

지하수의 부정류 흐름에 대한 수치해석

(Numerical Analysis of Non-steady
Ground-water Flow)

한양대학교 공과대학 교수 이 정 규

1. 서론

일반적으로 이동하는 자유수면을 가진 비피압대수층 (Unconfined aquifer)의 비정상지하수흐름 (Unsteady ground-water flow)에 대한 문제는 저수지의 수위가 급강하할 때나 급상승할 때에 대수층에 나타난다.

이 문제를 해석하기 위한 지배방정식은 대부분이 2점 경계치 문제인 비선형 편미분방정식을 풀어야 하기 때문에 해석적인 해 (Solution)를 구하기는 어렵다. 따라서 지금까지의 연구결과는 대부분이 지배방정식의 근사식에 대한 해석적 해를 구하거나 수치해 (Numerical solution)를 구하는 방법이 개발되었다. 연구 결과를 종합해 보면 유한요소법을 직접 적용하는 경우, 편미분 방정식을 Boltzmann 변환에 의하여 상미분 방정식으로 변환시켜 Runge - Kutta 방법에 의하여 푸는 경우와 시간차분값을 이용하여 해석적 방법으로 초기수면경사 (Initial water surface slope)를 구하고 여기서 유도된 1계 상미분 방정식을 수치적분 법으로 해를 구하였다. 위의 계산 방법은 많은 시간과 노력이 소요되기 때문에 효율성이 떨어질 뿐 아니라 계산 결과를 보면 저수지 수면의 급강하시에는 실험치와 좋은 일치율을 보여 주고 있으나 수면의 급상승시에는 만족할 만한 결과를 얻지 못하였다.

본 연구에서는 비정상 지하수 흐름에 대한 비선형 편미분 방정식을 Boltzmann 변환을 통하여 상미분 방정식을 얻은 후 유한차분법으로 근사해를 구하는 수치모형을 제시하고 본 모형이 저수지 수면의 급강하시와 급상승시에 다 같이 적용할 수 있는 효율적이고 간편한 모형임을 보여 주고자 한다.

2. 지배 방정식

흐름의 상태는 그림 1과 같으며 다음과 같은 가정하에 해석한다.

- 1) 대수층은 균질이고 등방성이며 반무한대이다.
- 2) 대수층은 수평한 불투수층위에 놓여있다.
- 3) Dupuit - Forchheimer 의 가정이 적용된다.
- 4) 모든 흐름은 수면하에서 발생한다.
- 5) 대수층의 저류 (Aquifer storage)로 부터 나온 물은 수두의 감소에 따라 순간적으로 유출된다.

Darcy 의 법칙과 연속방정식으로 부터 다음과 같은 기본식을 얻는다.

$$K \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{--- (1)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{조건식 ; } t = 0; h = H; x > 0 \\ \quad \quad \quad x = 0; h = d; t > 0 \\ \quad \quad \quad x \rightarrow \infty; h = H; t > 0 \end{array} \right\} \text{--- (2)}$$

여기서 h 는 x 와 t 의 함수인 수면높이, x 는 수평거리, t 는 시간, H 는 초기 수면높이, K 는 대수층의 투수계수, S 는 대수층의 비산출량 (Specific yield), d 는 저수지의 수면높이이다.

식 (1)과 (2)는 다음과 같은 무차원변수를 도입함으로써 무차원식으로 변형된다.

$$\theta = \frac{h}{H} \quad , \quad y = \frac{z}{H} \quad , \quad \tau = \frac{Kt}{SH} \quad \text{--- (3)}$$

식 (3)을 식 (1)과(2)에 대입한다.

