

境界要素法을 이용한 波力の 數値解析

NUMBRICAL ANALYSIS OF WAVE FORCES USING BOUNDARY ELEMENT METHOD

蔚山大學校 工科大学 教授 金 聲 得
울산대학교 대학원 (석사과정) 이 상 배 *

1. 序 論

최근에 대형 해양구조물등이 해상공항, 석유탐사 및 저장설비, 운송설비등의 목적으로 많이 건설되고 있는 실정에 따라 이에 작용하는 파랑의 연구가 대단히 중요시 되고 있다.

해저바닥에 놓여있는 임의 형상의 구조물에 작용하는 파력을 해석하는 실험적 연구로서 Sunder & Tomas Mathai(1986), Shankar & Rahman & Sundar(1985)등의 연구가 있으며, 이론적 연구로서 Rahman & Chakravartti(1986), Fenton(1978), Black (1975)등의 연구가 있다. 그리고 수치해석 연구로서는 Williams(1985), Bird & Shepherd(1984), Au & Brebbia(1982)등의 연구가 있다.

본 연구에서는 문제영역의 전체 경계상에서의 경계적분방정식을 얻기위하여 Green 제2정리와 기본해를 이용하는 경계요소법에 의해 임의 형상의 구조물에 작용하는 파력에 관해서 연구하였다.

이에 관한 연구로서 Niftzger & Chakrabarti(1979)는 John(1950)에 의해 개발된 Green함수 방법에 선형파 이론을 적용시켜 나온 적분방정식을 수치적으로 풀어 해저바닥에 지지되어 있는 반원 pipeline에 작용하는 파력을 구한예가 있으며, 여기에

서는 선형요소를 이용한 경계요소법으로 이 결과와 비교하고, 또한 다양한 형상의 구조물에 작용하는 파력의 계산결과를 제시하고자 한다.

2. 問題의 定式化

2-1. 境界値 問題

유체운동을 비압축성 완전유체의 미소진폭파 운동이라 가정하면, 선형조화함수의 속도 포텐셜 $\tilde{\phi}(x,y,t)$ 는 Scalar 속도 포텐셜 ϕ 와 시간요소로 분리할 수 있으며 복소함수의 실수부분을 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\tilde{\phi}(x,y,t) = \text{Re} [\phi(x,y)\text{EXP}(-i\sigma t)] \quad \text{--- (1)}$$

여기서, $i = \sqrt{-1}$ 이며 σ 는 입사파의 진동수이다.

비점성, 비회전류인 경우 유속은 포텐셜 ϕ 의 기울기로 표현할 수 있으며, 여기에 질량보존법칙을 적용하면 포텐셜은 다음과 같은 Laplace 방정식을 만족한다.

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{--- (2)}$$

상기 지배방정식은 다음의 경계조건을 통해서 만족된다.

i) 자유수면 경계조건

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\sigma^2}{g} \phi \quad \text{--- (3)}$$

ii) 해저 및 물체경계조건

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{--- (4)}$$

여기서 n 는 그림1에서 물체경계의 바깥방향으로 향하는 법선벡터이다.

iii) 측방향 경계조건 (방사조건)

$$\lim_{kx \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial}{\partial x} \mp ik \right) \left\{ \begin{array}{l} \phi \\ \phi - \phi_i \end{array} \right\} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{: 상류측} \\ \text{: 하류측} \end{array} \quad \text{--- (5)}$$

여기서 ϕ_i 는 +X 방향으로 진행하는 입사파 포텐셜이며 다음과 같다.

$$\phi_i = - \frac{i g A}{\sigma} \frac{\cosh k(d+y)}{\cosh kh} e^{ikx} \quad \text{--- (6)}$$

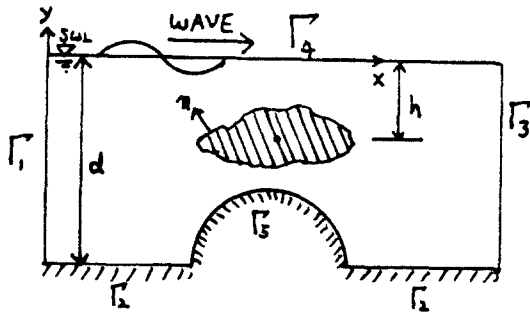


그림1. Defintion Sketch

여기서 A는 입사파의 진폭을 나타내며, 파수 k는 다음과 같은 분산관계를 만족한다.

