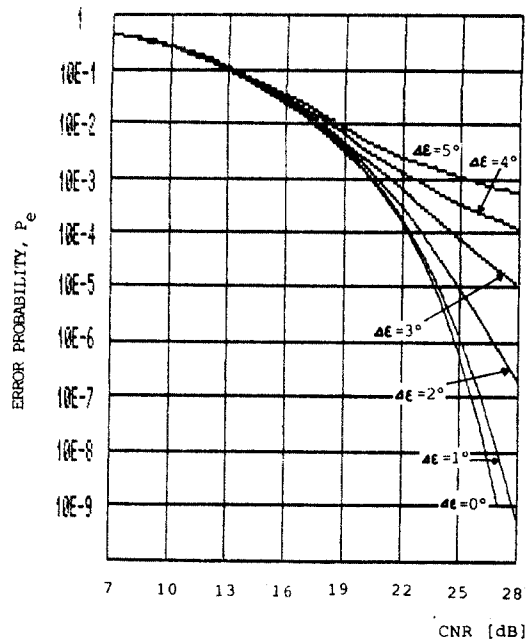


그림 10.  $\Delta E$ 의 변화에 따른 16 QAM 신호의 오율 특성 ( $m=0.2$  일 경우)  
 Fig. 10 Error rate performance of 16 QAM signal with various  $\Delta E$  when  $m=0.2$ .

참 고 문 헌

- [1] 조성준, "16 QAM(직교 진폭 변조) 디지털 마이크로파 통신 방식," 무선 제19호, pp.37-41, 1986년 3월, 한국 무선 중사자 협회.
- [2] A.B.Carlson, "Communication system," New York: McGraw-Hill, 1986.
- [3] A.Papoulis, "Probability, random variables, and stochastic processes," New York: McGraw-Hill, 1984.
- [4] K.Feher, "Digital communications," Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1983.
- [5] I.S.Gradshcheyn, I.M.Ryzhik, "Tables of integral of series and products," New York: Academic Press, 1980.