

# 調整池에서의 密度流의 舉動

(Behavior of Density Current in Regulating Pond)

漢陽大學校 大學院 全 時 永

漢陽大學校 教授 尹 泰 勳

## 1. 序 論

相異한 密度 또는 溫度를 갖는 유체가 水平靜止 또는 흐름水域으로 유입하여 일어나는 흐름은 密度流(density current)로 정의되며 유입되는 유체와 정지 또는 흐름水域流體와의 밀도차이에 따라 바닥밀도류(underflow), 표면밀도류(overflow) 및 중간밀도류(interflow)로 구분할 수 있다.

정지수역으로 유입되는 유체는 정지수역의 유체를 하류방향으로 계속 밀면서 힘의 평형이 이루어 질 때까지 이동하게 되며 계속 유입되는 유체에 의하여 힘의 평형이 깨어지면서 plunge 현상이 발생한다. 이러한 plunge 현상의 지식은 우리나라와 같이 댐으로 부터 용수를 放流하는 경우 選別放流(selective withdrawal)를 채용하지 않고 調整池로 온도조절을 피하는 경우 유입구와 조정지의 규모의 설계에는 필요하다. Plunge 현상을 설명하기 위하여서는 유입유체의 水理學的特性과 정지수역의 幾何學的特性에 따라 정지수역에서 밀도류전면의 흐름특성, 밀도 또는 온도변화 및 속도변화를 예측하는 것이 필요하다.

本 研究에서는 이러한 정보를 얻기 위하여 밀도류의 거동을 지배방정식인 연속방정식, 운동량보존식 및 추적물보존식에 유한차분기법을 이용하여 수치적인 해석이 시도된다. 본 연구에서 취급되는 밀도류에 관한 수치실험은 밀도 또는 온도차이에 의하여 발생하는 2차원 바닥밀도류로 국한되어 수행된다.

## 2. 基本方程式과 境境條件

정지수역유체의 밀도보다 밀도가 큰 유체가 정지수역으로 유입되는 경우 plunge 현상에 의한 수용유체의 운동과 유입유체의 거동에 관한 해석이 기술되며 다음 가정을 전제로 한다. 유입흐름은 2차원, 비압축성 및 층류이고 유입구에서 유체는 수평방향으로만 유입한다. 또한 자유수면은 연직변화가 없으며, 추적물확산계수는 수평과 연직방향이 같으며, 정지수역의 밀도는 일정하다. 작은 밀도차이에는 Boussinesq 가정이 성립한다.

## 2.1 基本方程式

위와 같은 조건에서 2차원 기본방정식은 다음과 같다.

連續方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

運動量保存式

$x$  - 방향

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{\partial P^*}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \quad (2)$$

$z$  - 방향

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial P^*}{\partial z} - g \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) + \nu \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \quad (3)$$

追跡物保存式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) \\ = k \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $P^*$ 는 靜水壓조건으로부터 偏倚되는 平均動水壓  $P^* = P/\rho_e - g \int_z^0 \rho/\rho_e dz$ ,  $P$ 는 靜水壓,  $k$ 는 追跡物擴散係數,  $g$ 는 重力加速度,  $t$ 는 시간,  $\nu$ 는 動粘性係數이다.

2次元흐름에서 渦度  $\omega$ 와 流函數  $\varphi$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = u \quad (6)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -w \quad (7)$$

식(6)과 (7)은 자동적으로 연속방정식 (1)을 만족한다. Poisson方程式인 流函數 - 渦度式은 식(6)과 (7)을 식(5)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \omega \quad (8)$$

식(2)와 (3)에서 壓力項을 소거하기 위하여 식(2)와 (3)을 교차미분한 후 전자에서 후자를 빼면 다음과 같은 渦度保存式을 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\omega) + \frac{\partial}{\partial z}(w\omega) \\ = \frac{\partial}{\partial x}\left(g \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}\right) + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}\right) \end{aligned} \quad (9)$$

基本方程式에서 어떤 항의 값은 상대적으로 작기 때문에 이 작은 항들을 결정할 수 있을 뿐만 아니라 흐름현상을 쉽게 해석하기 위하여 도입되는 無次元變數는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{d}, \quad Z = \frac{z}{d}, \quad U = \frac{u}{U_0}, \quad W = \frac{w}{U_0} \\ T &= \frac{tU_0}{d}, \quad \psi = \frac{\varphi}{U_0 d}, \quad \Omega = \frac{\omega d}{U_0} \end{aligned}$$

여기서  $d$ 는 特性길이로서 靜止水域의 水深이고  $U_0 (= q/d)$ 는 特性速度로서 靜止水域 下流에서의 속도이다.