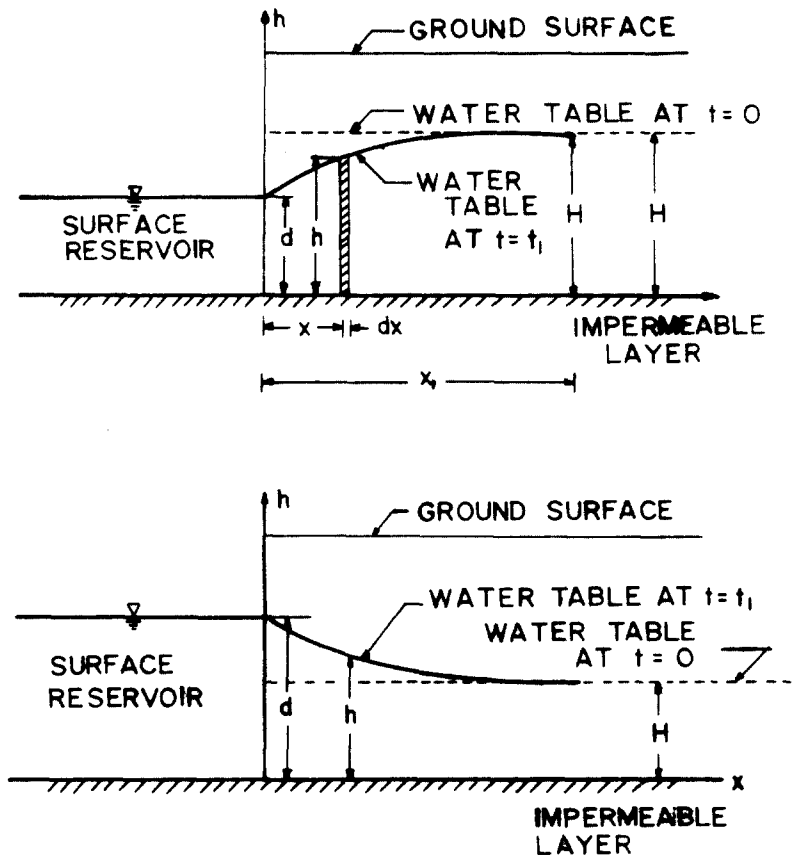


그림 1. Sketch of Ground-water Flow in Unconfined Aquifer ; (a) Drawdown, (b) Buildup

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \quad \text{--- (4)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{조건식 : } \tau = 0 ; \theta = 1 ; y > 0 \\ y = 0 ; \theta = \frac{d}{H} ; \tau > 0 \\ y \rightarrow \infty ; \theta = 1 ; \tau > 0 \end{array} \right\} \text{---(5)}$$

식 (4)와 (5)는 Boltzmann 변환, $\phi = \frac{y}{\sqrt{\tau}}$ 에 의하여 다음과 같은 비선형 2계 상미분방정식으로 변형된다.

$$-\frac{\phi}{2} \frac{d\theta}{d\phi} = \frac{d}{d\phi} \left(\theta \frac{d\theta}{d\phi} \right) \text{---(6)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{조건식 ; } \phi = 0 ; \theta = \frac{d}{H} \\ \phi \rightarrow \infty ; \theta = 1 \end{array} \right\} \text{---(7)}$$

3. 수치해 (Numerical solution)

식 (6)을 풀기 위하여 Explicit scheme 을 사용한 유한차분법이 이용되었다. 시간 t_1 이 주어지면 수면의 운동은 유한하다고 할 수 있다. 즉, 수면은 일정한 거리 x_1 만큼 변동하였다고 볼 수 있으며 x_1 보다 더 멀리 떨어져 있는 거리에 있는 수면은 저수지 수위의 영향을 받지 않는다. 그러므로 t_1 과 x_1 의 유한한 값에 대하여 ϕ 도 다음과 같이 유한하게 정의된다.

$$\phi = \frac{x_1}{\sqrt{\frac{H K}{S} t_1}} = \phi_1 \text{ (Constant) ---(8)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{조건식 ; } \phi = 0 ; \theta = \frac{d}{H} \\ \phi \geq \phi_1 ; \theta = 1 \end{array} \right\} \text{---(9)}$$

식 (6)을 유한차분법으로 근사해를 구하기 위하여 $\theta^2 = v$ 를 식 (6)에 대입하여 정리한다.

$$\frac{d^2v}{d\phi^2} + \frac{\phi}{2\sqrt{v}} \frac{dv}{d\phi} = 0 \quad \text{————— (10)}$$

식 (10)을 차분화하는 과정은 중앙차분법으로 Explicit scheme 을 이용하여 차분식을 얻었다. 식 중의 비선형항은 평균치를 취하였다.

일반차분식은 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{d\phi} &\approx \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2\Delta\phi} \\ \frac{d^2v}{d\phi^2} &\approx \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{(\Delta\phi)^2} \end{aligned} \right] \quad \text{————— (11)}$$

여기서 i 는 격자점의 번호이고 $\Delta\phi$ 는 ϕ 의 격자간격을 나타낸다.

식 (11)을 식 (10)에 대입하여 v_i 에 대하여 정리한다.

$$v_i = \frac{(v_{i-1} + v_{i+1})}{2} + \frac{\Delta\phi \cdot \phi_i}{8 \sqrt{\frac{v_{i-1} + v_{i+1}}{2}}} (v_{i+1} - v_{i-1}) \quad \text{————— (12)}$$

$$\theta_i = \sqrt{v_i} \quad \text{————— (13)}$$

4. 계산결과 및 고찰

본 연구에서 개발된 수치모형 식 (13)의 타당성을 검토하기 위하여 수면 급강하와 수면급상승의 경우에 대하여 계상예를들어 비교 검토하였다.

두 경우에 대하여 $\phi_i = 6.5$, $\Delta\phi = 0.1$. 계산허용오차는 v 에 대하여 10^{-5} 를 취하였고 근사해는 Gauss-Seidel 법으로 구하였다.

