

모빌 레디오 채널에서 GMSK의 에러 발생 확률 연구

정 영 모 \* 이 상 욱 \* 김 재 명 \*\*

\* 서울대학교 공과대학 제어계측공학과  
\*\* 한국전자통신연구소

On the bit error probability of GMSK over a mobile radio channel

Young Mo Chung \* Sang Uk Lee \* Jae Myung Kim \*\*

\* Dept. of Control and Instrumentation Eng., Seoul National University  
\*\* Electronics and Telecommunications Research Institute

ABSTRACT

GMSK is regarded as one of promising modulation techniques for a digital mobile radio. In this paper, we investigated bit error rates of GMSK on the mobile radio channel when an MSK-type receiver is used. We assume the receiver recovers a carrier phase perfectly and the channel is slow fading. A closed form expression has been derived for the bit error probability of GMSK over the mobile radio channel. And numerical results are presented and compared with those of MSK.

1. 서 론

최근 디지털 방식 모빌 레디오에 대한 관심이 높아지고 있다[1]. 디지털 통신을 하게 되면 비화가 용이해 질 뿐 아니라, 데이터 통신을 동시에 할 수 있게 되는 장점이 있다. 그러나 모빌 레디오에서 디지털 통신을 변복조하는 기술은 다음과 같은 제약 조건이 있다. 첫째, 모빌 레디오의 대역폭이 제한되므로 변조된 신호는 좁은 대역의 스펙트럼을 차지하여야 하고, 둘째 모빌 레디오 채널에서 생기는 페이딩으로 인하여 포락선의 크기가 시간에 따라 임의로 변화하므로 진폭에 정보를 실는 변조법은 적당하지 않다. 그리고 셋째, 복조시에 에러가 적게 발생하여야 한다는 것이다. 현재까지 모빌 레디오를 위한 변조 기법으로 제안된 것중 유망한 것으로 MSK(minimum shift keying)[2]와 GMSK(Gaussian baseband filtered MSK)[3]가 있다. GMSK는 MSK에 비하여 스펙트럼의 효율은 좋으나 AWGN(additive white Gaussian noise) 하에서 에러 발생확률은 더 높다고 알려져 있다[4,5].

모빌레디오 채널에서의 에러발생확률은 GMSK의 비동기 검파인 경우 현재 연구 사례가 발표 되어져 있으나, 동기검파인 경우에는 이론적인 결과치는 아직 제시되어 있지 않고 Murota[3]의 실험결과만 발표되어 있다. 본 논문에서는 모빌레디오 채널에서 동기검파의 경우 GMSK의 에러 발생확률을 구하고 이결과를 Murota의 실험결과와 비교하였다. 또한, 이결과가 모빌 레디오 채널에서의 MSK의 에러 발생확률[3]과도 비교 되었다.

모빌 레디오 채널은 슬로우 페이딩 채널이라고 가정하였으며 동기 수신기로는 MSK형 수신기를 선택하였다. 또한 수신기에서 동기 에러는 없는 것으로 가정하였다.

본 논문의 순서는 다음과 같다. 2장에서는 GMSK 신호의 성질을 소개하였고, 3장에서는 MSK형 수신기의 소개와 이 수신기의 AWGN하에서의 에러발생 확률을 고찰하였다. 그리고 4장에서는 페이딩 채널에서의 GMSK의 에러 발생 확률을 구하였다. 마지막 5장에서는 결론을 제시하였다.

2. GMSK 신호의 성질

MSK 신호의 위상은 연속적이지만 비트 천이시간에서 주파수는 불연속적인 값을 갖는다. 베이스 밴드에서의 NRZ(non-return to zero) 신호를 가우시안 필터를 통과시켜 위상도 연속적이 되게하고 비트 천이 시간에서 주파수도 연속적으로 변화하도록 한 것이 GMSK이다. GMSK의 변조기를 그림 1에 보였다. Svensson[6]에 의하면 GMSK 신호는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$s(t) = \sqrt{2E_b/T} \cos(2\pi f_c t + \phi(t, \bar{\alpha})) \quad (1)$$

여기서  $\bar{\alpha}$ 는  $(\dots, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \dots)$ 으로 각각의  $\alpha_i$ 는 +1과 -1의 데이터를 나타내고  $E_b$ 는 비트당 전송 에너지,  $T$ 는 한 비트의 주기이고,  $f_c$ 는 반송파의 주파수이다.  $\phi$ 는 위상으로 식 (2)와 같다.