앞의 無次元變數를 基本方程式 식(8), (9) 및 (4)에 도입하여 얻은 無次元流函數 - 渦度式, 渦度保存式 및 追跡物保存式은 다음과 같다.

流函數 - 渦度式

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} = \Omega$$

渦度保存式

$$\frac{\partial \Omega}{\partial T} + \left[ \frac{\partial}{\partial X}(U\Omega) + \frac{\partial}{\partial Z}(W\Omega) \right] = \frac{1}{F^2} \frac{\partial \Gamma}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Z^2} \right]$$

(11)

追跡物保存式

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial T} + \left[ \frac{\partial}{\partial X}(U\Gamma) + \frac{\partial}{\partial Z}(W\Gamma) \right] = \frac{1}{\text{ScRe}} \left[ \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial Z^2} \right]$$

(12)

여기서  $\Gamma = (\rho - \rho_0)/\rho_0$ 는 無次元密度차이, 無次元媒介變數는 Reynolds 數  $\text{Re} = U_0 d / \nu$ , Froude 數  $F = U_0 / (gd)^{1/2}$  및 Schmidt 數  $\text{Sc} = \nu / k$  이다.

流入口부근에서의 흐름特性은 流入密度 Froude 數  $\text{Fr}_e$  에 의하여 支配되며 다음과 같이 정의된다.

$$\text{Fr}_e = \frac{U_e}{\left( \frac{\rho_e - \rho_0}{\rho_0} g d_e \right)^{1/2}}$$

2.2 境界條件

水平靜止水域으로 流入되는 密度流의 解析에는 無次元流函數, 密度차이 및 渦도에 대하여 5 가지 境界條件이 적용된다. 이들 境界는 그림 1 에 보인 바와 같다.

固體面 바닥에서

$$\Psi = \text{const.}, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial Z} = 0, \quad \Omega = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2}$$

自由水面에서

$$\Psi = \text{const.}, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial Z} = 0, \quad \Omega = 0$$

流入口에서

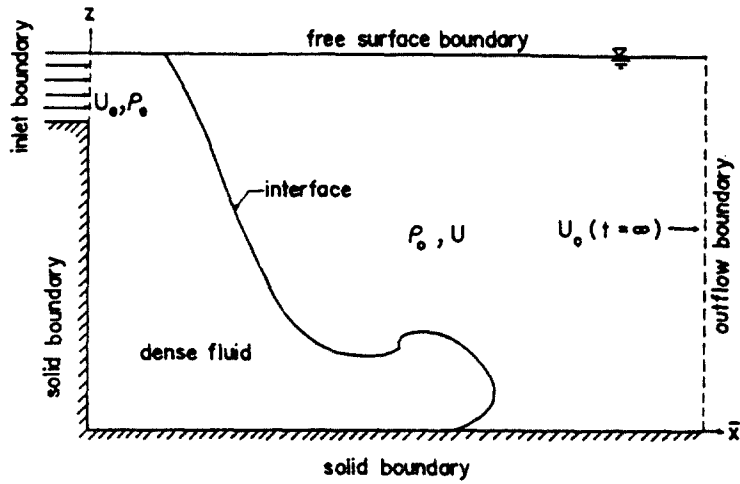


그림 1 수평정지수역의 경계조건

$$\psi = \psi_e(Z), \quad \Gamma = \Gamma_e, \quad \Omega = 0$$

靜止水域 上流壁面에서

$$\psi = \text{const.}, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial X} = 0, \quad \Omega = \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2}$$