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad \text{--- (7)}$$

2-2 境界要素法

일반적으로 경계치 문제에 관한 근사해법은 그 요소내부의 평형방정식을 근사적으로 만족시키면서 경계조건을 만족시키는 함수를 취해왔다. 그러나 경계요소법은 이와 반대로 경계내부에서는 평형방정식을 만족시키면서 경계조건을 만족시키는 방법이다.

즉, 지배방정식인 Laplace방정식의 기본해와 Green정리를 이용하여 경계상에서의 법선방향 도함수에 의해 유체 내부점에서의 속도포텐셜을 나타내면 다음과 같이 된다.

$$\phi^i + \int_r (\phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} - \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n}) d\Gamma = 0 \quad \text{--- (8)}$$

여기서 ϕ 는 기본해이고 경계점에서 내부점까지의 거리 r의 함수이며 ϕ^* 는 요소 내부의 점 i에서의 미지 속도포텐셜이다.

경계가 매끈한 경우, 경계상에서 식(7)은 다음과 같이 된다.

$$\frac{1}{2}\phi^i + \int_{\Gamma} (\phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} - \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n}) d\Gamma = 0 \quad \text{--- (9)}$$

여기서 $\phi^* = \frac{1}{2\pi} \ln(1/r)$ 이다.

경계조건을 적용시킨 일반적인 경계요소 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} c^i \phi_i + \int_{\Gamma_1} \phi (\frac{\partial \phi^*}{\partial n} - i k_1 \phi^*) d\Gamma + \int_{\Gamma_1 + \Gamma_0} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_3} \phi (\frac{\partial \phi^*}{\partial n} - i k_3 \phi^*) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \phi (\frac{\partial \phi^*}{\partial n} - \frac{\sigma^2}{g} \phi^*) d\Gamma \\ = - \int_{\Gamma} (2 i k \phi_i \phi^*) d\Gamma \end{aligned} \quad \text{--- (10)}$$

2-3. 波壓과 波力

구조물에 작용하는 동압력 $P(x, y, t)$ 는 선형화된 베르누이 방정식을 사용함으로써 다음과 같이 얻어질 수 있다.

$$P(x, y, t) = -\rho \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, y, t) \right\} = \rho \sigma \operatorname{Re} \{ i \phi(x, y) e^{-i \sigma t} \} \quad \text{--- (11)}$$

여기서 ρ 는 유체의 밀도를 나타내며, 파력은 압력을 적분함으로써 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\vec{F} = - \int_{\Gamma} P(-\vec{n}) d\Gamma \quad \text{--- (12)}$$

길이당 작용받는 x, y 성분의 파력은 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\begin{aligned} F_x &= - \int_{\Gamma_0} P(x, y, t) dy \\ F_y &= + \int_{\Gamma_0} P(x, y, t) dx \end{aligned} \quad \text{--- (13)}$$

따라서 식(13)의 이산화된 형태는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} F_x &= \sum_{j=1}^{N_1} P_j \Delta y_j \\ F_y &= - \sum_{j=1}^{N_1} P_j \Delta x_j \end{aligned} \quad \text{--- (14)}$$

여기서 N_1 는 물체경계상에서의 절점수를 나타낸다.

3. 結果 및 分析

3-1 半圓 海底 탱크에 적용한 경우

해저바닥위에 놓인 반원형단면인 탱크에 작용하는 파력을 수심대 반경의 비 $d/a = 4.0, 2.0, 1.5$ 에 따라 무차원 파수 ka 에 대한 무차원 파력($\bar{F}_y = [F_y]_{max} / gaH/2$), $\bar{F}_x = [F_x]_{max} / gaH/2$)으로 그림2와3에 Naftzger & Chakrabarti(1979)의 결과와 비교하여 도시하였으며, 또한 이를 검증하기 위하여 그림4에 무차원 파수에 대한 반사계수를 도시한 결과 서로 잘 일치하고 있다.

