

FIR 필터의 성능 분석

권 오 규

인하대학교 전기공학과

Modeling Error Analyses of FIR Filters

Oh-Kyu Kwon

Dept. of Electrical Engineering, Inha University

ABSTRACT

This paper deals with the continuous-discrete estimation problem using FIR filters and performs modeling error analyses of the FIR filters, compared to Kalman filter and the limited memory filters, via computer simulations. It is shown that, the less driving noise the system has, the better performance the FIR filter exhibits and that this characteristic appears more distinctly in nonlinear systems than in linear systems.

터의 발산문제와 안정도문제를 동시에 해결함으로써, 기존의 칼만 필터나 유한기억 필터의 문제점을 해소할 수 있다.

본 논문에서는, 계산기 모의실험을 통해, 모델링오차가 있을시의 FIR 필터의 성능 시험 및 분석을 행한다. 추정대상 시스템으로는 선형 및 비선형 연속형 공정에 이산형 측정과정으로 구성되는 시스템들을 택하며, 이 시스템에 대한 FIR 필터 알고리즘을 제시한다. 각각의 추정대상 시스템에 대해 FIR 필터와 함께 칼만 필터, 유한 기억 필터 [4,5] 등과 같은 기존의 필터들을 적용시켜 FIR 필터의 성능을 비교분석함으로써 이 필터의 성능상의 장단점을 밝힌다.

I. 서 론

FIR (Finite Impulse Response) 필터는 신호처리 분야에서 널리 사용되고 있는 필터로서, 비순환형이기 때문에 순환형인 IIR (Infinite Impulse Response) 필터에 비해 계산상의 단점을 지니고 있으나, BIBO 안정도가 보장되고 계수 변동이나 반올림오차 등에 견실한 특성을 지니고 있으며, 초기치 정보를 필요로 하지 않으며 필요에 따라서는 선형위상특성을 지니도록 설계할 수 있는 등의 여러가지 장점을 지니고 있기 때문에 실제적으로는 IIR 필터보다도 더 널리 사용되고 있다 [1].

추정론분야에서는 추정자의 발산문제와 안정도문제를 동시에 해결하고자 FIR 구조를 갖는 추정자가 (이하 '동계적 FIR 필터' 또는 FIR 필터'로 부르기로 함) 도입된 바 있다 [2,3]. 이 필터는 FIR 구조의 일반적인 특성인 계수 변동에 대한 견실성과 BIBO안정도로 인해 필

II. 연속-이산형 시스템에 대한 FIR 필터

추정대상 시스템으로 다음과 같이 선형시불변 연속형 공정에 이산형 측정과정으로 구성되는 시스템을 다루기로 한다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t) \quad (2.1)$$

$$z(t_i) = Cx(t_i) + v(t_i), i=1,2,\dots \quad (2.2)$$

식(2.1)에서 초기상태 $x(0)$ 는 영평균에 분산 P_0 인 확률변수이고, 공정잡음 $w(t)$ 와 측정잡음 $v(t_i)$ 는 영평균 백색잡음으로서 $E[w(t)w'(s)] = Q\delta(t-s)$, $E[v(t_i)v'(t_j)] = I\delta_{ij}$ 이고 $x(0)$ 와 $w(t)$ 와 $v(t_i)$ 는 서로 상관관계가 없다고 가정한다. 식(2.2)에서 $t_i - t_{i-1} = \Delta$

이며, t_1 는 1번째 측정시점을 나타낸다.

식(2.1)의 상태 $x(\cdot)$ 에 대한 시점 t_1 에서의 FIR필터는 다음과 같이 정의된다.

$$\hat{x}(t_1|N) = \sum_{k=i-N}^i H(i,k;N)z(t_k) \quad (2.3)$$

$$J = E[x(t_1) - \hat{x}(t_1|N)]' [x(t_1) - \hat{x}(t_1|N)] \quad (2.4)$$

식(2.3)의 구조를 갖고 식(2.4)의 성능지표를 최소화시키는 FIR필터는 선형최소분산 추정자로서 직교성을 지니므로 $E[x(t_1) - \hat{x}(t_1|N)]z'(t_j) = 0$, $i-N \leq j \leq i$ 이고 따라서 FIR필터의 임펄스응답 $H(i, \cdot; N)$ 는 다음의 관계를 만족시킨다.

$$H(i, j; N) = P(i, j)C' - \sum_{k=i-N}^i H(i, k; N)CP(k, j)C' \quad (2.5)$$

식(2.5)에서 $P(i, j) = E[x(t_1)x'(t_j)]$ 이다.

정리 2.1 : 식(2.1) - (2.2)의 선형시불변 연속-이산형 시스템에 대한 FIR필터는 다음과 같이 구성된다.