靜止水域 下流에서

$$\psi = \psi_\infty(Z), \quad \Gamma = 0, \quad \Omega = 0$$

고체면바닥을 따라서 밀도차이  $\Gamma$ 는 polynomial fitting을 이용하면 다음과 같은 密度차이의 境界條件을 얻는다.

$$\Gamma_{i,1} = \frac{4\Gamma_{i,2} - \Gamma_{i,3}}{3} \quad (13)$$

渦度  $\Omega$ 의 境界條件은 固體面에서의 속도분포를 이용하여 渦度の 정의로부터 얻을 수 있으나 固體面에서 속도구배는 얻기가 어려우므로 流函數를 Taylor 급수로 전개하여 다음과 같은 유함수의 항으로 나타낸다.

$$\Omega_{i,1} = \frac{2(\psi_{i,2} - \psi_{i,1})}{(\Delta Z)^2} \quad (14)$$

### 3. 數值實驗

속도  $U$ 와  $W$ , 유함수  $\psi$ , 밀도차이  $\Gamma$  및 渦度  $\Omega$ 는 동일한 격점에서 정의된다.

#### 3.1 座標變換過程

$X$  방향에 stretched 좌표를 도입한 좌표변환식은 다음과 같고  $Z$  방향의 좌표는 변환되지 않는다.

$$\bar{X} = 1 - e^{-ax} \quad (15)$$

식(15)에서  $X$ 의 領域은 零에서  $\infty$ 까지이고 변환된 좌표  $\bar{X}$ 의 영역은 零에서 1까지이며  $a$ 는 임의의 상수이다.

식(15)로 주어진 변환을 基本方程式 식(10)~(12)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 변환된 無次元 基本方程式을 얻는다.

流函數 - 渦度式

$$-a^2(1-\bar{X})\frac{\partial\psi}{\partial\bar{X}} + a^2(1-\bar{X})^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\bar{X}^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial Z^2} = \Omega \quad (16)$$

渦度保存式

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Omega}{\partial T} + a(1-\bar{X})\frac{\partial}{\partial\bar{X}}(U\Omega) + a(1-\bar{X})\frac{\partial}{\partial Z}(W_1\Omega) \\ = \frac{a(1-\bar{X})}{F^2}\frac{\partial\Omega}{\partial\bar{X}} + \frac{1}{\text{Re}}\left[-a^2(1-\bar{X})\frac{\partial\Omega}{\partial\bar{X}} + a^2(1-\bar{X})^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial\bar{X}^2} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial Z^2}\right] \end{aligned} \quad (17)$$

追跡物保存式

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial T} + a(1-\bar{X})\frac{\partial(U\Gamma)}{\partial\bar{X}} + a(1-\bar{X})\frac{\partial(W_1\Gamma)}{\partial Z}$$

$$= \frac{1}{ScRe} \left[ -a^2(1-\bar{X}) \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{X}} + a^2(1-\bar{X})^2 \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \bar{X}^2} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial Z^2} \right] \quad (18)$$

여기서  $W_1 = - \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{X}}$

### 3.2 數值計算方法

流函數의 계산과정은 relaxation 방법중 relaxation 係數  $\gamma$  가 1과 2 사이인 successive over relaxation (SOR) 방법을 이용하였고, 渦度保存式과 追跡物保存式은 陰解法(implicit difference scheme)으로 전개한 후 Gauss-Seidel 반복법으로 解를 얻었다.

초기조건으로서 cold start가 적용되었으며 流函數는 식(16)을 差分化하고 relaxation factor  $\gamma$  를 도입하여 얻어진다. 얻은 流函數로부터 速度 U와 W를 계산한다. 계산된 U와 W를 가지고 密度차이를 계산한 뒤 渦度を 계산한다.

### 4. 數值實驗結果

數值實驗이 적용된 密度流는 댐으로부터 調整池로 水平流入되는 경우이다.

안정 plunge point, 최대여행거리, 전면속도

靜止水域으로 유입된 유체의 거동을 유입유체와 정지수역유체의 수면에서의 경계인 plunge point의 향으로 살펴보면 그림 2에서와 같이 流入密度Froude數의 크기에 따라 plunge point는 하류로 최대거리(본 연구에서 최대여행거리(maximum travel distance)라 칭함)까지 이동했다가 다시 상류로 돌아와 유입구로부터 일정한 거리에서 이른바 安定plunge point에 안주하게 된다.