$$\phi(t, \bar{\alpha}) = \pi \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i q(t-iT) \quad (2)$$

여기서  $q(t)$ 는 한 비트에 의한 위상의 변화율 나타내는데 주파수의 변화율 나타내는 함수  $g(t)$ 와 다음과 같은 관계가 있다.

$$q(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \quad (3)$$

GMSK에서  $g(t)$ 는 식 (4)와 같다.

$$g(t) = \frac{1}{2T} \left\{ Q\left(\frac{2\pi B_b}{\sqrt{\ln 2}} \frac{t-T/2}{T}\right) - Q\left(\frac{2\pi B_b}{\sqrt{\ln 2}} \frac{t+T/2}{T}\right) \right\} \quad (4)$$

여기서  $Q(t)$ 는 다음과 같다.

$$Q(t) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\tau^2/2) d\tau \quad (5)$$

식 (4)에서  $B_b$ 는 가우시안 필터의 3dB 대역폭을 나타내는데, 본 논문에서는  $B_b T = 0.25$ 로 하였다. 그리고  $g(t)$ 는 이론적으로  $(-\infty, \infty)$ 의 모든 구간에서 0이 아닌 값을 가지나,  $t$ 의 절댓값이 커짐에 따라 급격히 작아지므로 계산의 편의상 0이 아닌 구간을  $5T$ 로 하였다. 각각의  $g(t)$ 를 적분한 것은 0.5의 값을 가지나 여러 시이퀀스의  $g(t)$ 는 인접 시이퀀스와의 간섭을 초래한다. 위상  $\phi$ 의 여러 시이퀀스에 대한 제약을 그림 2에 보였다.

### 3. MSK형 수신기와 AWGN하에서의 에러발생확률

MSK형 수신기는 동기식 검파기로서 FSK 신호의 위상에 포함된 정보를 이용하여 송신된 디지털 신호를 검출하는 것으로 잡음에 의한 영향도 적게 받을 뿐 아니라 동기신호를 추출해 내기 쉽다는 장점이 있다[7,8]. 그림 3에 MSK형 수신기의 블록선도를 보였다. 필터  $h(t)$ 는 MSK 신호에 적합이 되는 것을 선택하였으며 입력스 응답은 식 (6)과 같다.

$$h(t) = \begin{cases} \text{SIN}(\pi t / (2T)) & , 0 \leq t \leq 2T \\ 0 & , \text{그외} \end{cases} \quad (6)$$

이제 AWGN 조건하에서 에러 발생확률을 구하기 위하여 수신기의 입력단의 신호를  $r(t)$ 라 한다면 식 (7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$r(t) = \sqrt{2E_b/T} \text{COS}(2\pi f_c t + \phi(t, \bar{\alpha})) + n(t) \quad (7)$$

여기서  $n(t)$ 는 AWGN 이고 단면 전력 밀도는  $N_0$  Watt/Hz 이다. 그러면 그림 3의 수신기에서 in-phase 채널인 윗쪽의 가지에서 샘플러의 출력은 다음과 같다.

$$X_1 = \sqrt{2E_b/T} \{h(t) * \text{COS}(\phi(t, \bar{\alpha}))\} \Big|_{t=0}^{t=2T} + N \\ = \sqrt{2E_b T} \mu(\bar{\alpha}) + N \quad (8)$$

식 (8)에서  $\mu(\bar{\alpha})$ 는 식 (9)와 같고 랜덤 변수  $N$ 의 분산은 식 (10)과 같이 된다.

$$\mu(\bar{\alpha}) = 1/T \{h(t) * \text{COS}(\phi(t, \bar{\alpha}))\} \Big|_{t=0}^{t=2T} \quad (9)$$

$$\text{var}\{N\} = \sigma^2 = N_0 \int_0^{2T} h^2(t) dt = N_0 T \quad (10)$$

식 (9)의 샘플값은 시이퀀스  $\bar{\alpha}$ 에 따라 양과 음이 결정된다.  $\mu$ 의 값을 양이 되게 하는 시이퀀스를  $\bar{\alpha}_i$ 라 한다면  $\sqrt{2E_b T} \mu(\bar{\alpha}_i)$ 가 잡음에 의하여 음으로 판단되어 에러가 일어나는 확률은 식 (11)과 같다.