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t), \quad \hat{x}(t_{i-1}) = \hat{x}(t_{i-1}|N), \quad t_{i-1} < t < t_i \quad (2.6)$$

$$\hat{x}(t_i|N) = \sum_{k=i-N}^i H(i, k; N)z(t_k), \quad t = t_i \quad (2.7)$$

$$H(i, j; n+1) = [I - R(i, n+1)C'C]\phi H(i, j; n) \quad (2.8)$$

$$H(i, j; N-i+j) = R(i, N-i+j)C', \quad N-i+j \leq n \leq N-1$$

$$R(i, n+1) = M(i, n) - M(i, n)C'[I + CM(i, n)C']^{-1}CM(i, n)$$

$$R(i, -1) = P(i-N-1, i-N-1), \quad -1 \leq n \leq N-1 \quad (2.9)$$

식(2.8)에서 $\phi = e^{A\Delta}$ 이고, (2.9)에서 $M(i, n) = \phi R(i, n)\phi' + W$, $W = \int_0^{\Delta} e^{A\tau} BQB'e^{A'\tau} d\tau$ 이다.

따름 정리 2.1 : $\{\phi, C\}$ 가 완전가관측이면 $R(i, -1) = \infty$ 로 가정하여 시불변 FIR필터를 구성할 수 있다.

$$\hat{x}(t_i|N) = \sum_{k=i-N}^i H(i-k; N)z(t_k) = \sum_{k=0}^N H(k; N)z(t_{i-k}), \quad (2.10)$$

$$H(i; N) = S^{-1}(N)L(i; N), \quad 0 \leq i \leq N, \quad p \leq N \quad (2.11)$$

$$L(i; n+1) = \phi^{-1} [I - S(n)\bar{S}(n)]L(i; n), \quad (2.12)$$

$$L(i; N-i) = C', \quad N-i \leq n \leq N-1$$

$$S(n+1) = \phi^{-1}S(n)\phi^{-1} + C'C\phi^{-1}S(n)\bar{S}(n)S(n)\phi^{-1} \quad (2.13)$$

$$S(-1) = 0, \quad -1 \leq n \leq N-1$$

식(2.12), (2.13)에서 $\bar{S}(n) = \phi^{-1}W^{-1/2} [I + W^{-1/2}\phi^{-1}S(n)\phi^{-1}W^{-1/2}]^{-1} \cdot W^{1/2}\phi^{-1}$ 이고, 식(2.11)에서 p 는 시스템의 차수이다.

식(2.6)은 측정치가 없을 때의 선형최적필터구조이며, 식(2.7) - (2.13)은 식(2.1)의 연속형시스템을 Δ 간격으로 이산화시킨 뒤, 여기에 이산형 FIR필터 알고리즘을 적용시킴으로써 얻어진다 [3]. 비선형시스템에 대한 결과는 측정시점에서 대상시스템을 추정치에 대해 선형화시킴으로써 유사한 형태로 유도해낼 수 있다.

III. 모델링오차에 대한 필터의 성능분석

추정대상 시스템에 모델링오차가 있을 경우의 성능 분석을 위해 대상시스템의 실제 모델이 다음과 같다고 가정한다.

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}\bar{w}(t) \quad (3.1)$$

$$z(t_i) = \bar{C}\bar{x}(t_i) + \bar{v}(t_i), \quad i=1, 2 \quad (3.2)$$

식(3.1)에서 초기상태 $\bar{x}(0)$ 는 영평균에 분산이 \bar{P}_0 이고, $\bar{w}(t)$ 와 $\bar{v}(t_i)$ 는 영평균 백색잡음으로서 상호분산이 각각 \bar{Q} , I 이며, 서로 상관관계가 없다고 가정한다.

식(3.1) - (3.2)로 표시되는 실제 시스템에 식(2.1) - (2.2)를 시스템 모델로 하여 FIR필터를 적용시키는 컴퓨터 모의실험을 행한다. 성능비교를 위해 칼만 필터, 유한기억 필터 [4], 순환형 유한기억 필터 [5]를 같이 적용하기로 한다.

시스템 계수 행렬 및 관련상수들을 다음과 같이 취하고 모의실험을 행하였다.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.415 & -0.0111 & 0 & -0.0111 \\ 9.8 & -1.43 & -0.0198 & 0 & -0.0198 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.001 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & -0.01 & 0 & -0.01 \\ 9.7 & -1.4 & -0.02 & 0 & -0.02 \\ 0 & 0 & 1 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.21 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}'$$

$$\bar{C} = C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{P}_0 = P_0 = I$$

$$\bar{x}(0) = x(0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}'$$

식(2.1)과 (3.1)의 연속형 공정은 $d=0.05[\text{sec}]$ 간격으로 이산화시켰으며, 측정시간은 $\Delta = 0.5[\text{sec}]$ 로 하고, FIR 필터와 유한기억필터의 관측구 간폭은 $N=10$ 로 하였다.