4.1 수면급강하 (Draw down)의 경우

수면급강하시는 $d/H = 0.2$ 의 경우에 대하여 계산하였다. 계산결과는

그림2에 실선으로 나타내었으며, Yeh 의 해는 실선으로 본 연구의 결과와 일치하게 나타났으며, 선형화법(Linearized solution)의 해는 점선으로 Todd 의 실험치는 작은 원으로 도시되었다. 그림2의 비교에서 알 수 있는 바와 같이 Yeh 와 Todd 의 실험치와는 아주 좋은 일치를 보여 주었으나 선형화법의 결과와는 상당한 편기현상을 보여주고있다.

4.2 수면급상승 (Buildup)의 경우

수면급상승시 $d/H=5$ 의 경우에 대하여 계산하였다. 계산결과는 그림 3에 실선으로 나타내었으며 Todd 의 실험치도 작은 원으로 같이 표시하였다. 그림에서 알 수 있는 바와 같이 Todd 의 실험치와 아주 잘 일치하는것을 알 수 있다. 반면 Yeh 는 수면급상의 경우에 계산을 시도하지 않았으며 Koussis의 계산결과는 Todd 의 실험치와의 비교에서 만족할 만한 일치를 얻지 못했기 때문에 비교하지 않았다.

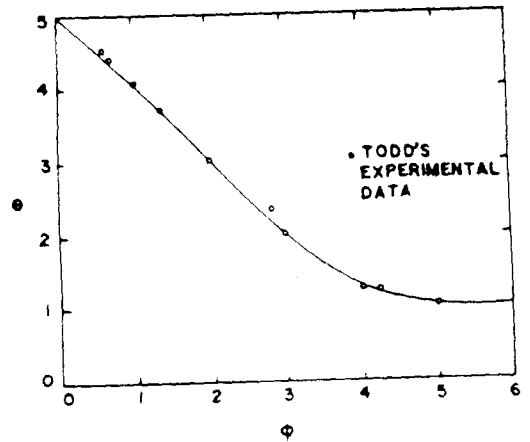
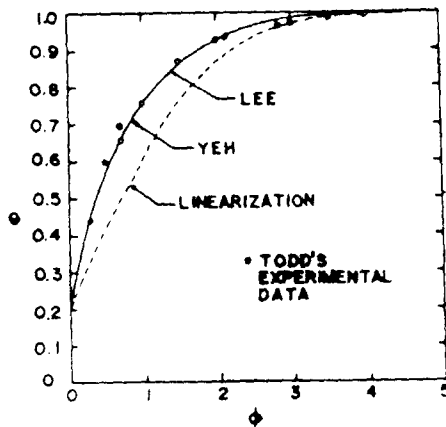


그림 2. Drawdown Water Surface Profile ; $d/H=0.2$

그림 3. Buildup water surface profile ; $d/H=5$

이상의 비교 검토에서 비정상지하수의 수면을 예측하는 데 본 논문에서 개발된 수치모형이 효율적이고 간편하면서도 좋은 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 본 논문의 방법을 실제문제에 쉽게 이용할 수 있도록 하기 위하여 수면의 급강하시와 급상승시의 d/H 의 여러 값에 대하여 그림 4와 5에 계산결과를 도시하였다.

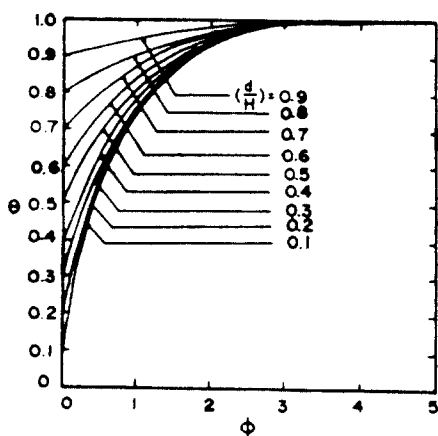
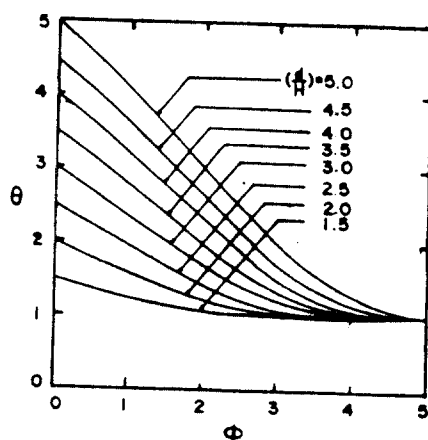


그림 4. Dimensionless Water Surface Profiles for Drawdown



5. Dimensionless Water Surface Profiles for Buildup

5. 결론

이동하는 자유수면을 가진 비정상지하수 흐름에 대한 편미분 방정식을 상미분 방정식으로 변환시켜 유한차분법으로 자유수면에 대한 근사해를 구하는 수치모형이 개발되었다.

본 논문에서 얻어진 수치모형은 계산방법이 아주 간편하고 수면의 급강하시와 급상승시에 다 같이 적용할 수 있으며 Todd의 실험치 및 다른 연구자들의 계산결과와 비교한 바 아주 좋은 일치율을 보여주었다. 특히 수면급상승의 경우에 본 연구의 모형이 우수함을 보여 주었다.