$$P_{ei} = Q\{\sqrt{2E_b T} \mu(\bar{\alpha}_i)\} = Q\{\sqrt{2E_b/N_0} \mu(\bar{\alpha}_i)\} \quad (11)$$

MSK 신호의 경우에는  $\mu(\bar{\alpha}_i)$ 가 1의 값을 가지므로 잡음에 의한 에러 발생확률은 식 (12)와 같이 된다.

$$P_e = Q\{\sqrt{2E_b/N_0}\} \quad (12)$$

GMSK 신호의 경우, 가우시안 필터링된 펄스의 길이를  $5T$ 로 제한하여 식 (8)과 같은 컨벌루션 적분을 하게 되면 필터에 영향을 미치는 시이퀀스의 심벌 수는 6이 된다. 그림 2의 위상 제적에서 볼 수 있듯이 초기 위상에 의한 영향을 줄이기 위하여 시이퀀스의 길이는 7로 한다. 즉,  $\bar{\alpha}_i = (\alpha_{-4}, \alpha_{-3}, \alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ 로 고려한다. 어느 특정한 시이퀀스  $\bar{\alpha}_i$ 에 의하여 에러 발생 확률은 식 (11)과 같으므로 이를 모든  $i$ 에 대하여 평균을 내면 in-phase 채널에서의 에러 발생 확률이 된다.

$$P_e = \sum_{i=1}^M Q\{\sqrt{2E_b/N_0} \mu(\bar{\alpha}_i)\} \quad (13)$$

여기서  $M$ 은 2이다.

quadrature 채널은 in-phase 채널과 조건이 같으므로 위와 같은 방법으로 에러 발생 확률을 구하면 역시 식 (13)과 같다. 따라서 MSK형 수신기에서 비트 에러 발생 확률을 구하면 다음과 같다[9].

$$P_b = 2P_e(1 - P_e) \quad (14)$$

GMSK의 비트 에러 발생 확률에 대한 계산 결과를 그림 4에 MSK의 계산 결과와 비교하여 도시하였고, 그림 5에는 Murota[3]가 구한 실험결과와 비교하여

도시하였다. 그리고 그림 6에서는 수신기 필터 출력에서의 eye pattern을 보였다. GMSK는 베이스밴드와 NRZ 신호를 가우시안 저역 통과 필터링을 하므로 대역폭이 좁아지는 장점은 생기나 인접한 심벌 간의 간섭(intersymbol interference: ISI)을 초래하여 잡음에 의한 에러 발생 확률이 높아지게 된다. 그림 5의 결과에서 GMSK는 MSK에 비하여  $P_b = 10^{-5}$ 에서 약 1dB의 손실이 있음을 고찰할 수 있다. 여기서 MSK의 에러 발생 확률은 식 (12)와 식 (14)의 결과를 이용하여 그림 6의 eye pattern은 ISI에 의한 영향으로 여러 제적을 가짐을 볼 수 있다. 또한 eye opening의 최대값의 평균이 1.93으로 MSK의 2보다 작은 값을 가진다는 것은 GMSK의 에러 발생 확률이 MSK보다 더 크다는 것을 설명해 준다.

### 4. 슬로우 페이딩 채널에서의 에러발생확률

Rayleigh 페이딩 채널을 통과하여 수신된 수신파는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$r(t) = \sqrt{2E_b/T} R(t) \text{COS}\{2\pi f_c t + \theta(t, \bar{\alpha}) + \theta(t)\} + n(t) \quad (15)$$

여기에서  $R(t)$ 와  $\theta(t)$ 는 다경로 전송에 의하여 생긴 것으로  $R(t)$ 는 Rayleigh 프로세스가 되고  $\theta(t)$ 는  $(0, 2\pi)$  사이에서의 균일(uniform) 프로세스가 된다. 수신기에서 수신파의 위상을 정확히 추적(tracking)한다고 가정하면 그림 3에서 신호 성분의 필터 출력은 다음과 같다.

$$s_1(t) = \sqrt{2E_b/T} R(t) \{h(t) * \text{COS}(\phi(t, \bar{\alpha})) + h(t) * \text{COS}(4\pi f_c t + \phi(t, \bar{\alpha}) + 2\theta(t))\} \quad (16)$$