- [1] T. Kailath ed., Modern Signal Processing, Hemisphere Publishing Co., pp.39 - 56, 1985.
- [2] W.H. Kwon and O.K. Kwon, "FIR filters and recursive forms for continuous time-invariant state-space models," IEEE Trans. Automat. Contr., vol.AC-32, pp.352-356, Apr. 1987.
- [3] O.K. Kwon and W.H. Kwon, "FIR filters and recursive forms for discrete-time state-space models," Proc. of 10th IFAC World Congress on Automatic Control, July 1987.
- [4] A.H. Jazwinski, "Limited memory filtering," IEEE Trans. Automat. Contr., vol.AC-13, pp.558 - 563, Oct. 1968.
- [5] A.M. Bruckstein and T. Kailath, "Recursive limited memory filtering and scattering theory," IEEE Trans. Inform. Theory, vol.IT-31, pp. 440 - 443, May 1985.
- [6] 권 오규, 어 옥렬, "유한구간 필터의 성능분석," '86 한국 자동 제어 학술회의 논문집, vol. 1, pp. 97 - 101, Oct. 1986.

였다. FIR 필터로는 식(2.10) - (2.13)의 시분변형 알고리즘을 사용하였다.

시스템 잡음의 상호분산 Q 의 값을 바꿔가며 모의 실험을 행한 결과는 그림 3.1과 같다. 그림 3.1에서 볼 수 있듯이, 모델링오차가 있을 경우의 칼만필터의 추정 오차는 Q 가 작을수록 커져가고 있으나, FIR 필터는 그와 반대로 Q 가 작을수록 추정오차가 줄어들어 칼만필터나 유한구간 필터에 비해 더 좋은 특성을 나타내고 있다.

공정잡음이 없는 비선형시스템으로서 인공위성의 궤도결정문제에 필터들을 적용시킨 결과는 그림 3.2와 같다 [3]. 이 경우에 칼만필터의 추정오차는 발산하고 있으나, FIR 필터와 유한구간 필터는 유계의 추정오차를 보이고 있으며, 그 가운데에서도 FIR 필터의 성능이 더 우수함을 볼 수 있다.

이상의 모의실험 결과를 통해서 볼 때, FIR 필터는 공정잡음이 없거나 작은 시스템에서 좋은 성능을 보이며, 특히 비선형 시스템에서 이러한 특성이 더욱 뚜렷하게 나타남을 알 수 있다. 순환형 유한구간 필터는 [5] 불안정하여 발산하기 때문에 [6] 비교 대상에서 제외시켰다.

IV. 검토 및 결론

이상으로 본 논문에서는 연속-이산형 시스템에 대한 FIR 필터 알고리즘을 제시하고, 모의실험을 통하여 이 필터의 성능을 시험해보았다. 모의실험 결과, FIR 필터는 공정잡음이 없거나 작은 시스템에 유용하게 적용할 수 있으며, 특히 비선형 시스템의 경우에 그 효과가 두드러지게 나타남을 알 수 있었다. 그러나 공정잡음이 커짐에 따라서 FIR 필터의 성능은 칼만필터에 비해 더 나빠지고 있었다. 이 필터를 실제 응용하는 문제와 연산시간을 줄이기 위한 고속알고리즘을 개발하는 것 등이 과제이다.

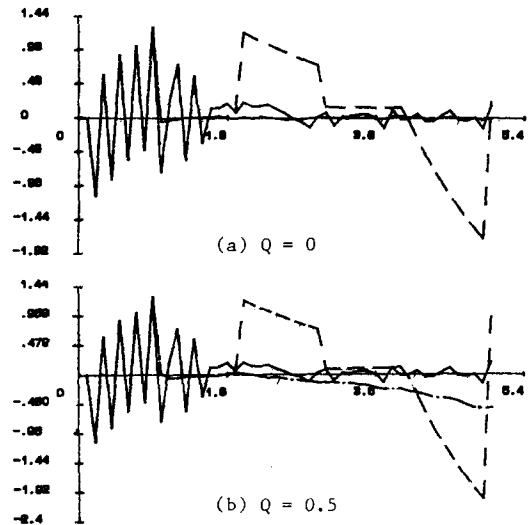


그림 3.1 : 선형시스템에서의 추정오차

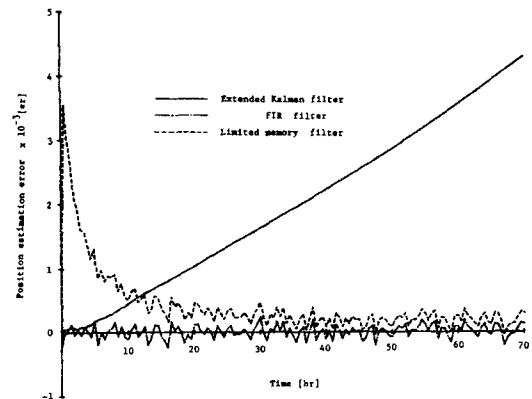


그림 3.2 : 비선형시스템에서의 추정오차