그림 3은 경과된 시간 T와 유입구에서 密度流前面까지의 무차원거리

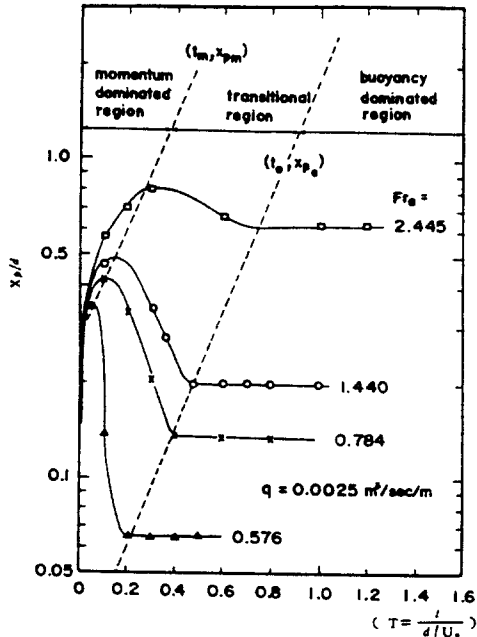


그림 2 상이한  $Fr_e$ 에 대한 무차원시간 ( $T = t/d/U$ )와 유입구에서 plunge point까지의 무차원거리 ( $X_p/d$ )와의 관계

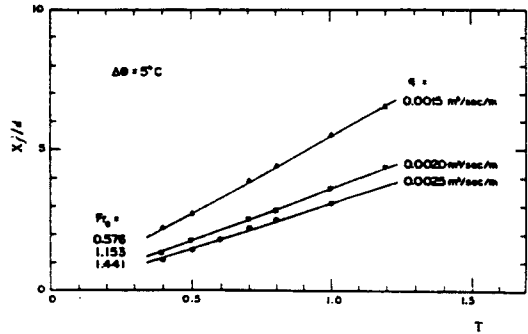


그림 3 상이한  $Fr_e$  (또는 단위류당유량)에 대한 무차원시간 ( $T = t/d/U$ )와 유입구에서 밀도류전면까지의 무차원거리 ( $X_f/d$ )와의 관계

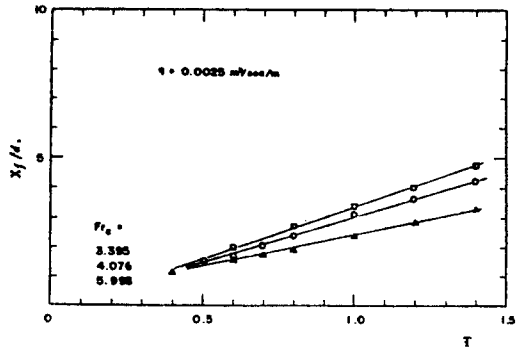


그림 4 상이한  $Fr_e$ 에 대한 무차원시간 ( $T = t/d/U$ )와 유입구에서 밀도류전면까지의 무차원거리 ( $X_f/d$ )와의 관계

$X_f/d$ 의 관계를 표시한 것이다. 그림 3에서 기울기는 밀도류前面的 무차원 속도를 나타내며  $Fr_e$ 가 증가할수록 감소함이 나타난다. 이 결과는 浮力流入量 (buoyancy flux,  $g'q$ )이 증가함에 따라 밀도류전면속도는 감소를 의미하며 Britter와 Simpson이 얻은 실험결과와 일치한다.

그림 4에서도 온도 (또는 밀도차이)가 증가 (流入密度 Froude 數는 감소)하면 밀도류 전면속도는 증가함을 알 수 있다.