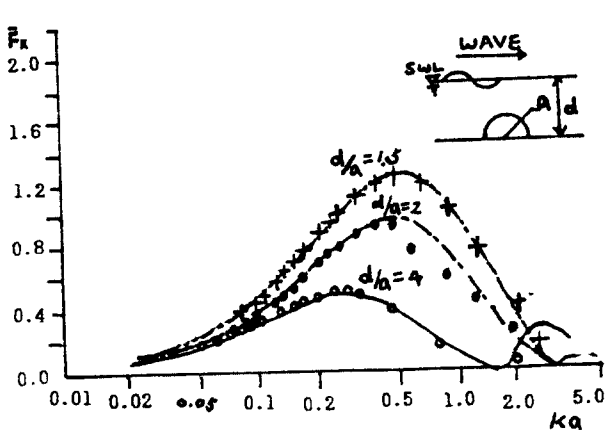


그림2. 수평파력

●, ○, + : 본 해석결과
 —, - - - : Naftzger & Chakrabarti(1979)의 접근해

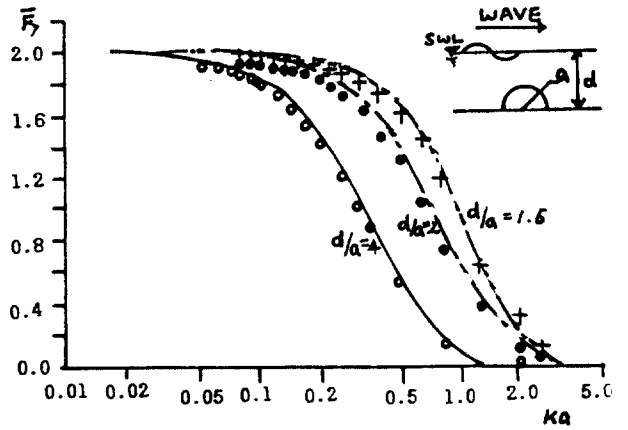


그림3. 연직파력

●, ○, + : 본 해석결과
 —, - - - : Naftzger & Chakrabarti(1979)의 접근해

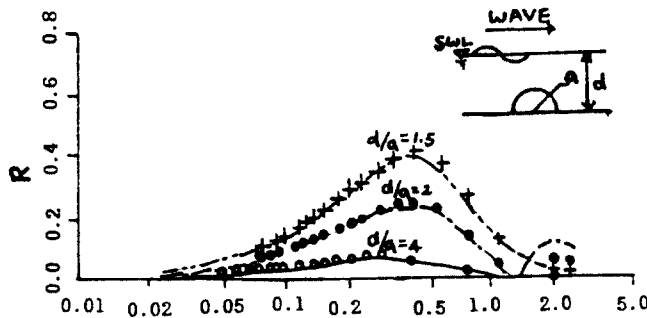


그림4. 반사계수

●, ○, + : 본 해석결과
 —, - - - : Naftzger & Chakrabarti(1979)의 접근해

3-2 삼각형 해저 탱크에 적용한 경우

해저바닥위에 놓인 삼각형 탱크에 작용하는 파력을 수심대 삼각형높이의 비 $d/h = 4.0, 2.0, 1.5$ 에 따라 무차원파수 kh 에 대한 무차원 파력 ($\bar{F}_y = [F_y]_{max}/ghH/2$), ($\bar{F}_x = [F_x]_{max}/ghH/2$)으로 그림5와 6에 도시하였다.