여기에서 \*는 컨벌루션 적분을 나타낸다. 또한 슬로우 페이딩의 경우 식 (16)에서  $R(t)$ 와  $\theta(t)$ 의 랜덤 프로세스는  $(0, 2T)$ 의 시간내에서 통계적 성질이 변하지 않으므로 랜덤 변수  $R, \theta$ 로 볼 수 있다. 따라서 식 (16)은 식 (17)과 같이 간단히 될 수 있다.

$$s_1(t) = \sqrt{2E_b/T} R \{h(t) * \text{COS}(\phi(t, \bar{\alpha}))\} \quad (17)$$

그러므로 잡음이 더하여진 샘플러의 출력은 다음과 같다.

$$X_1 = \sqrt{2E_b T} R \mu(\bar{\alpha}) + N \quad (18)$$

특히, Hansen[10]에 의하면 짧은 시간의 페이딩 모델은 식 (19)와 같은 Rayleigh 확률 밀도 함수로 나타낼 수 있다.

$$f_r(r) = \begin{cases} r/x_0 \cdot \exp\{-r/(2x_0)\} & , r \geq 0 \\ 0 & , \text{그외} \end{cases} \quad (19)$$

여기서  $r$ 은 진폭,  $x_0$ 는 평균 수신 전력이다. 따라서 식 (15)와 같은 수신파의 평균 수신 전력을  $E_b/T$ 로 하기 위하여 랜덤 변수  $R$ 은 다음과 같은 확률 밀도 함수를 갖는다고 생각한다.

$$f_r(r) = \begin{cases} 2r \cdot \exp(-r) & , r \geq 0 \\ 0 & , \text{그외} \end{cases} \quad (20)$$

그러면 식 (18)의  $\mu$ 를 양으로 하는 시이퀀스  $\bar{\alpha}_i$ 가 전송되었을 때 잡음에 의하여  $X_1$ 을 음으로 판단할 확률은 다음과 같다.

$$P_{ei} = \Pr\{\sqrt{2E_b T} R \mu(\bar{\alpha}_i) < N\} \\ = \iint_{n > \sqrt{2E_b T} \mu(\bar{\alpha}_i) r} f_{NR}(n, r) dn dr \quad (21)$$

여기서  $f_{NR}(n, r)$ 은 랜덤 변수  $N$ 과  $R$ 의 조인트 확률 밀도 함수이다.  $N$ 과  $R$ 은 통계적 독립이므로 식 (21)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Pe_i = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{f_N(n)dn}{2EbT} \mu(\bar{\alpha}_i) r \{ fr(r)dr \} \quad (22)$$

따라서 in-phase 채널에서의 에러 발생 확률  $Pe$  는 모든  $i$  에 대하여 평균을 구한 것이 된다.

$$Pe = \sum_{i=1}^M \int_0^{\infty} Q\{\sqrt{2Eb/No} \mu(\bar{\alpha}_i) r\} fr(r)dr \quad (23)$$

quadrature 채널에서의 에러 발생 확률은 역시 in-phase 채널에서의 조건이 같으므로 식 (23)과 같은 결과를 얻는다. 또한 비트에러 발생 확률  $P_b$  는 3장에서와 같이  $Pe$ 와 식 (14)의 동일한 관계를 갖는다.

식 (23)의 페이딩 채널에서의 에러 발생 확률을 계산하는 데는 가우시안 베이스 밴드 필터링, 주파수에서 위상으로의 변환, 필터와의 컨벌루션, Q 함수 그리고 랜덤 변수  $R$ 에 대한 에버리징(averaging) 등에 적분 계산이 쓰이는데 모두 수치적인 적분을 필요로 한다. 식 (5)와 식 (22)의  $Q$  함수는 15 차의 GQR(Gaussian quadrature rule)[11]을 써서 구하였으며, 나머지 적분들은 사다리꼴 공식을 사용하였다. 사다리꼴 공식에서 발생하는 적분 오차는 적분 간격의 제공에 비례하여 줄어들므로 적분 간격이 작을수록 적분 오차는 줄어들게 되지만 계산시간은 늘어나게 된다. 본 논문에서의 적분간격은 0.05로 하였는데 적분간격을 반으로 줄였을 때 적분계산 결과의 변화는 거의 없었다. 그림 7에 GMSK의 비트 에러 발생 확률에 대한 계산 결과를 MSK의 계산 결과와 비교하였고, 또한 Murota의 실험 결과와도 비교하여 도시하였다. 그림 7에서 위의 두 곡선은 Murota의 실험 결과 [3]이고 아래의 두 곡선은 계산 결과이다. 계산 결과에 의하면 GMSK는  $P_b=10^{-5}$ 에서 MSK에 비해 약 0.4dB의 손실이 생길 수 있다.