그림 5는 流入密度 Froude 數의 변화에 따른 유입구에서 plunge point까지의 무차원거리  $X_p/d$ 를 표시한 것이다. 그림 5에서 plume-like, intermediate 및 jet-like로 흐름구분은 두 개의 변하는 점과 그림 5에 나타난 흐름의 특성으로 구분할 수 있으며  $Fr_e = 5.993$ 에 대하여  $X_p/d$ 가 표시되지 않은 것은 밀도 또는 온도차이가 작아서 시간이 경과함에



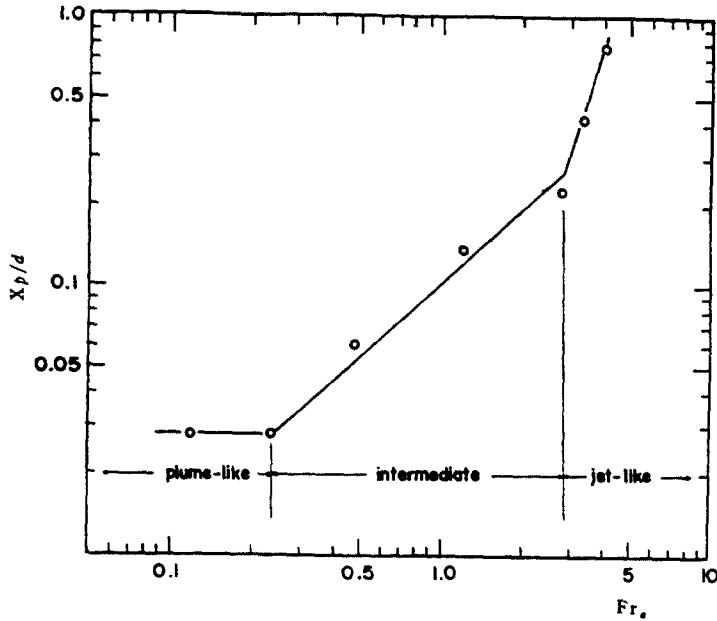
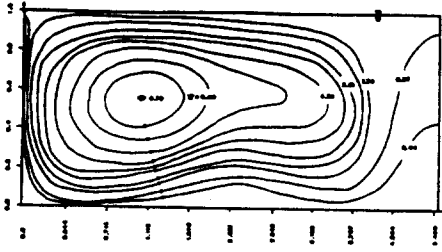


그림 5 Fr<sub>e</sub>와 유입구에서 plunge point까지의 무차원거리 (X<sub>p</sub>/d)와의 관계

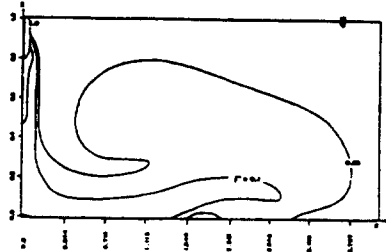
따라 plunge point는 계속 하류로 이동하므로 Fr<sub>e</sub> = 5.993에 해당하는 X<sub>p</sub>/d는 Fr<sub>e</sub> = 4.083에서 점근선으로 연결하는 것이 타당하다고 판단된다.

密度나 溫度차이가 비교적 큰 경우인 Fr<sub>e</sub> = 0.12인 경우에는 流入運動量의 크기는 상당히 작아서 流入流體의 흐름은 自由水面과 平行한 방향보다는 上流壁面을 따라서 발달되면서(그림 6(a, b)) 바닥에 이른다.

계속 유입으로 하강되는 흐름에 의한 剪斷으로 유입된 유체는 下流方向으로 이동하며 plunge point를 기준으로서 우측에 상당히 큰 渦가 형성되고 密度차이분포는 流入流體와 靜止水域流體사이의 密度차이가 크나 流入量이 작기 때문에 수용유체와 많이 희석된 상태가 나타난다. 밀도(또는 온도)차이가 감소로 Fr<sub>e</sub>가 증가하여 Fr<sub>e</sub> = 2.119인 경우에는 流入運動量은 Fr<sub>e</sub> = 0.12보다 크기 때문에 流入流體의 흐름이 自由水面과 平行한 方向으로 어느 정도 지속되다가 運動量이 소멸하면서 陰浮力의 영향때문에 바닥으로 가라앉는다. 密度차이분포는 바닥방향보다 下流方向으로 약간 더 발달되었고 渦는 plunge point를 기준으로 해서 우측과 좌측 두 지점에