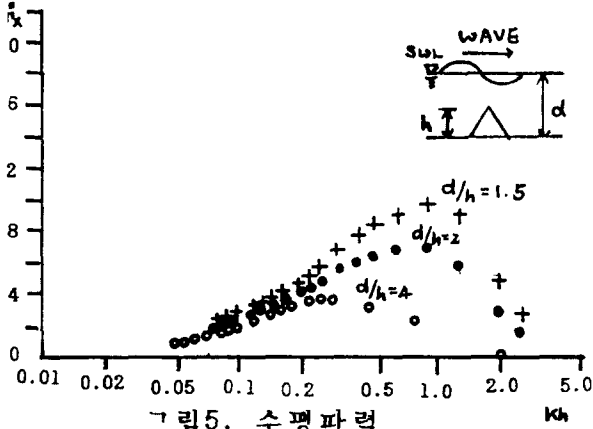


그림5. 수평파력

●, ○, + : 본 해석결과

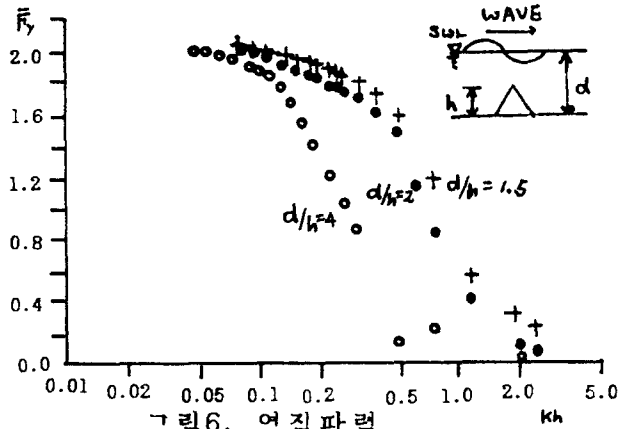


그림6. 연직파력

3-3 矩形 海底 탱크에 적용한 경우

해저바닥위에 놓인 구형단면 ($b/h = 2.0$)인 탱크에 작용하는 파력을 수심대 $d/h = 4.0, 2.0, 1.5$ 에 따라 무차원 파수 kh 에 대한 무차원 파력 ($\bar{F}_y = [F_y]_{max}/ghH/2$), ($\bar{F}_x = [F_x]_{max}/ghH/2$)으로 그림7와 8에 도시 하였다.

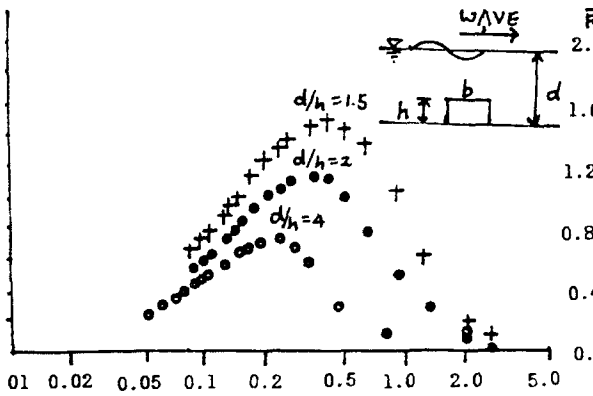


그림7. 수평파력

●, ○, + : 본 해석결과

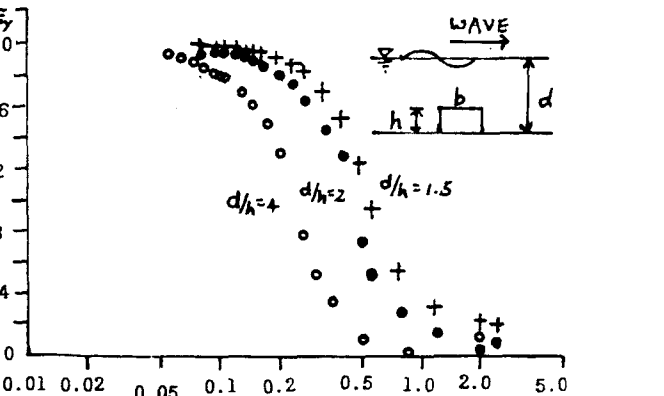


그림8. 연직파력

3-4 반원 해저 탱크가 병렬로 설치된 경우

해저바닥위에 반원 단면인 2개의 탱크가 반경 a 만큼 떨어진 경우 이들에 작용하는 파력을 수심대 반경의 비 $d/a = 4.0$ 로 하여 무차원 파수 ka 에 대한 무차원 파력($\bar{F}_y = [F_y]_{\max}/ gaH/2$), $\bar{F}_x = [F_x]_{\max}/ gaH/2$)으로 그림9와 10에 도시하였다.