## 5. 결론

본 논문에서는 동기식 수신기인 MSK형 수신기를 사용하였을 때 GMSK의 AWGN 및 Rayleigh 페이딩 채널의 경우 비트 에러 발생 확률을 수치계산을 통하여 결과를 얻을 수 있는 단원칙으로 구하였다. 이때, 페이딩 채널은 비트 주기에 비하여 페이딩의 속도가 느린 슬로우 페이딩 채널이라고 가정하였으며 수신기에서 동기신호와 샘플링 시각의 에러는 없는 것으로 가정하였다. 이렇게하여 구한 AWGN 및 Rayleigh 페이딩 채널에서의 비트 에러 발생 확률을 평균  $E_b/No$ 에 대하여 도시하였으며, 이 결과를 Murota가 실험으로 얻은 결과와 비교하여 잘 일치함을 확인하였다. 또한, GMSK와 MSK의 에러 발생 확률도 비교되었는데 AWGN의 경우  $P_b=10^{-5}$ 에서 GMSK가 약 1dB 정도의 손실을 보였고, 페이딩 채널에서는  $P_b=10^{-3}$ 에서 약 0.4 dB의 손실을 보였다.

## 참 고 문 헌

1. H. Suzuki and et.al., "A single-chip coherent demodulator for mobile radio transmission," IEEE trans. VT, vol. VT-34, no.4, pp.157-168, Nov. 1985.
2. R.de Buda, "Coherent demodulation of frequency-shift keying with low deviation ratio," IEEE trans. Comm., vol.COM-20, pp.429-435, Jun. 1972.
3. K. Murota and K. Hirade, "GMSK modulation for digital mobile telephony," IEEE trans. Comm., vol.COM-29, no.7, pp.1044-1050, Jul. 1981.
4. A.Svensson and C-E.Sundberg, "Serial MSK-type detection of partial response continuous phase modulation," IEEE trans. Comm., vol.COM-33, no.1, pp.44-52, Jan. 1985.

5. A. Svensson and C-E. Sundberg, "Optimum MSK-type receivers for CPM on Gaussian and Rayleigh fading channels," IEE Proc., vol.131, Pt. F, no.5, pp.480-490, Aug. 1984.
6. N.A.B.Svensson and C-E.W.Sundberg, "Performance evaluation of differential and discriminator detection of continuous phase modulation," IEEE trans.VT, VT-35, no.3, pp.106-117, Aug.1986.
7. S. Pasupathy, "Minimum shift keying: A spectrally efficient modulation," IEEE Comm.Mag., pp.14-22, Jul. 1979.
8. R. B. Rhodes, Jr. and et al., "MSK-type reception of continuous phase modulation: Cochannel and adjacent channel interference," IEEE trans. Comm., vol. COM-35, no. 2, pp.185-193, Feb. 1987.
9. S. Haykin, Communication Systems, 2nd Ed., John Wiley & Sons, 1983.
10. F.Hansen and F.I.Meno, "Mobile fading-Rayleigh and lognormal superimposed," IEEE trans. VT, vol. VT-26, no.4, pp.332-335, Nov. 1977.
11. B.Carnahan and et.al., Applied numerical method, John Wiley & Sons, 1969.