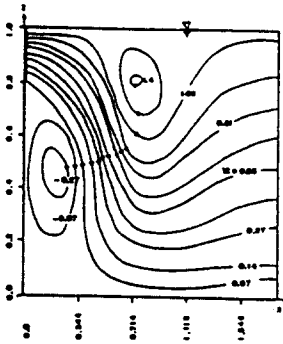


a. 유함수모양

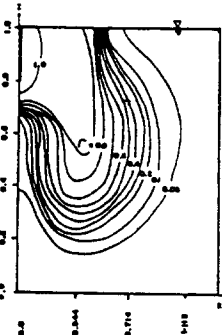


b. 밀도차이분포

( $T=0.4$ ,  $Fr_e=0.12$ )

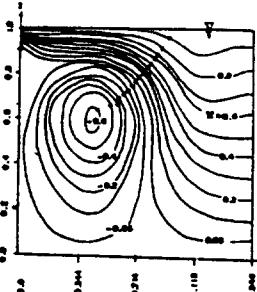


c. 유함수모양

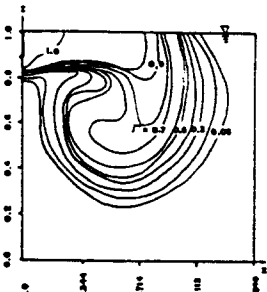


d. 밀도차이분포

( $T=0.4$ ,  $Fr_e=2.119$ )



e. 유함수모양



f. 밀도차이분포

( $T=0.4$ ,  $Fr_e=5.993$ )

그림 6 주어진 무차원시간에서  $Fr_e$ 에 대한 유함수와 밀도차이분포

형성되었다.(그림 6 (c, d)) 밀도(또는 온도)차이가 더욱 감소하여  $Fr_e$ 가 더 증가한  $Fr_e=5.993$ 인 경우에는 流入運動量은 앞의 두 경우 보다 상당히 크고 상대적으로 陰浮力이 작기 때문에 流入流體는 대부분 自由水面과 平行한 방향으로 이동하고 이동하는 과정중 일부는 陰浮力에 의하여 가라앉는다. Plunge point를 기준으로 해서 좌측 上流壁面 부근에 상당히 큰 渦가 형성되었고 앞의 두 경우 보다는 密度차이가 작기 때문에 流體가 靜止水域으로 퍼지는 시간도 많이 소요된다. 앞에서 기술한 내용과 그림 5에 나타난 것을 기초로 해서 흐름은  $Fr_e \leq 0.24$ 이면 plume-like,  $0.24 < Fr_e < 2.90$ 이면 intermediate,  $Fr_e \geq 2.90$ 이면 jet-like로 구분될 수 있다.

## 5. 結 論

調整池로 流入되는 陰浮力흐름으로 인한 密度流의 學動이 數值的으로 解析되었으며 그 結果를 요약하면 다음과 같다.

調整池에서 plunge 흐름의 모양은 유입유체와 유입밀도 Froude 수  $Fr_e$  에 크게 영향을 받는다. 즉  $Fr_e < 0.24$  의 범위에서는 유입구를 떠나면서 즉시 하강하여 陰浮力만이 작용하는 sinking plume 처럼 거동하고  $0.24 < Fr_e < 2.9$  의 범위에서는 운동량과 음부력이 모두 작용하여 부력젤과 같이  $Fr_e > 2.9$  에서는 운동량만이 작용하는 젤처럼 거동한다.

密度流前面의 속도는  $Fr_e$  의 감소 즉 陰浮力이 커짐에 따라 증가를 나타내며 plunge point 의 위치는  $Fr_e$  의 함수이다. 安定plunge point 의 발달과정은 음부력의 유체가 유입됨에 따라 plunge point 는 下流로 이동하며 최대여행거리에 도달하면 다시 上流로 이동하여 안정된 위치에 안주한다. 최대여행거리와 安定plunge point 는 시간과  $Fr_e$  의 뚜렷한 함수로 주어지며  $Fr_e$  가 증가할수록 최대여행거리와 안정plunge point 는 크게 나타났으며, 두 값은 같은 값에 접근한다.

調整池에서 음부력의 유체의 유입이 계속됨에 따라 음부력흐름 또는 (plunge point) 좌우에 渦가 발달된다.