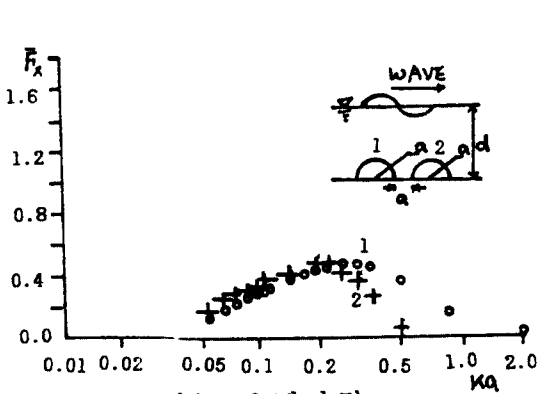


그림9. 수평파력

●, + : 본 해석결과

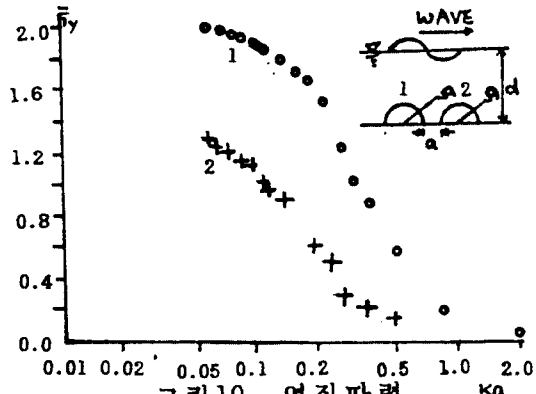


그림10. 연직파력

4. 結 論

본 연구에서는 선형요소에 의한 경계요소법을 사용하여 다양한 형상의 탱크에 작용하는 파력을 포텐셜운동의 경계치 문제로 부터 해석하였다.

본 연구결과 3-1의 반원 해저 탱크에 작용하는 파력과 반사계수는 Naftzger & Chakrabarti(1979)의 접근해와 비교한 결과 잘 일치하고 있다. 이것으로 말미암아 3-2, 3-3, 3-4의 결과도 신뢰할 수 있다고 사료된다.

*** 參 考 文 獻 ***

1. Naftzger, R. A. and Chakrabarti, S. K. "Scattering of Waves by Two-Dimensional Circular Obstacles in Finite Water Depth", J. Fluid Res., Vol.23(1), pp.32-42, 1979.

2. Brebbia, C.A. "The Boundary Element Method for Engineers", Pentech Press, 1978.
3. Au, M.C and Brebbia, C.A. "Numerical Prediction of Wave Forces using the Boundary Element Method", Appl. Math. Modelling, Vol.6, pp.218-228, 1982.
4. Bird, H.W.K and Shepherd, R. "On the Interactions of Surface Waves with Immersed Structures", IJNM in Fluids, Vol.4, pp.765-780, 1984.
5. Jared L. Black, "Wave forces on vertical axisymmetric bodies", J. Fluid Mech, Vol.67, part2, pp.369-376, 1975.
6. Fenton, J.D. "Wave forces on vertical bodies of revolution", J. Fluid Mech, Vol.85, part2, pp.241-255, 1978.
7. Rahman, M. & Chakravartty, C. "Design Method For Predicting Wave Forces On Rectangular Caissons", Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, Vol.112, No.6, pp.661-666, 1986.
8. Sunder, V. and Thomas Mathai, "Studies on the Effect of Wave Steepness on Wave Force Coefficient for Elliptical Caissons", Ocean Engng., Vol. 13, No.4, pp.321-326, 1986.
9. Jotai Shankar, N., Rahman, H. and Sundar, V. "Wave Forces On Large Offshore Pipelines", Ocean Engng., Vol.12. No.2. pp.99-115, 1985
10. John, F. "On the Motion of floating bodies II", Comm, Pure Appl. Math.3 pp.45-101, 1950.
11. Brebbia, C. A. and Walker, S. "The Boundary Element Techniques in Engineering", Newnes-Butterworths, London, 1980.
12. Anthony N. Williams "Wave Forces on Elliptic Cylinder", Journal of Waterway, Port, Costal and Ocean Engineering, Vol.111, No.2. pp.433-449 , 1985.