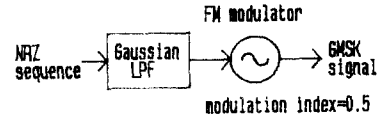


그림 1. GMSK 변조기의 블록선도

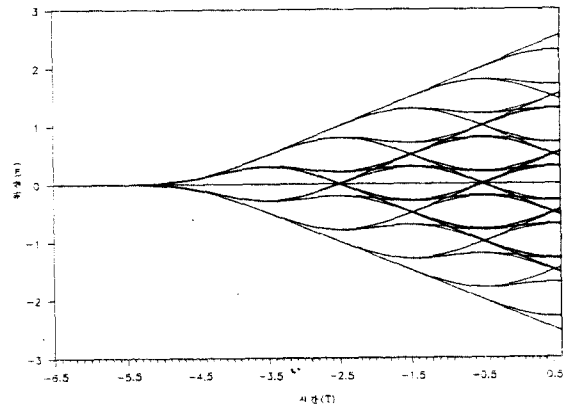


그림 2. 위상의 궤적

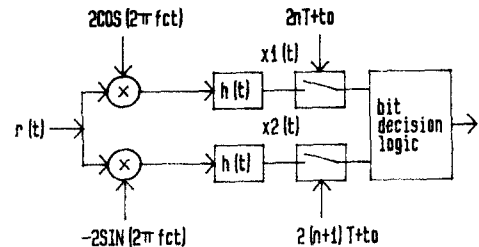


그림 3. MSK형 수신기의 블록선도

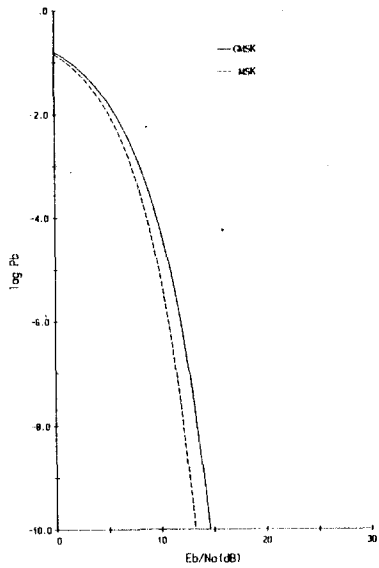


그림 4. AWGN하에서 QPSK와 MSK의 에러발생확률

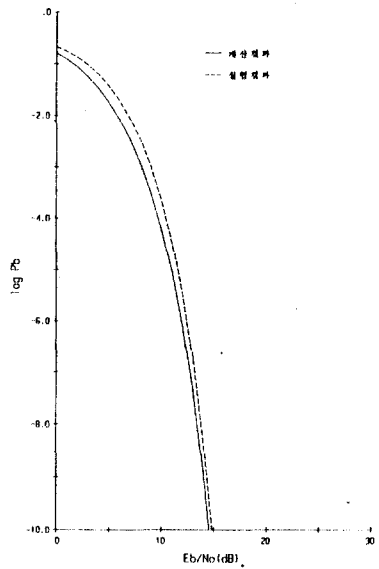


그림 5. AWGN하에서 QPSK의 계산결과와 실험결과와의 비교

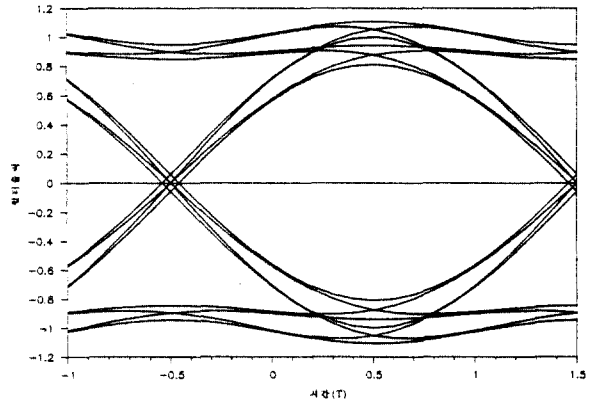


그림 6. 필터출력에서 QPSK의 eye pattern

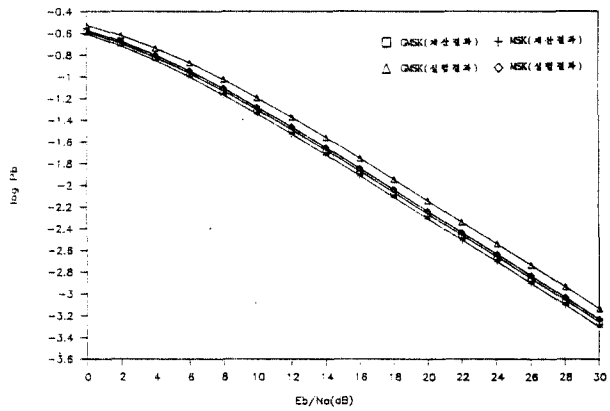


그림 7. Rayleigh 페이딩 채널에서 QPSK와 MSK의 에러발생확률